

Условие

Задание 3. Жми на газ!

В данном задании рассматриваются некоторые вопросы, связанные с движением автомобилей.

В качестве примера рассматривается автомобиль *Belgee X50* (Белджи X50) – компактный городской кроссовер, построенный на модульной платформе ВМА совместно с инженерами Volvo. С августа 2023 года кроссовер белорусской сборки производится под собственным брендом *Belgee*.

При решении задачи вам могут понадобиться некоторые характеристики этого автомобиля:

- Размеры автомобиля: длина - 4330 мм; ширина - 1800 мм; высота - 1609 мм;

- Масса автомобиля (с водителем) $m = 1,7 \cdot 10^3$ кг

- Колесная база (расстояние между осями колес) $l = 2,6$ м

- Центр масс автомобиля находится на высоте $h = 0,80$ м над дорогой, на равном расстоянии от осей колес;

- Мощность двигателя $P = 150$ л.с. ≈ 110 кВт.

- Коэффициент трения скольжения резины колес о дорогу $\mu_0 = 0,80$;

Отметим, что коэффициенты трения существенно зависят от дорожного покрытия, износа колес, погоды.

Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



Часть 1. Сопротивлением воздуха пренебрегаем!

Автомобиль начинает разгон из состояния покоя на горизонтальном участке дороги. Сопротивлением воздуха и трением качения пренебречь.

В данном вопросе считайте, что все колеса автомобиля являются ведущими.

1.1 Рассчитайте минимальное время разгона автомобиля от состояния покоя до скорости $v_0 = 100 \frac{\text{км}}{\text{час}}$.

Автомобиль начинает разгоняться на горизонтальном участке дороги.

1.2 Рассчитайте максимальное ускорение автомобиля, если:

- а) ведущими являются задние колеса;
- б) ведущими являются передние колеса.

Часть 2. Какова сила сопротивления на самом деле?

В справочниках приводят формулу силы для лобового сопротивления воздуха, действующей на движущийся со скоростью v автомобиль

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho v^2 S, \quad (2)$$

где $\rho = 1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ - плотность воздуха, S - площадь лобового поперечного сечения автомобиля, C_x - безразмерный коэффициент лобового сопротивления автомобиля, зависящий от формы его корпуса.

Для проверки применимости этой формулы были проведенные тестовые испытания с автомобилем Бедджи Х50. Автомобиль разогнали, после чего выключили двигатель и не включая тормозов дали возможность ему свободно двигаться по горизонтальной дороге. При этом измеряли скорость автомобиля через каждые 100 метров пути. Результаты измерений приведены в Таблице 1 Листов ответов. Там же приведен график полученной зависимости.

2.1 Используя данные испытаний, покажите, что формула (2) правильно описывает силу сопротивления воздуха, действующую на автомобиль.

2.2 Рассчитайте численные значения коэффициента трения качения μ_1 и коэффициента лобового сопротивления C_x .

Подсказки.

1. Для выполнения этой части постройте по имеющимся данным график некоторой зависимости, который наглядно и обоснованно подтверждающий, что формула (2) правильно описывает силу сопротивления воздуха. Не забудьте указать, график какой зависимости вы построили, оцифруйте оси координат.
2. Приведенный в Листах ответов график зависимости скорости от пройденного пути носит иллюстративный характер. Для проведения расчетов достаточно использовать численные данные, приведенные в Таблице 1. **В свободные столбцы внесите результаты проведенных вами промежуточных расчетов.** Приведите формулы, по которым проведены эти расчеты.
3. Необходимые для расчета параметров μ_1 , C_x данные можете снять непосредственно из построенного вами графика (оценка погрешностей при этом не требуется).
4. При расчетах можно считать, что на каждых ста метрах ускорение автомобиля остается примерно постоянным (но различным на разных стометровых участках).

Решение

Задание 9-3. Жми на газ! Решение

Часть 1. Сопротивлением воздуха пренебрегаем!

1.1 Максимальное ускорение автомобиля определяется максимальной силой трения и равно

$$a_{\max} = \mu_0 g = 7,84 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad (1)$$

Поэтому, на первый взгляд, кажется, что минимальное время разгона равно

$$\tau = \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{27,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{7,84 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 3,5 \text{с}. \quad (2)$$

Однако, необходимо проверить, хватает ли мощности автомобиля, чтобы все время обеспечивать максимальное ускорение. Представим мощность автомобиля в виде

$$P = Fv = ma_{\max}v \quad (3)$$

И рассчитаем, при какой скорости требуемая мощность достигает максимального значения

$$v_1 = \frac{P}{ma_{\max}} = \frac{110 \cdot 10^3 \text{Вт}}{1,7 \cdot 10^3 \text{кг} \cdot 7,84 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 8,25 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 30 \frac{\text{км}}{\text{час}}. \quad (4)$$

Таким образом, автомобиль может разгоняться с максимальным ускорением только до скорости v_1 . На этот участок разгона потребуется время

$$t_1 = \frac{v_1}{a_{\max}} = \frac{P}{m(\mu_0 g)^2} = 1,05 \text{с}. \quad (5)$$

Далее разгон автомобиля будет определяться максимальной мощностью автомобиля. При постоянной мощности время разгона может быть рассчитано из уравнения

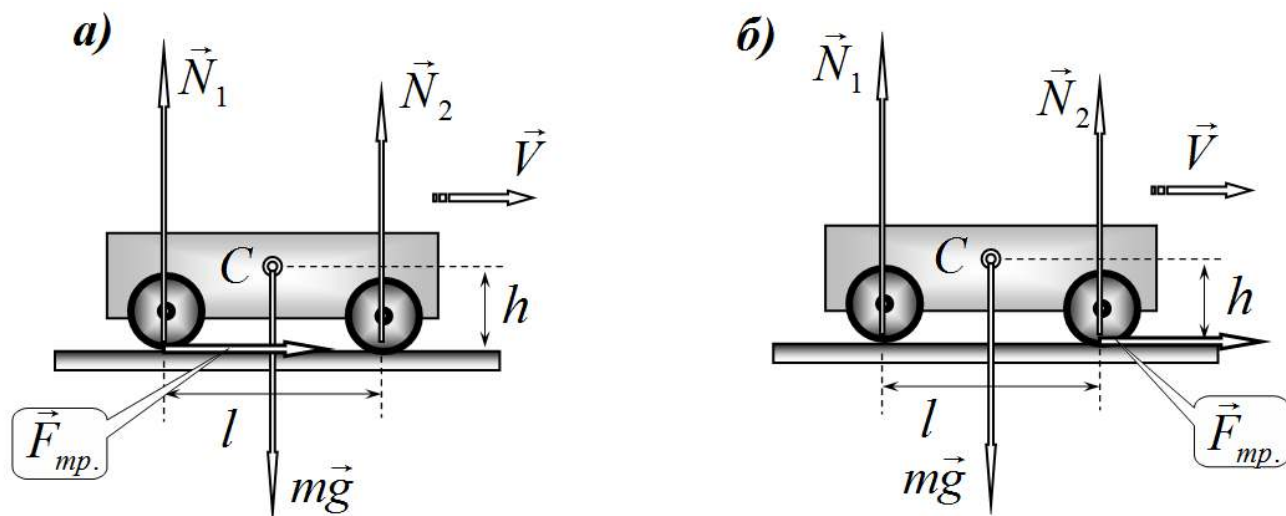
$$Pt_2 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{m}{2P} (v_0^2 - v_1^2) = 5,44 \text{с} \quad (6)$$

Итого, минимальное время разгона при оптимальном управлении равно

$$t = t_1 + t_2 = 6,5 \text{с}. \quad (7)$$

1.2 Если ведущими являются только одна пара колес, то силы реакции, действующие на передние и на задние колеса, будут различными, поэтому будут различаться и силы трения, что приведет к различным ускорениям автомобиля.

Изобразим силы, действующие на автомобиль во время разгона.



Сила трения, разгоняющая автомобиль равна (индекс 1 – ведущие задние колеса, индекс 2 – ведущие передние колеса)

$$F_{\text{тр.1,2}} = \mu_0 N_{1,2}. \quad (1)$$

Для расчета сил реакции запишем условие равенства вертикальных проекций сил

$$N_1 + N_2 = mg. \quad (2)$$

Автомобиль практически не поворачивается вокруг горизонтальной оси. Поэтому сумма моментов сил, действующих на автомобиль равна нулю. Запишем это условия для оси, проходящей через центр масс¹ автомобиля

$$F_{\text{тр.1,2}}h + N_2 \frac{l}{2} - N_1 \frac{l}{2} = 0. \quad (3)$$

Если ведущими являются задние колеса, то из формул (1) - (3) получаем

$$\mu_0 N_1 h + (mg - N_1) \frac{l}{2} - N_1 \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{mgl}{2(1-\mu_0 \frac{h}{l})}. \quad (4)$$

В этом случае ускорение автомобиля равно

$$a_{\text{max1}} = \frac{\mu_0 N_1}{m} \frac{\mu_0 gl}{2(1-\mu_0 \frac{h}{l})} = 5,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (5)$$

Если ведущими являются передние колеса, то из (1) – (3) имеем

$$\mu_0 N_2 h + N_2 \frac{l}{2} - (mg - N_2) \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{mgl}{2(1+\mu_0 \frac{h}{l})}. \quad (6)$$

В этом случае ускорение будет меньше

$$a_{\text{max2}} = \frac{\mu_0 N_2}{m} \frac{\mu_0 gl}{2(1+\mu_0 \frac{h}{l})} = 3,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (7)$$

Часть 2. Какова сила сопротивления воздуха?

2.1 Наиболее явным доказательством применимости предложенной формулы для силы сопротивления может служить график зависимости силы сопротивления от квадрата скорости.

¹Отметим, что при выборе другой точки, относительно которой рассматриваются моменты, необходимо учитывать силы инерции.

Такой график можно построить на основании имеющихся данных.

Уравнение второго закона Ньютона при движении автомобиля в данном случае имеет вид

$$ma = -\mu_1 mg - \frac{1}{2}C_x \rho S v^2 \quad (8)$$

Считая (в соответствии с подсказкой) движение на каждом стометровом участке равноускоренным, можно рассчитать среднее ускорение на участке от x_{k-1} до x_k по формуле

$$a_k = \frac{v_k^2 - v_{k-1}^2}{2\Delta x}. \quad (9)$$

Для повышения точности следует также взять значение средней скорости на этом же участке

$$\langle v \rangle_k = \frac{v_k + v_{k-1}}{2} \quad (10)$$

Тем самым появляется возможность построения линейной зависимости ($F = kv^2 + b$):

$$|ma_k| = \mu_1 mg + \frac{1}{2}C_x \rho S \langle v_k \rangle^2. \quad (11)$$

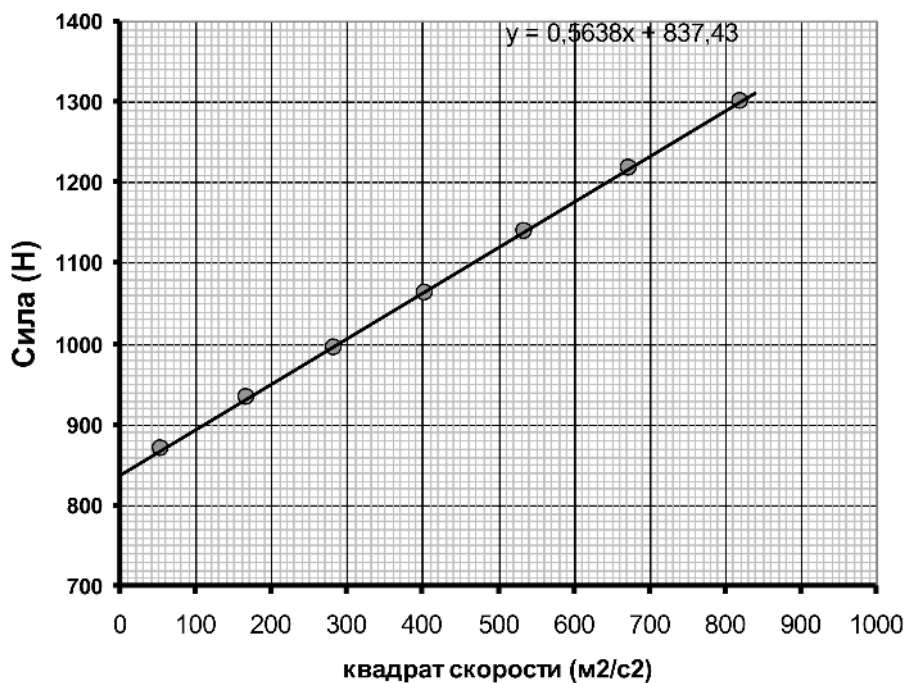
Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица 1. Расчет зависимости силы от квадрата скорости.

$x, \text{ м}$	$v, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\langle v \rangle_k$	a_k	$\langle v \rangle_k^2$	$F = ma_k$
0	30,00				
100	27,33	28,67	0,765	821,68	1301,1
200	24,57	25,95	0,716	673,40	1217,6
300	21,67	23,12	0,670	534,53	1139,8
400	18,56	20,12	0,626	404,61	1063,5
500	15,08	16,82	0,585	282,91	995,1
600	10,85	12,97	0,548	168,09	932,3
700	3,92	7,39	0,512	54,54	870,0

График этой зависимости показан на рисунке. Линейность полученного графика однозначно доказывает, что сила сопротивления воздуха действительно пропорциональна квадрату скорости.

Зависимость силы сопротивления от квадрата скорости



2.2 По графику легко найти коэффициент наклона прямой $k \approx 0,56 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$ и ее сдвиг $b \approx 840 \text{ Н}$.

По этим значениям находим требуемые параметры

$$b = \mu_1 mg \Rightarrow \mu_1 = \frac{b}{mg} = 0,05$$

$$k = \frac{1}{2} C_x \rho S \Rightarrow C_x = \frac{2k}{\rho S} = 0,30$$