

Условие

Задание 3. Дождевые облака



Как и все природные явления, образование облаков, возникновения дождя и грады, гроз являются очень сложными и трудно описываемыми физическими явлениями. Физика облаков, физика атмосферы – разделы физики, которые продолжают активно развиваться.

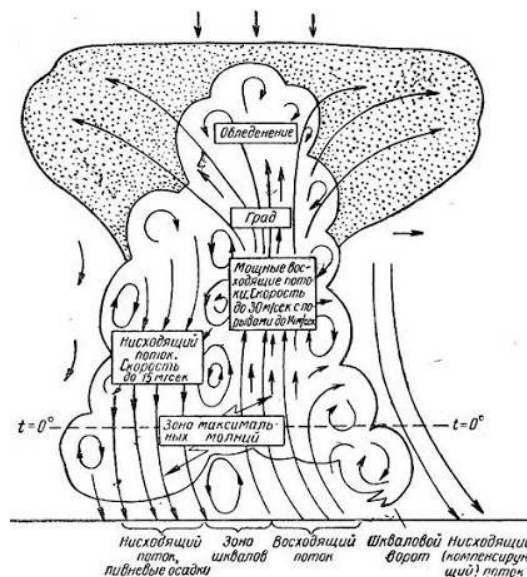
В данной задаче Вам предстоит провести некоторые простые оценки, связанные с движением дождевых капель в облаке и под ним.

Справа показана простейшая модель мощной грозовой ячейки. Не пугайтесь - рассчитывать все ее параметры вам не придется. Этот рисунок приведен для того, чтобы показать, что движение воздуха в нем может быть направлено вверх, вниз, в стороны – в общем куда угодно!

Для решения задачи Вам понадобятся следующие характеристики воздуха и воды:

- плотность воды $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- плотность воздуха будем считать постоянной и равной $\rho = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- плотность водяного пара в воздухе при температуре воздуха у поверхности земли $t = 25^\circ\text{C}$ равна $\rho_{\text{пар}} = 2,3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; а при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ содержанием воды в воздухе можно пренебречь;
- вязкость воды (величина, которая определяет силы сопротивления воздуха, она понадобится вам один раз, в одной формуле) $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$;
- ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

Формула для объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R - его радиус. Во всех частях задания все считайте, что капли (и градины) имеют форму шара.



Серьезная математическая подсказка. Если скорость тела зависит от времени по закону $v = bt^\gamma$ то изменение координаты тела (при любых γ) описывается формулой

$$x = \frac{bt^{\gamma+1}}{\gamma + 1}.$$

Например, примените эту формулу для $\gamma = 1$.*

Часть 1. Падение дождевых капель

В более учебниках физики можно найти формулы для силы сопротивления воздуха F , действующей на движущийся шарик: При малых скоростях используется формула (которая называется формулой Стокса)

$$F_1 = 6\pi\eta r v \quad (1)$$

здесь r - радиус шарика, v - его скорость, η - коэффициент вязкости воздуха. При больших скоростях сила сопротивления определяется формулой:

$$F_2 = C_x \frac{1}{2} \rho v^2 S, \quad (2)$$

где $C_x = 0,47$ безразмерный коэффициент лобового сопротивления шарика, ρ - плотность воздуха, $S = \pi r^2$ - площадь поперечного сечения шарика.

Сейчас Вам необходимо выбрать, какую формулу следует использовать в данной задаче. В реальности действуют обе силы (они имеют разную природу). Разумно выбирать ту силу, которая больше, меньшей силой можно пренебрегать.

1.1 Нарисуйте очень схематические графики зависимости силы сопротивления от скорости, описываемые формулами (1) и (2). 1.2 Получите формулу для «критической» скорости шарика $v_{кр}$, при которой обе формулы дают одинаковые значения. Рассчитайте численное значение этой критической скорости для капли радиуса $r_0 = 1,0$ мм. 1.3 Укажите, какую формулу для силы сопротивления следует использовать при описании движения капли в воздухе. Ответ кратко обоснуйте.

Независимо от вашего ответа на вопрос 1.3, далее используйте формулу (2).

Рассмотрим каплю, падающую в воздухе. По прошествии небольшого времени с начала падения, капля продолжает двигаться с некоторой постоянной, установившейся скоростью V . Можно считать, что капля достигает установившейся скорости за очень малый промежуток времени

1.4 Покажите, что скорость установившегося движения капли радиуса r можно представить в виде

$$V = V_0 \sqrt{\frac{r}{r_0}} \quad (3)$$

где V_0 - скорость установившегося движения капли радиуса r_0 . 1.5 Рассчитайте численное значение скорости V_0 , если $r_0 = 1,0$ мм.

*В дальнейшем используйте формулу (3), считая величины V_0, r_0 известными (даже, если вам их не удалось найти)!

Теперь Вам необходимо объяснить, почему всегда дождь начинается с падения самых крупных капель. Пусть нижняя граница облака находится на высоте $H = 1,0$ км. Рассмотрим две капли, радиус одной равен $r_0 = 1,0$ мм, а радиус второй $r_2 = 4,0$ мм, которые одновременно начинают падать из нижней границы облака.

1.6 Рассчитайте, чему равна разность времен падения этих капель, считая, что движением воздуха под тучей можно пренебречь.

Пусть в процессе падения радиус капли незначительно уменьшается из-за ее испарения по закону

$$r = r_0(1 - \gamma t) \quad (4)$$

где γ - малая величина.

1.7 Найдите закон движения капли испаряющейся капли $z(t)$, где z - расстояние от нижнего края облака.

Подсказка. При малых $x \ll 1$ можно воспользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \quad (5)$$

Часть 2. Капля в облаке

Пусть в облаке образовался восходящий поток, движущийся вверх со скоростью $U = 30 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

2.1 Рассчитайте, с какой скоростью относительно земли будет подниматься капля радиуса $r_0 = 1,0$ мм.

Рассмотрим каплю, которая зародилась на нижней границе облака. В процессе движения капли в облаке ее радиус возрастает вследствие продолжающейся конденсации водяных паров в облаке. На некоторой высоте капля замерзнет и превратится в градину. Пренебрежем различием в плотностях воды и льда. В этом случае движение капли и замерзшей градины описываются одинаково. Теория конденсации утверждает, что скорость роста радиуса капли описывается приближенной формулой

$$r^2 \approx \alpha t. \quad (4)$$

где $\alpha = 3,0 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ - постоянная величина. В этой формуле предполагается, что размер зародыша, из которого начинает расти капля, пренебрежимо мал. Этот закон справедлив при движении капли, как вверх, так и вниз.

2.2 Рассчитайте, при каком радиусе капли r_s она прекратит подниматься вверх. **2.3** Рассчитайте, за какое время τ_1 и на какую максимальную высоту z_{max} относительно нижнего края облака поднимется эта капля. **2.4** Рассчитайте радиус капли (или градины) r_m при ее возвращении на нижнюю границу облака.

10

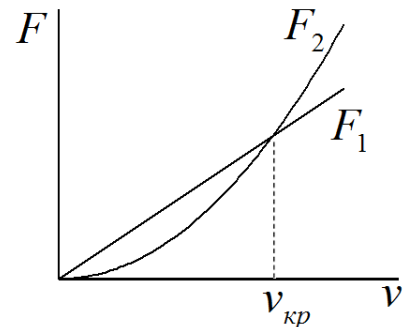
Решение

Задание 3. Дождевые облака (Решение)

1.1 Графики зависимости силы сопротивления от скорости показаны на рисунке. Из этого рисунка следует, что формулу следует применять при скоростях меньше критической, а формулу (2) при скоростях больших критической.

1.2 Приравняем силы, задаваемые формулами (1) и (2) в условии задачи

$$\frac{1}{2} C_x \rho v^2 \cdot \pi r^2 = 6\pi \eta r v. \quad (1)$$



Из этого выражения следует, что критическая скорость равна

$$v_{кр} = \frac{12\eta}{C_x \rho r} = 0,37 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

1.3 Очевидно, что скорость падения капель значительно превышает величину найденной критической скорости. Поэтому для расчета силы сопротивления следует пользоваться формулой (2).

1.4 При скорости установившегося движения сила тяжести, действующая на каплю, уравновешивается силой сопротивления воздуха. Поэтому ее можно найти из условия

$$\frac{1}{2} C_x \rho V^2 \cdot \pi r^2 = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x \rho}} r. \quad (2)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$V = \sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x \rho}} r = \sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x \rho}} r_0 = V_0 \sqrt{\frac{r}{r_0}}. \quad (3)$$

Что и требовалось доказать.

1.5 Значение критической скорости для шарика радиуса $r_0 = 1,0$ мм. как следует из формулы (3) равно

$$V_0 = \sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x \rho}} r_0 = 6,75 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

1.6 Вторая, большая капля будет падать быстрее, разность времен падения рассчитывается по «детской» формуле:

$$\Delta t = \frac{H}{V_0} \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{r_2}} \right) = 74 \text{с}. \quad (5)$$

1.7 При падении капли ее скорость будет изменяться по закону

$$V = V_0 \sqrt{1 - \gamma t} \approx V_0 - V_0 \frac{\gamma t}{2}. \quad (6)$$

Т.е. движение капли будет равноускоренным. Поэтому закон движения капли будет иметь вид

$$z(t) = V_0 t - V_0 \frac{\gamma t^2}{4}. \quad (7)$$

Часть 2. Капля в облаке

2.1 Сила сопротивления, определяется формулой (2) из условия задачи, в случае движения воздуха, под скоростью тела следует понимать относительную скорость: т.е. скорость тела относительно движущегося воздуха. В системе отсчета связанной с воздухом, установившаяся скорость капли есть V . которая определяется формулой (3). Следовательно, в системе отсчета. связанной с землей скорость движения капли равна

$$v = U - V \quad (8)$$

Если радиус капли не изменяется и равен $r_0 = 1,0$ мм. то установившаяся скорость подъема капли будет равна

$$v = U - V_0 = 23 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (9)$$

2.2 При изменении радиуса капли скорость ее подъема будет изменяться. Так в условии оговорено, что капля достигает установившейся скорости очень быстро. то можно считать, что

в любой момент времени скорость капли определяется формулой (7). Так как радиус капли изменяется, то изменяется и величина V . В этом случае формула (7) описывает зависимость скорости капли от времени:

$$v(t) = U - V(t) = U - V_0 \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \quad (10)$$

Здесь использована полученная ранее зависимость скорости установившегося движения от радиуса капли (3). Условие остановки капли может быть сформулировано различными способами: - скорость капли стала равной нулю; - относительная скорость капли стала равной по модулю скорости подъема; - сила сопротивления стала равной силе тяжести; и т.д. При любом подходе должно выполняться соотношение

$$U = V_0 \sqrt{\frac{r_s}{r_0}} \quad (11)$$

Из этого условия рассчитываем радиус остановившейся капли

$$r_s = r_0 \left(\frac{U}{V_0} \right)^2 = 20 \text{ мм} \quad (12)$$

2.3 В данном пункте нам фактически необходимо найти закон движения капли $x(t)$ по известной зависимости скорости от времени. Используя приведенную в условии зависимость радиуса от времени, запишем явную зависимость скорости от времени

$$v(t) = U - V_0 \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} = U - \frac{V_0}{\sqrt{r_0}} (\alpha t)^{1/4}. \quad (13)$$

Используя «серьезную математическую подсказку» можно сразу записать закон движения капли

$$z(t) = Ut - \frac{V_0}{\sqrt{r_0}} (\alpha)^{1/4} \frac{4}{5} t^{5/4} = Ut \left(1 - \frac{4}{5} \frac{V_0}{U} \sqrt[4]{\frac{\alpha t}{r_0^2}} \right). \quad (14)$$

здесь z - вертикальная координата капли, отсчитываемая от нижнего края облака. Этот закон описывает движение капли, как вверх, так и вниз. Как следует из выражения (13) в момент остановки τ_1 выполняется условие

$$\alpha \tau_1 = r_0^2 \left(\frac{U}{V_0} \right)^4 \quad (15)$$

Следовательно, время подъема капли равно

$$\tau_1 = \frac{r_0^2}{\alpha} \left(\frac{U}{V_0} \right)^4 = 1,3 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 20 \text{ мин.} \quad (16)$$

Подставляя это выражение в закон движения (13), получаем, что максимальная высота подъема равна

$$z_{\max} = \frac{1}{5} U \tau_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ м.} \quad (17)$$

2.4 Из формулы (13) следует, что в момент возвращения капли к нижнему краю облака τ_2 будет выполнено условие

$$\frac{4}{5} \frac{V_0}{U} \sqrt[4]{\frac{\alpha \tau_2}{r_0^2}} = 1. \quad (18)$$



Так как $\alpha \tau_2 = r_m^2$, (r_m - максимальный радиус градины при ее возвращении к нижней границе облака), то из формулы (18) следует, что этот радиус равен

$$r_m = \left(\frac{5}{4} \frac{U}{V_0} \right)^2 = 31 \text{ мм.} \quad (19)$$

Не мало, но такие градины бывают (см. рис.). Кроме того, они частично тают при полете к земле.