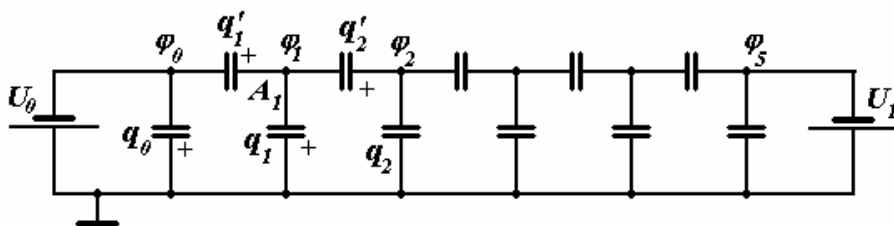


Условие

3. Из листового железа изготовлена плавающая платформа в форме прямоугольного параллелепипеда размерами $10 \times 10 \times 50$ м и массой 250 т. В качестве балласта используется бетон плотностью $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, который ровным слоем заливается на дно платформы. Платформа должна плавать в вертикальном положении в воде, плотность которой $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Какой слой бетона можно залить внутрь платформы, чтобы она плавала устойчиво?

Решение

3. Обозначим потенциалы точек A_k ($k = 1, 2, \dots, 5$) через φ_k , заряды конденсаторов емкостями $C_1 - q'_k$, а конденсаторов $C_2 - q_k$, соответственно. Расставим также предположительные знаки зарядов на пластинах конденсаторов.



Так как потенциалы точек A_k ($k = 1, 2, \dots, 5$) должны образовывать геометрическую прогрессию, то

$$\varphi_k = \varphi_0 \lambda^k, \quad (1)$$

где λ - неизвестный пока знаменатель прогрессии, а $\varphi_0 = U_0$.

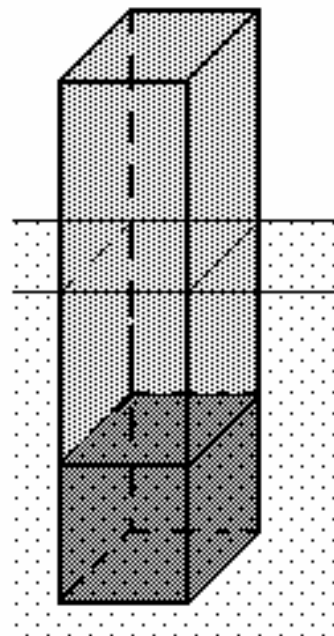
Используя закон сохранения электрического заряда, можно записать соотношения между зарядами конденсаторов, подключенных к точке A_1 :

$$q'_1 = q_1 + q'_2. \quad (2)$$

Заряды конденсаторов связаны с разностью потенциалов соотношением $q = C \Delta \varphi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q_1 &= C_2 \varphi_1 = \lambda C_2 \varphi_0 \\ q'_1 &= C_1 (\varphi_0 - \varphi_1) = (1 - \lambda) C_1 \varphi_0 \\ q'_2 &= C_1 (\varphi_1 - \varphi_{21}) = \lambda (1 - \lambda) C_1 \varphi_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя значения зарядов в уравнение (2), получим уравнение из решения которого можно найти значение величины λ



$$(1 - \lambda)C_1\varphi_0 = \lambda C_2\varphi_0 + \lambda(1 - \lambda)C_1\varphi_0,$$

или

$$(1 - \lambda) = \lambda \frac{C_2}{C_1} + \lambda(1 - \lambda). \quad (4)$$

Корни этого квадратного уравнения находятся по стандартной формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + \frac{C_2}{C_1} \pm \sqrt{(2 + \frac{C_2}{C_1})^2 - 4}}{2}. \quad (5)$$

Используя значение отношения емкостей конденсаторов, получим

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}. \quad (6)$$

Чтобы условие задачи было удовлетворено, необходимо, чтобы напряжение второго источника удовлетворяло соотношению

$$U_1 = \varphi_5 = U_0\lambda^5 = 3^{\pm 5}U_0. \quad (7)$$

Таким образом, задача имеет два решения

$$U_1 = 3^5 U_0 = 0,24 \cdot 10^3 \text{ В}, \quad U_1 = 3^{-5} U_0 = 0,043 \text{ В}.$$

Потенциалы точек образуют прогрессию:

в первом случае $-10, -30, -90, -270, -810, -2430 \text{ В}$;

во втором $-10, -3,3, -1,1, -0,37, -0,12, -0,041 \text{ В}$.

Заметим, что существование двух решений следует из симметрии рассматриваемой электрической схемы.

Схема оценивания.

Номер пункта	Содержание	баллы всего	в том числе за подпункты
1	Уравнение для знаменателя прогрессии	4	
	- потенциалы точек		1
	- связь заряда и разности потенциалов		1
	- соотношение между зарядами (2)		2
2	Определение знаменателя прогрессии	3	
	- два корня		1
3	Значение напряжения	2	
	- формула		1
	- численные значения		1
4	Потенциалы точек (численные значения)	1	
	всего	10	