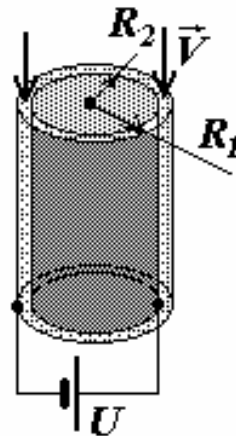


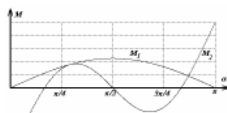
Условие

Задача 3. (10 баллов)



Для непрерывного нагревания воды используется следующая установка. Вода медленно прокачивается между двумя металлическими коаксиальными цилиндрами, радиусы которых равны R_1 и R_2 , причем расстояние между цилиндрами значительно меньше их радиусов. Длины цилиндров одинаковы и равны l . К цилиндрам приложено постоянное напряжение U . С какой скоростью V должна протекать вода между цилиндрами, чтобы она успела нагреться на Δt° градусов? Плотность, удельное электрическое сопротивление и удельную теплоемкость воды считать известными. Потерями теплоты пренебречь.

Минская областная олимпиада школьников по физике 2001 года



Решение

Задача 9.3

Выделим тонкое кольцо протекающей воды толщиной h . Мощность теплоты, выделяемой в этом кольце при прохождении тока, определяется законом Джоуля-Ленца

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad (1)$$

где R - электрическое сопротивление слоя воды, которое можно рассчитать по формуле

$$R = \rho \frac{L}{S}. \quad (2)$$

Учитывая, что электрический ток идет перпендикулярно тонкому слою воды, в данном случае

$$L = R_1 - R_2; \quad S = 2\pi R_1 h. \quad (3)$$

За время протекания воды через нагреватель $\tau = \frac{l}{V}$ она получит количество теплоты

$$Q = \frac{U^2}{R} \tau = \frac{U^2 2\pi R_1 h}{\rho(R_1 - R_2)} \cdot \frac{l}{V}. \quad (4)$$

Этого количества теплоты должно быть достаточно, чтобы нагреть слой воды на Δt градусов. Для этого требуется теплота

$$Q = cm\Delta t = c\gamma \cdot \pi(R_1^2 - R_2^2)h\Delta t, \quad (5)$$

здесь $\pi(R_1^2 - R_2^2)h$ - объем выделенного слоя воды, γ - плотность воды. Приравнявая два последних выражения, получаем формулы для вычисления скорости

$$V = \frac{2U^2 R_1}{\rho(R_1 - R_2)} \cdot \frac{l}{c\gamma(R_1^2 - R_2^2)\Delta t}. \quad (6)$$

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	Примечания
1.1	Закон Джоуля-Ленца	1	
1.2	Выражение для сопротивления - общая формула - «где длина, где площадь» - применение в данном случае	3	1 1 1
1.3	Выделение тонкого кольца воды	1	
1.4	Теплота, необходимая для нагревания - общая формула - выражение для массы выделенной воды - окончательный результат	3	1 1 1
1.5	Использование равенства теплот	1	
1.6	Окончательный результат	1	
	ИТОГО	10	

11 класс. Решения задач.

Задача 1.

1.1 При изменении магнитного поля, вследствие явления электромагнитной индукции, появляется электрическое поле, с которым взаимодействуют заряды кольца. Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для кольца

$$mr^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = e\tilde{E}r, \quad (1)$$

где $\tilde{E}$ - среднее значение тангенциальной составляющей вихревого электрического поля.

Примечание. Уравнение (1) можно получить и без использования «готового» уравнения динамики вращательного движения - на основании рассмотрения динамики движения отдельных малых элементов кольца.

По закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока, поэтому справедливо соотношение

$$2\pi r \tilde{E} = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}, \quad (2)$$

из которого следует

$$r \tilde{E} = -\frac{r^2}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (3)$$

После подстановки выражения (3) в уравнение (1) и сокращения на Δt , получаем требуемое соотношение для модуля изменения угловой скорости

$$\Delta\omega = \frac{e}{2m} B_0. \quad (4)$$

1.2 Сила тока отдельного кольца может быть вычислена по определению

$$I_1 = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}, \quad (5)$$

где T - период обращения. Сила тока двух колец равна сумме токов отдельных колец, поэтому (учитывая, что их скорости $\omega_{1,2} = \pm\omega_0 + \Delta\omega$, где ω_0 - угловые скорости до включения магнитного поля)

$$I = \frac{e}{2\pi} (\omega_1 + \omega_2) = \frac{e}{\pi} \Delta\omega = \frac{e^2}{2\pi m} B_0. \quad (6)$$

Направление тока легко определить по правилу Ленца - он создает поле, противоположное внешнему полю.

1.3 Магнитный момент отдельного атома определяется по формуле

$$p_m = I\pi r^2 = \frac{e^2 r^2}{2m} B_0, \quad (7)$$

а магнитный момент единицы объема

$$J = np_m = \frac{e^2 r^2}{2m} n B_0. \quad (8)$$

1.4 Обозначим высоту цилиндра h , а его радиус R , тогда его магнитный момент может быть записан в двух формах

$$P_m = JV = \frac{e^2 r^2}{2m} n B_0 \pi R^2 h; \quad (9)$$

$$P_m = i\hbar\pi R^2;$$

приравнивая которые получим

$$i = J = \frac{e^2 r^2}{2m} n B_0. \quad (10)$$

Магнитное поле, созданное этим полем можно вычислить используя формулу для индукции поля внутри соленоида $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$, в которой произведение силы тока на плотность намотки является линейной плотностью токов, поэтому

$$B' = \mu_0 i = \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} n B_0. \quad (11)$$

1.5 Так как поле B' направлено противоположно внешнему полю B_0 , то поле внутри магнетика будет равно

$$B = B_0 - B' = \left(1 - \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} n\right) B_0, \quad (12)$$

Сравнивая это выражение с формулой приведенной в условии, получим выражение для магнитной проницаемости

$$\mu = 1 - \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} n. \quad (13)$$

1.6 Для проведения численных расчетов необходимо выразить значение концентрации атомов через известные постоянные $n = \frac{\rho}{m_{Cu}} = \frac{\rho N_A}{M}$, где $m_{Cu} = \frac{M}{N_A}$ — масса атома меди. Окончательное выражение для магнитной проницаемости принимает вид

$$\begin{aligned} 1 - \mu &= \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} \cdot \frac{\rho N_A}{M} = \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,6 \cdot 10^{-10})^2}{2 \cdot 0,9 \cdot 10^{-30}} \cdot \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Заметим, что табличное значение рассчитанной величины для меди равно $1,0 \cdot 10^{-5}$, что отличается всего в два раза.

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	Примечания
1.1	Вывод формулы (4) - закон эл.-маг. индукции - выражение для средней напряженности эл. поля - ур-ние движения - его решение	4	1 1 1 1
1.2	Всего - сила тока одного витка - суммарный ток - направление тока	3	1 1 1
1.3	Всего - магнитный момент атома - магнитный момент объема	2	1 1
1.4	Всего - выражение момента через поверхностный ток - равенство моментов - выражение для i - выражение для B'	5	1 1 1 2
1.5	Всего - разность полей - выражение для μ	2	1 1
1.6	Всего - выражение для n - численный расчет	3	1 2
	Оформление	1	
	ИТОГО	20	

Задача 2.

Рассмотрим зависимость моментов сил, действующих на стержень, от угла его отклонения от вертикали α . (Понятно, что из-за симметрии задачи достаточно рассмотреть один стержень). Для опрокидывания стержня необходимо, чтобы момент силы тяжести

$$M_1 = mgl \sin \alpha \quad (1)$$

превышал момент силы упругости

$$M_2 = k(2l \sin \alpha - 2a)l \cos \alpha \quad (2)$$

при любом положении стержня. Таким образом, неравенство

$$mgl \sin \alpha > k(2l \sin \alpha - 2a)l \cos \alpha \quad (3)$$

должно выполняться при любом значении угла α в диапазоне от 0 до $\pi/2$. Так как в этом диапазоне $\sin \alpha > 0$, то неравенство (3) можно переписать в виде

$$m > \frac{2kl}{g} \cdot \frac{(\sin \alpha - \xi) \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4)$$

где обозначено $\xi = \frac{a}{l}$. Найдем максимум функции

$$f(\alpha) = \frac{(\sin \alpha - \xi) \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha - \xi \operatorname{ctg} \alpha. \quad (5)$$

Вычисляя производную

$$f'(\alpha) = -\sin \alpha + \frac{\xi}{\sin^2 \alpha}$$

и приравнявая ее к нулю, получаем значение угла α^* , при котором функция (5) принимает максимальное значение

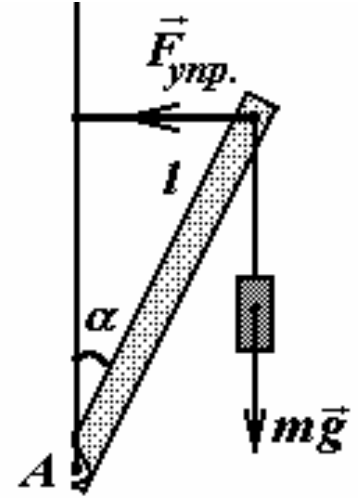
$$\sin \alpha^* = \sqrt[3]{\xi}. \quad (6)$$

Найдем косинус этого угла

$$\cos \alpha^* = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha^*} = \sqrt{1 - \xi^{2/3}}$$

и подставим в неравенство (4)

$$m > \frac{2kl}{g} \cdot \frac{(\sin \alpha^* - \xi) \cos \alpha^*}{\sin \alpha^*} = \frac{2kl}{g} \left(1 - \frac{\xi}{\sin \alpha^*} \right) \cos \alpha^* =$$



$$= \frac{2kl}{g} (1 - \xi^{2/3})^{3/2}$$

Итак, окончательный ответ задачи имеет вид: стержни опрокинутся при

$$m > \frac{2kl}{g} \left(1 - \left(\frac{a}{l} \right)^{2/3} \right)^{3/2}.$$

Комментарии к задаче.

1. Представим графически зависимости моментов сил (1),(2) от угла α . На

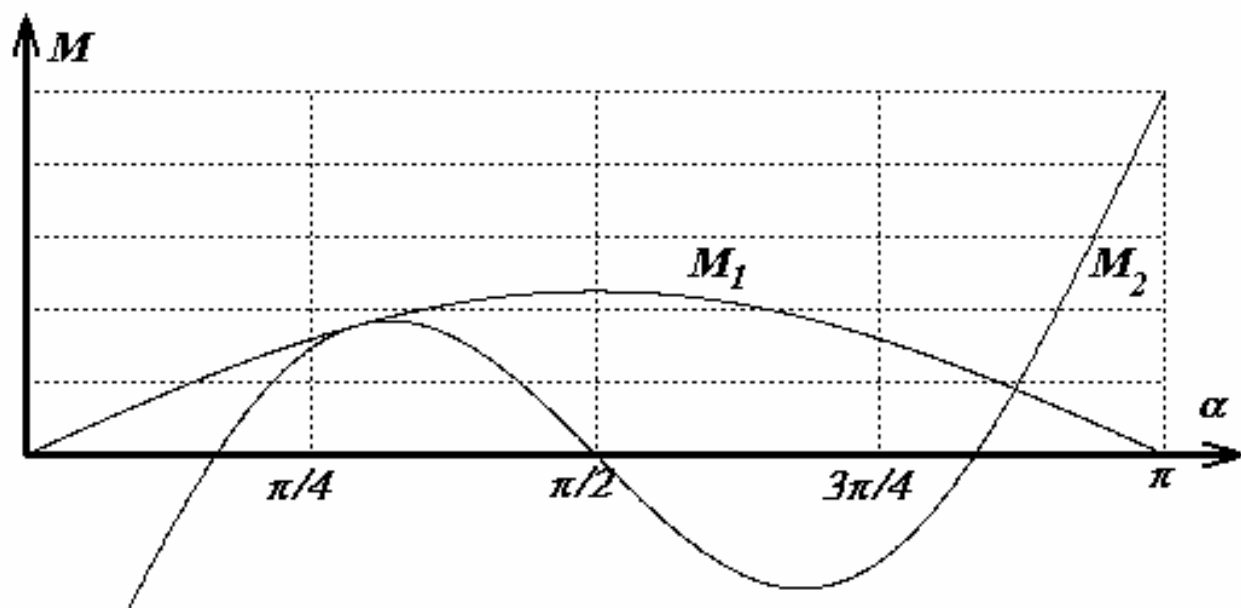
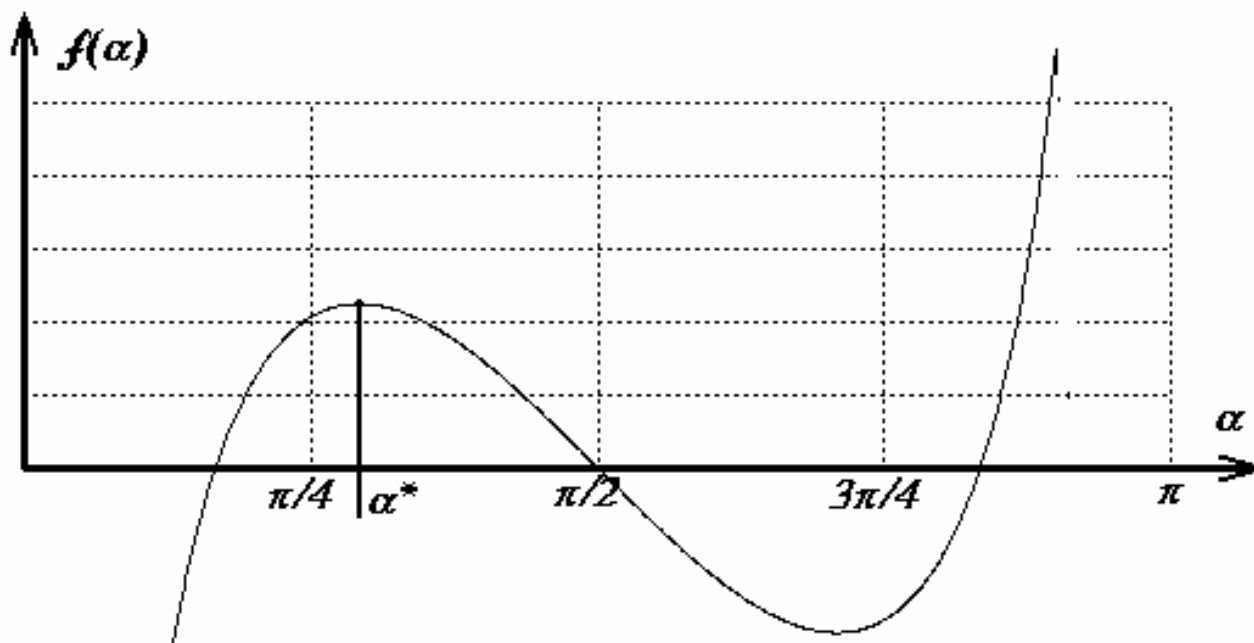


рисунок показан предельный случай, соответствующий найденному решению задачи. График построен при $\xi = 0,5$. Отрицательные значения момента силы упругости в области малых углов соответствуют сжатию резинки.

2. Покажем также график исследованной функции $f(\alpha)$, показывающий, что найденное значение α^* действительно соответствует точке максимума.



3. Возможно также решение данной задачи на основании анализа зависимости потенциальной энергии системы от угла отклонения при различных значениях масс грузов

$$\begin{aligned}
 U &= 2mgl \cos \alpha + \frac{k}{2}(2l \sin \alpha - 2a)^2 = \\
 &= 2kl^2 \left(\frac{mg}{kl} \cos \alpha - (\sin \alpha - \xi)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Если потенциальная кривая имеет минимум в диапазоне $[0, \pi/2]$, то стержни могут оставаться в положении равновесия выше горизонтали, при исчезновении этого минимума система такого положения равновесия не имеет.

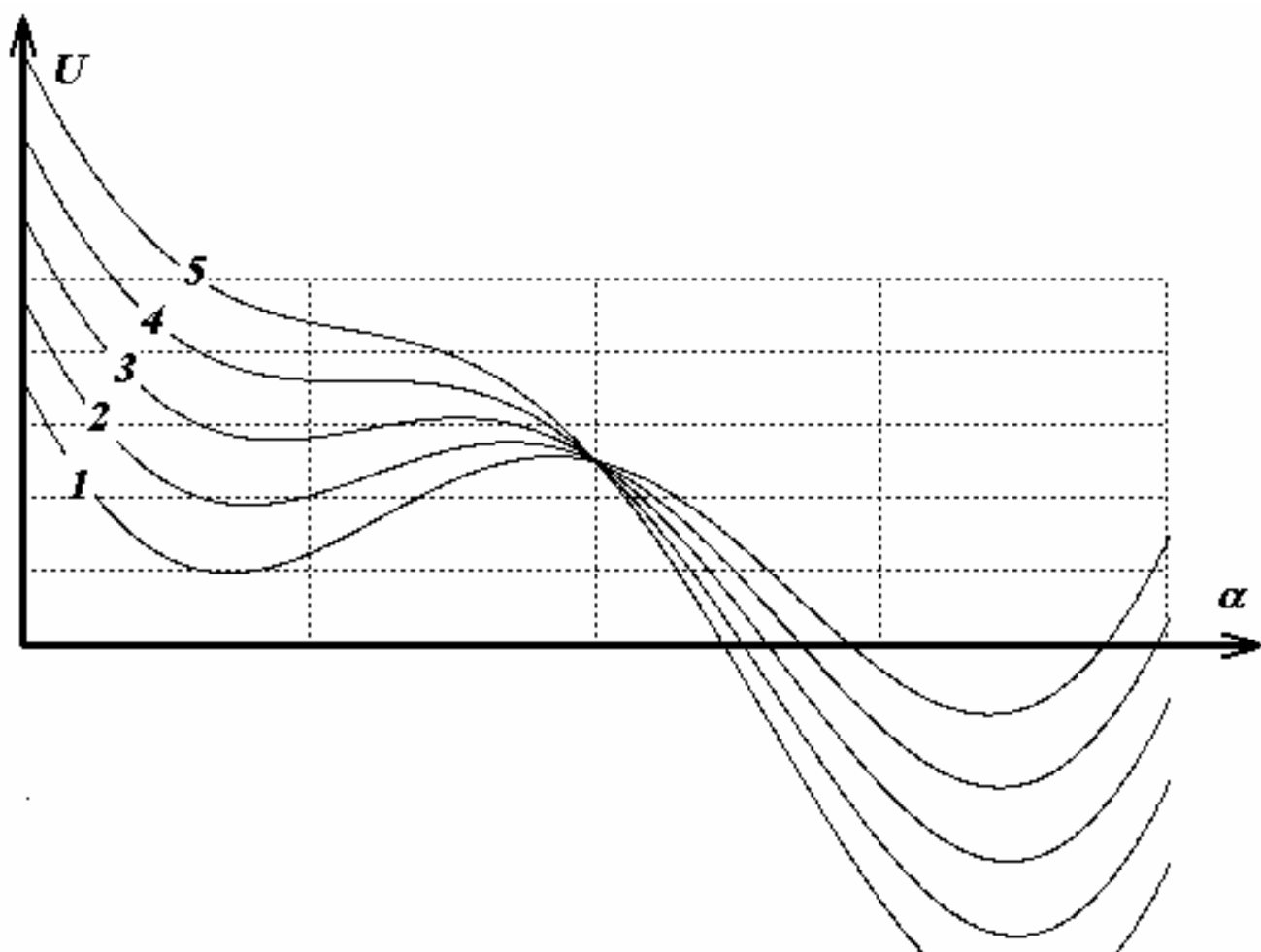


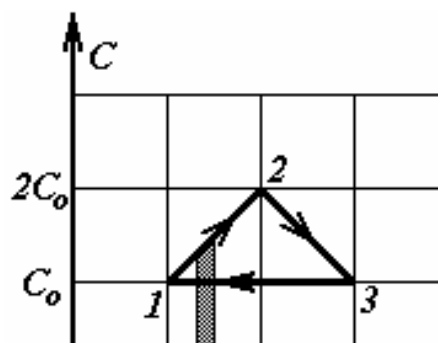
Рисунок показывает изменение зависимости потенциальной энергии от угла α при возрастании увеличении массы грузов (в порядке возрастания номеров кривых), который и демонстрирует этот эффект - так на кривой 4, соответствующей найденному граничному значению массы), минимум отсутствует.

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	Примечания
2.1	Выражения для моментов сил - необходимость сравнения моментов - момент силы тяжести - момент силы упругости	4	1 1 2
2.2	Исследование зависимостей моментов от угла отклонения - необходимость анализа - поиск максимума - найден максимум	5	1 1 2
2.3	Оформление	1	
	ИТОГО	10	

Задача 3

Легко заметить, что $C\Delta t = \delta Q$, δQ - количество теплоты, полученное газом при изменении температуры на величину Δt . Следовательно площадь, под графиком зависимости $C(t)$ численно равна количеству полученной теплоты. На участках $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$ $C > 0$ и $\Delta t > 0$, поэтому на этих участках газ получает



теплоту от нагревателя ($\delta Q > 0$). Следовательно, количество полученной газом теплоты равно

$$Q_1 = 2 \frac{C_0 + 2C_0}{2} \cdot (t_2 - t_1) = 3C_0(t_2 - t_1) = \frac{9}{2}R(t_2 - t_1). \quad (1)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$Q_1 = \frac{9}{2}R(t_2 - t_1) = \frac{9}{2} \cdot 8,31 \cdot 50 \approx 1,9 \text{ кДж}. \quad (2)$$

На участке $3 \rightarrow 1$ $C > 0$, но $\Delta t < 0$, поэтому на этом участке газ отдает теплоту холодильнику ($\delta Q < 0$). Количество отданной теплоты равно

$$Q_2 = C_0(t_3 - t_1) = \frac{3}{2}R(t_3 - t_1). \quad (3)$$

По завершении всего процесса $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ температура газа принимает первоначальное значение, поэтому изменение внутренней энергии равно нулю, следовательно, разность полученной и отданной теплоты равна работе совершенной газом

$$A = Q_1 - Q_2 = C_0(t_2 - t_1) = \frac{3}{2}R(t_2 - t_1) \approx 0,62 \text{ кДж}. \quad (4)$$

По определению КПД данного процесса равен

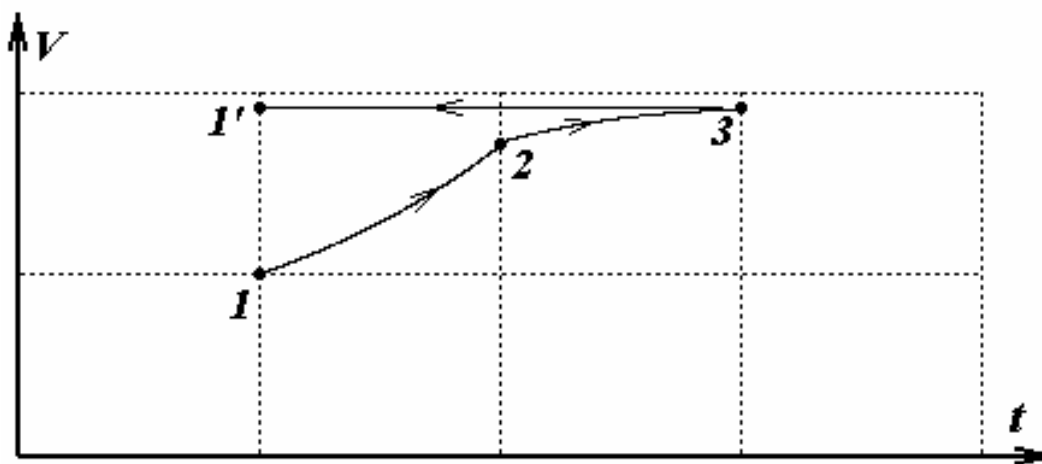
$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{1}{3}. \quad (5)$$

Максимальная температура газа в точке 3, а минимальная в точке 1, поэтому по теореме Карно максимальный КПД цикла, работающего в данном диапазоне температур равен (температуры должны быть переведены в абсолютную шкалу)

$$\eta_{max} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_3 + 273} = \frac{100}{150 + 273} \approx 0,24. \quad (6)$$

Итак, КПД цикла Карно, при тех же предельных температурах, оказался меньше, чем в рассматриваемом процессе. Разрешения парадокса в том, что рассмотренный процесс не является циклическим, так теплоемкость не является функцией состояния. А теорема Карно справедлива для циклических процессов, поэтому в данном случае она не применима.

Примечание к задаче. Используя уравнение первого начала термодинамики, можно получить уравнения, описывающие данный процесс в терминах параметров состояния. Так на рисунке показан этот процесс в координатах $(V, T$ - «объем-температура»)



Как видно, процесс, действительно не является циклическим (система не возвращается в исходное состояние). Заметьте, что участок $3 \rightarrow 1$ является изохорическим процессом.

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	Примечания
2.1	Методика расчета теплоты - элементарная теплота - площадь под графиком (либо интеграл)	2	1 1
2.2	Расчет полученной теплоты - выбор участков (обоснование) - численный расчет	2	1 1
2.3	Расчет работы - методика расчета (обоснование) - численное значение	2	1 1
2.4	КПД процесса	1	
2.5	КПД цикла Карно	1	
2.6	Объяснение парадокса - есть парадокс - нет цикла	2	1 1
	ИТОГО	10	