

Взаимодействия цилиндрических магнитов

Условие



Задание 2. Взаимодействия цилиндрических магнитов

Описание магнитных полей и магнитных взаимодействий является математически более сложной задачей, чем описание электростатических взаимодействий. Во многом это связано с отсутствием точечных магнитных зарядов, из-за чего простейшим источником магнитного поля является магнитный диполь. Однако, во многих задачах можно формально (но математически корректно) ввести точечные магнитные заряды, не забывая при этом, что реально суще-

ствующие источники магнитного поля имеют нулевой суммарный магнитный заряд. Такой подход используется в данном задании при расчете магнитных полей, создаваемых постоянными магнитами, и характеристик их взаимодействия.

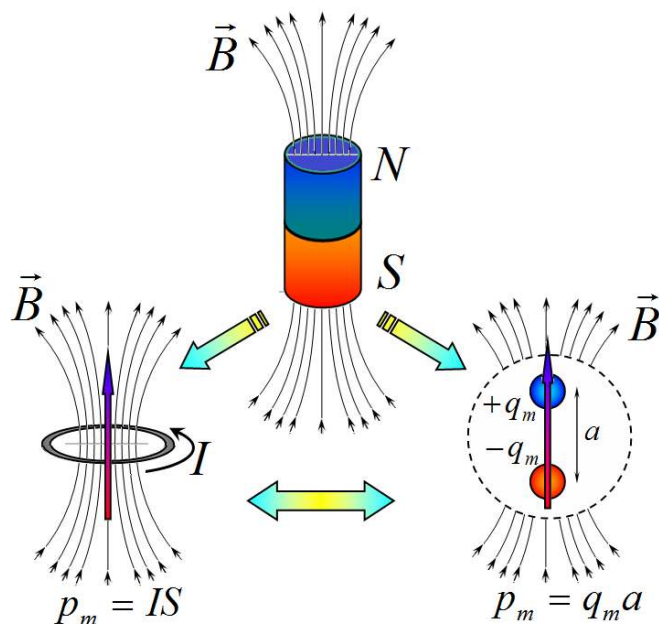
Теоретическое введение.

Согласно современным представлениям магнитное поле постоянных магнитов создается токами намагничивания, протекающими по поверхности намагниченного тела (эта идея первоначально была сформулирована А.М. Ампером и часто называется гипотезой Ампера).

Таким образом, поле небольшого цилиндрического магнита эквивалентно полю кругового тока. В качестве основной характеристики витка с током выступает магнитный момент, который равен

$$p_m = IS, \quad (1)$$

где I - сила тока в контуре, S - площадь этого контура. Альтернативный подход к описанию поля цилиндрического магнита является рассмотрение поля магнитного диполя - частицы, состоящей из двух точечных противоположных магнитных зарядов ($+q_m$ и $-q_m$), находящихся на малом расстоянии a друг от друга. Магнитный момент в этом случае определяется как



$$p_m = q_m a, \quad (2)$$

Отметим, что оба способа описания магнитных полей справедливы для точек, расстояние до которых от источников (магнита, кольца с током, магнитного диполя) значительно больше размеров самих источников. Считайте, что это условие выполняется во всех пунктах данной задачи.

Точечный магнитный заряд q_m создает центральное магнитное поле, модуль вектора индукции которого определяется по закону, аналогичному закону Кулона для электростатических полей

$$B = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2}, \quad (3)$$

здесь R - расстояние от точечного заряда, то точки, в которой рассчитывается поле, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн·м - магнитная постоянная.

На точечный магнитный заряд q_m со стороны магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ действует сила, равная

$$\vec{F} = q_m \vec{B} \quad (3)$$

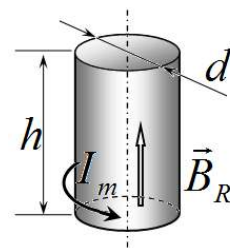
Основной характеристикой постоянных магнитов является остаточная намагниченность M_R , которая определяется как магнитный момент единицы объема $M_R = \frac{p_m}{\Delta V}$.

Эта величина обычно указывается в паспорте магнита. Вместо остаточной намагниченности также приводят величину $B_R = \mu_0 M_R$, которая называется остаточная индукция (т.е. индукция магнитного поля внутри магнита).

Еще раз подчеркнем, в настоящее время магнитных зарядов не обнаружена, поэтому величины магнитных зарядов q_m не должны входить в конечные результаты, которые должны выражаться через реальные характеристики магнитов – их магнитный момент p_m и намагниченность M .

Часть 1. Характеристики магнита.

В данной задаче рассматривается постоянный цилиндрический неодимовый магнит со следующими характеристиками:



диаметр магнита $d = 4,0$ мм; высота магнита $h = 10,0$ мм; остаточная индукция поля магнита $B_R = 1,4$ Тл и направлена вдоль оси магнита; плотность материала магнита $\rho_{Nd} = 7,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

1.1 Рассчитайте массу магнита m . 1.2 Рассчитайте магнитный момент магнита p_m . 1.3 Рассчитайте силу тока намагничивания, текущего по боковой поверхности магнита I_m .

Часть 2. Магнитное поле магнита.

Рассмотрите магнитное поле, создаваемое точечным магнитным зарядом q_m . Точечный заряд находится в начале отсчета оси z . Положение произвольной точки задается координатой z и расстоянием до этой оси r . В этом случае вектор индукции магнитного поля $\vec{B}^{(0)}$ разумно разложить на две компоненты: осевую $\vec{B}_z^{(0)}$, направленную параллельно оси z ; радиальную $\vec{B}_r^{(0)}$, направленную перпендикулярно оси.

2.1 Запишите формулы для осевой $B_z^{(0)}(z, r)$ и радиальной $B_r^{(0)}(z, r)$ компонент вектора индукции поля точечного заряда, как функции координат точки (z, r) .

Теперь Вам необходимо рассмотреть магнитное поле, создаваемое описанным цилиндрическим магнитом. Для расчета этого поля можно считать, что оно совпадает с магнитным полем магнитного диполя.

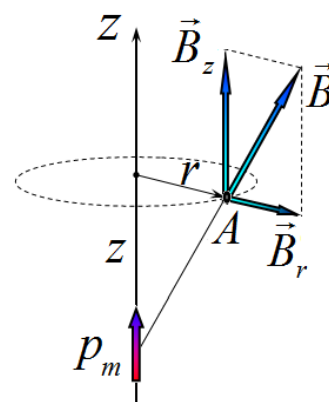
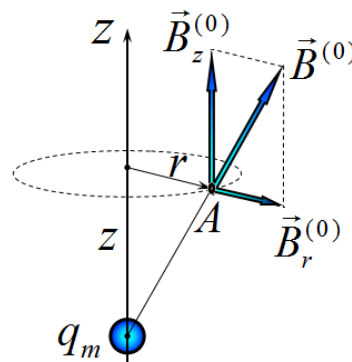
2.2 Нарисуйте схематически картину силовых линий магнитного поля, создаваемого магнитным диполем (цилиндрическим магнитом).

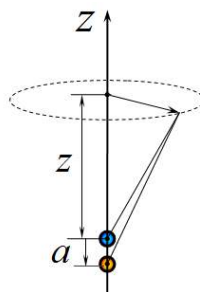
Пусть в начале оси z находится магнитный диполь с магнитным моментом p_m , направленным вдоль оси z . Положение произвольной точки A , как и ранее, задается координатами (z, r) .

2.3 Найдите зависимость осевой компоненты индукции поля магнитного диполя $B_z(z, r)$, от координат точки (z, r) . 2.4 Постройте схематический график зависимости осевой компоненты вектора индукции $B_z(z_0, r)$ от координаты r при некотором фиксированном значении координаты $z_0 > 0$. 2.5 Найдите зависимость индукции поля на оси z в зависимости от координаты z - $B_z(z)$.

2.6 Найдите зависимость радиальной компоненты индукции поля магнитного диполя $B_r(z, r)$, от координат точки (z, r) . 2.7 Постройте схематический график зависимости радиальной компоненты вектора индукции $B_z(z, r_0)$ от координаты z при некотором фиксированном значении координаты $r_0 > 0$. 2.8 Найдите значения модуля координаты $z = b$, при котором модуль функции $B_z(z, r_0)$ принимает максимальные значения $B_{r, \max}$. Найдите, чему равно это максимальное значение.

Примечания.





1. Вы можете построить схематические графики, даже если вам не удалось получить явные функциональные зависимости – это будет оценено! 2. Для облегчения вашей работы дадим математическую подсказку. Если величина a мала, то для расчета поля диполя Вы можете использовать следующее приближение, справедливое для любой функции

$$F(z + a) \approx F(z) + F'_z(z) \cdot a. \quad (4)$$

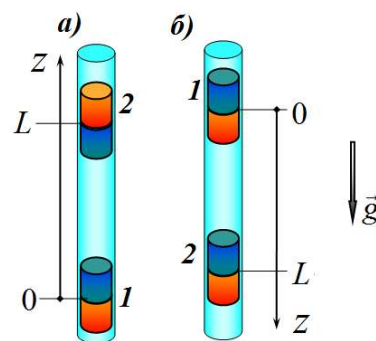
где $F'_z(z)$ - производная функции $F(z)$, вычисленная в точке z . 3. При необходимости Вы можете использовать приближенную формулу

$$(1 + x)^\gamma \approx 1 + \gamma x, \quad (5)$$

справедливую при $x \ll 1$ и любых степенях γ .

Часть 3. Притяжение и отталкивание.

Два одинаковых цилиндрических магнита помещены в вертикальную стеклянную трубку. Магнит 1 закреплен, магнит 2 может свободно двигаться вдоль трубки. Расстояние между магнитами можно считать значительно больше размеров магнитов. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Ответы выразите через магнитный момент магнитов p_m и их массу m .



3.1 Найдите зависимость силы магнитного взаимодействия между магнитами, как функцию расстояния z между ними. 3.2 Найдите, при каком расстоянии между магнитами L , магнит 2 может находиться в равновесии. Рассмотрите два случая, а) и б) ориентации магнитов, показанные на рисунке. 3.3 Укажите, какой из экспериментов, а) или б) может быть продемонстрирован экспериментально. Ответ кратко обоснуйте. 3.4 Рассчитайте численное значение равновесного расстояния L , для магнитов, параметры которого приведены в Части 1.

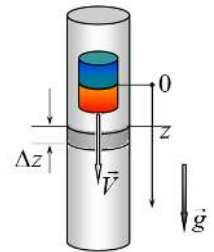
Часть 4. Магнитная вязкость – токи Фуко.

Цилиндрический магнит помещают внутрь длинной вертикаль-

ной тонкостенной алюминиевой трубки. Внутренний радиус трубки равен $r_0 = 3,0$ мм, толщина стенок равна $h_0 = 0,30$ мм. Удельное электрическое сопротивление алюминия равно $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м. По-прежнему, считаем массу магнита m и его магнитный момент p_m известными. Пусть скорость движения магнита постоянна и равна V . Выделим на стенке трубки тонкий слой толщиной Δz , находящийся на расстоянии z от середины магнита. В пп. 4.1 – 4.4 ответы выразите через параметры магнитного поля b и $B_{r\max}$, найденные в п. 2.8.

4.1 Найдите силу индуцированного тока ΔI , протекающего по выделенному кольцу Δz . 4.2 Найдите мощность теплоты, выделяющейся в трубке при движении магнита. 4.3 Найдите силу вязкого магнитного трения, действующую на движущийся магнит. 4.4 Найдите скорость установившегося падения магнита в трубке V . 4.5 Рассчитайте численное значение скорости падения магнита, характеристики которого приведены в Части 1.

Примечание. *Зависимость радиальной составляющей магнитного поля магнита на стенке трубки можно приближенно заменить на ступенчатую функцию, показанную на рисунке. Используйте параметры этой функции b и $B_{r\max}$, найденные в п. 2.8. Если вам не удалось найти ответы в п.2.8, то в данной части считайте их известными.*



Решение

Задание 2. Взаимодействия цилиндрических магнитов (Решение)

Часть 1. Характеристики магнита.

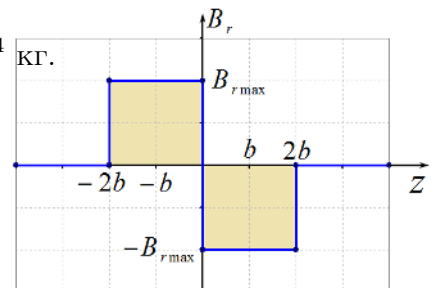
1.1 Так как, плотность и геометрические размеры цилиндрического магнита заданы, то расчет его массы труда не представляет:

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} h = 7,6 \cdot 10^3 \frac{\pi \cdot (4,0 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10,0 \cdot 10^{-3}}{4} = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ кг.} \quad (1)$$

1.2 Магнитный момент магнита рассчитывается по определению намагниченности

$$M_R = \frac{p_m}{V} \Rightarrow p_m = M_R V. \quad (2)$$

Используя заданную связь между намагниченностью и остаточной индукцией $B_R = \mu_0 M_R$, получим требуемый результат



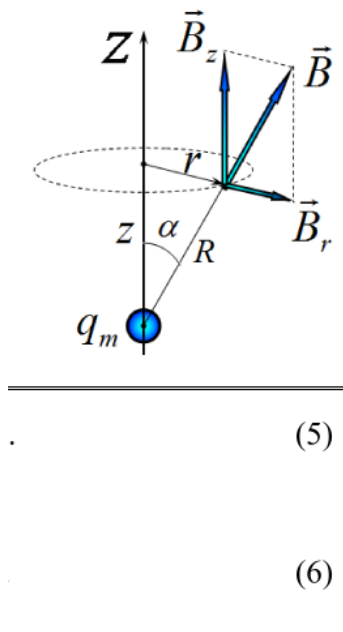
$$p_m = M_R V = \frac{B_R}{\mu_0} \cdot \frac{\pi d^2}{4} h = 0,14 \text{ A} \cdot \text{м}^2. \quad (3)$$

1.3 Расчет силы тока намагничивания можно провести по формуле магнитного момента, выражаемого через силу тока намагничивания

$$p_m = IS \Rightarrow I_m = \frac{p_m}{S} = \frac{B_R V}{\mu_0 S} = \frac{B_R}{\mu_0} h. \quad (4)$$

Численный расчет можно провести по любой из приведенных формул

$$I_m = \frac{B_R}{\mu_0} h = \frac{1,6}{4\pi \cdot 10^{-7}} 10 \cdot 10^{-3} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ A}. \quad (5)$$



Поразительно, удивительно, но...

Часть 2. Магнитное поле магнита.

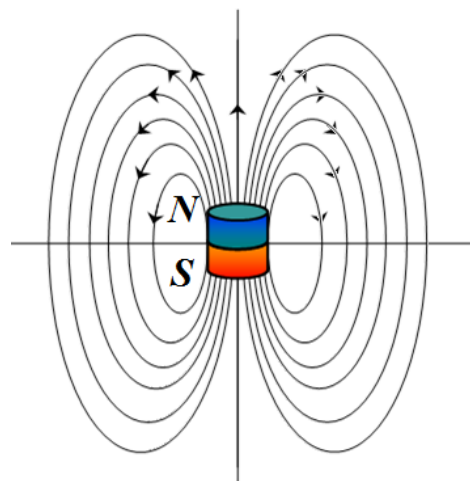
2.1 Требуемые компоненты индукции поля точечного магнитного заряда находятся из формулы «типа Кулона» $B = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2}$ и рисунка:

$$B_z^{(0)}(z, r) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

$$B_r^{(0)}(z, r) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

2.2 Картина силовых линий магнитного диполя (поля линейного магнита, поля кругового тока, поля Земли и т.д.) приводится во всех учебниках физики, начиная с детского сада.

2.3 Для решения данного пункта задачи можно воспользоваться подсказкой, приведенной в условии. Второй подход – используя принцип суперпозиции, записать точное выражение для индукции поля и провести разложение полученного выражения по малому параметру a . Здесь приведено решения по первому, более короткому пути.

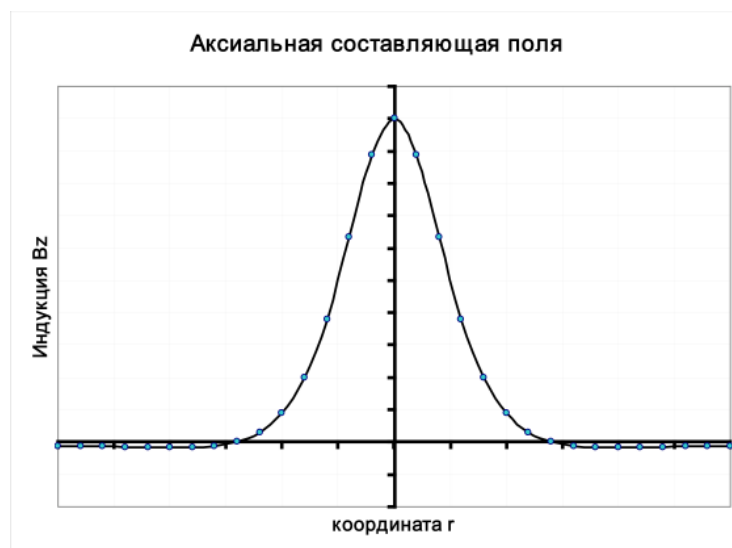


$$B_z(z, r) = B_z^{(0)}(z, r) - B_z^{(0)}(z + a, r) = - (B_z^{(0)}(z, r))'_z \cdot a. \quad (7)$$

Аккуратное вычисление производной от функции (5) приводит к результату:

$$\begin{aligned} B_z(z, r) &= - (B_z^{(0)}(z, r))'_z \cdot a = - \frac{\mu_0 q_m a}{4\pi} \left(\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right)' = \\ &= - \frac{\mu_0 q_m a}{4\pi} \frac{(z^2 + r^2)^{3/2} - z \cdot \frac{3}{2} (z^2 + r^2)^{1/2} \cdot 2z}{(z^2 + r^2)^3} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{2z^2 - r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (8)$$

2.4 Схематический график этой функции можно построить на основе качественного анализа (функция четная, нули функции при $r = \pm\sqrt{2}z$, очевидны участки монотонности, стремление к нулю с отрицательной стороны при $z \rightarrow \pm\infty$). Результат построения показан на рисунке.



Данный график можно построить и на основании анализа картины силовых линий – просто рассматривая знак проекции вектора индукции поля (как показано на следующем рисунке).

2.5 Значения индукции поля на оси можно получить, полагая $r = 0$ в формуле (8):

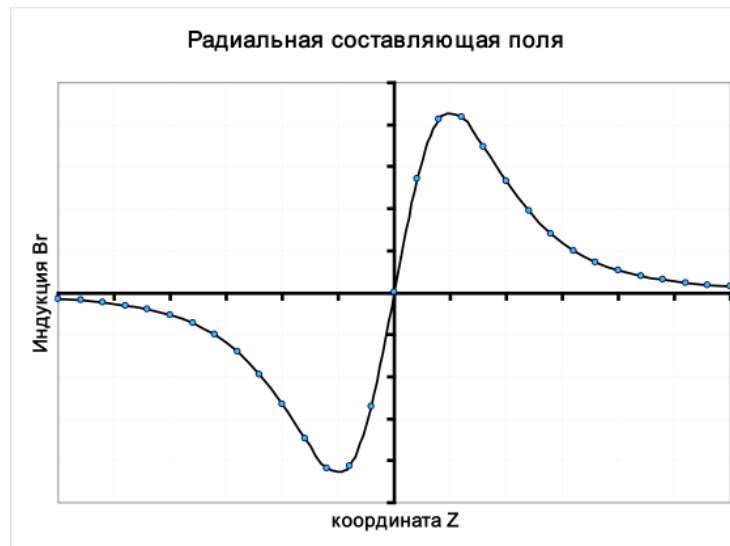
$$B_z(z) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{2z^2 - r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \Big|_{r=0} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3}. \quad (9)$$

2.6 Радиальная компонента поля рассчитывается аналогично (и несколько проще):

$$B_r(z, r) = B_r^{(0)}(z, r) - B_r^{(0)}(z+a, r) = - \left(B_r^{(0)}(z, r) \right)' \cdot a =$$

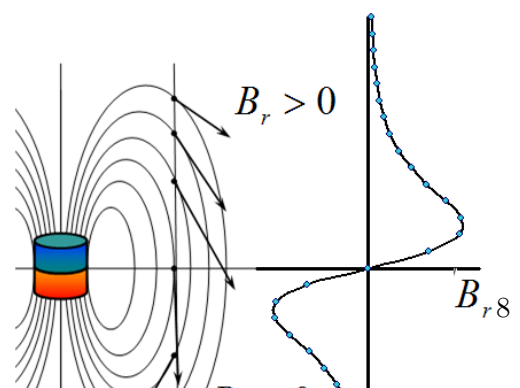
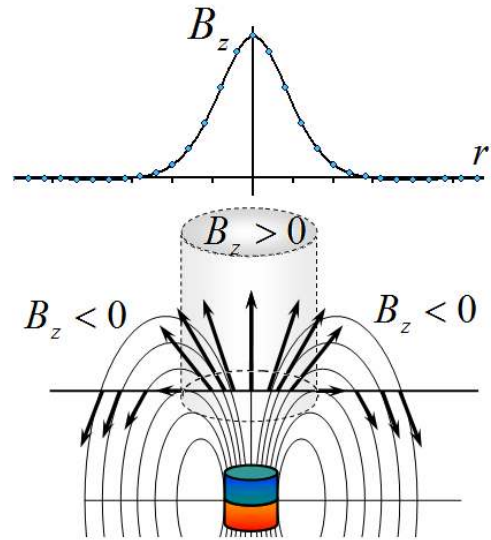
$$= - \frac{\mu_0 q_m a}{4\pi} \cdot \left(\frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right)' = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \cdot \frac{3}{2} \frac{r \cdot 2z}{(z^2 + r^2)^{5/2}} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{3zr}{(z^2 + r^2)^{5/2}}. \quad (10)$$

2.7 График этой функции также строится на основе качественного анализа (функция нечетная: обращается в нуль при $z = 0$; стремиться к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$). Результат – на рисунке.



Схематический график этой зависимости можно также построить на основании анализа картины силовых линий (см. рисунок).

2.8 Поиск экстремумов функции проводится стандартным методом – в точках экстремумов производная функции обращается в нуль. Поэтому вычислим производную от функции (10) и приравняем ее к нулю:



$$\begin{aligned}
(B_r(z, r))'_z &= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} 3r \left(\frac{z}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \right)'_z = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} 3r \frac{(z^2 + r^2)^{5/2} - z^{\frac{5}{2}} (z^2 + r^2)^{3/2} \cdot 2z}{(z^2 + r^2)^5} = \\
&= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} 3r \frac{r^2 - 4z^2}{(z^2 + r^2)^{7/2}} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Из полученного уравнения следует, что положение экстремума $z^* = \pm b = \pm \frac{r}{2}$. Значения функции в экстремуме равно

$$B_{r \max}(z, r) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{3zr}{(z^2 + r^2)^{5/2}} \Big|_{z=\frac{r}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^{5/2} \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{1}{r^3} = C \frac{\mu_0 p_m}{r^3}. \tag{12}$$

Здесь безразмерная константа равна $C = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{4}{5} \right)^{5/3} \approx 0,068$. Таким образом, полный ответ на вопросы данного пункта:

$$b = \frac{r}{2}; \quad B_{r \max} = C \frac{\mu_0 p_m}{r^3}; \quad C = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{4}{5} \right)^{5/3} \approx 0,068. \tag{13}$$

Часть 3. Притяжение и отталкивание.

3.1 Рассмотрим магнитный диполь, находящийся в неоднородном магнитном поле $B(z)$. Ось диполя совпадает с направлением поля (что соответствует условию рассматриваемой задачи). В этом случае суммарная сила, действующая на диполь, равна

$$F = -q_m B(z) + q_m B(z + a). \tag{14}$$

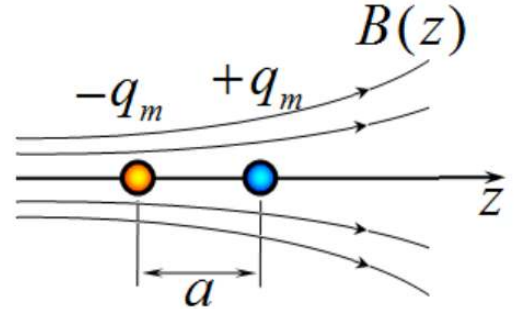
Учитывая малость величины a , это выражение можно преобразовать к виду

$$F = -q_m B(z) + q_m B(z + a) = q_m a \frac{B(z + a) - B(z)}{a} \approx p_m B'(z). \tag{15}$$

где $B'(z)$ - производная от зависимости индукции поля по координате. Зависимость индукции поля на оси от координаты задается формулой (9). Поэтому сила взаимодействия между магнитами равна

$$F = p_m B'(z) = p_m \left(\frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3} \right)' = -\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi z^4}. \tag{15}$$

3.2 При ориентации магнитов, указанной на рис. а), сила магнитного отталкивания уравновешивает силу тяжести:



$$\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi L^4} = mg. \quad (16)$$

Из этого уравнения находим искомое расстояние

$$L = \sqrt[4]{\frac{3\mu_0 p_m^2}{2\pi mg}}. \quad (17)$$

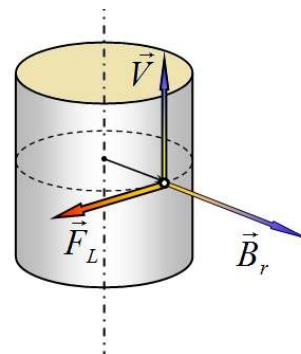
3.3 Реализовать экспериментально можно только вариант, а), так как в этом случае положение равновесия является устойчивым. В случае б) положение равновесия неустойчивое.

3.4 Подстановка ранее найденных численных значений параметров в формулу (17) приводит к результату:

$$L = 3,3 \text{ см}. \quad (17)$$

Часть 4. Магнитная вязкость – токи Фуко.

4.1 При движении магнита в каждой точке стенке трубки изменяется магнитное поле, в следствие чего в ней возникают электрические токи, называемые токи Фуко. Для расчета их характеристики удобно перейти в систему отсчета, связанную с магнитом. В этой системе трубка движется магнитном поле, поэтому источником ЭДС является сила Лоренца, действующая на заряды, которая возникает благодаря радиальной составляющей индукции поля магнита. Сила Лоренца направлена по касательной к поверхности трубки. Величина этой силы равна



$$F_L = qV B_r. \quad (18)$$

Соответственно, ЭДС, возникающая в контуре, охватывающем трубку равна

$$\varepsilon = \frac{1}{q} F_L \cdot 2\pi r_0 = 2\pi r_0 B_r V. \quad (19)$$

Теперь с помощью закона Ома определим силу тока

$$\Delta I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{\rho \frac{2\pi r_0}{\Delta z h_0}} = \frac{2\pi r_0 B_r V}{\rho \frac{2\pi r_0}{\Delta z h_0}} = \frac{B_r V \Delta z h_0}{\rho}. \quad (20)$$

Наконец, воспользуемся рекомендуемым приближением для функциональной зависимости радиальной составляющей поля:

$$\Delta I = \frac{B_{r_{\max}} V \Delta z h_0}{\rho}. \quad (20)$$

4.2 Ток возникает во всех частях трубки, в которых имеется радиальное магнитное поле. В рамках используемого «ступенчатого» приближения радиальная составляющая имеется в полосе шириной 4β . Отметим, что направление тока не существенно, так как мощность выделяющейся теплоты не зависит от направления тока. Поэтому можно записать, что «эффективная» сила тока равна

$$I = \frac{B_{r_{\max}} V h_0}{\rho} \cdot 4b. \quad (21)$$

Мощность теплоты, выделяющейся в трубке, рассчитывается по закону Джоуля – Ленца:

$$P = I^2 R, \quad (22)$$

где $R = \rho \frac{2\pi r_0}{4bh_0}$ - электрическое сопротивление части стенки трубки.

по которой протекает электрический ток. Собирая все промежуточные результаты, получим результат

$$P = \left(\frac{B_{r_{\max}} V h_0}{\rho} \cdot 4b \right)^2 \rho \frac{2\pi r_0}{4bh_0} = \frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r_{\max}}^2 V^2. \quad (23)$$

4.3 Рассчитанную мощность теплоты можно связать с мощностью, развиваемой силой вязкого магнитного трения:

$$P = F \cdot V. \quad (24)$$

С помощью формулы (24) находим явное выражение для этой силы

$$F = \frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r_{\max}}^2 V. \quad (25)$$

4.4 Приравняем найденное значение силы вязкого трения к силе тяжести падающего магнита

$$\frac{8\pi r_0 b h_0}{\rho} B_{r_{\max}}^2 V = mg, \quad (26)$$

Откуда найдем формулу для скорости установившегося движения

$$V = \frac{mg\rho}{8\pi r_0 b h_0 B_{r_{\max}}^2}. \quad (27)$$

4.5 Осталось добросовестно провести численные расчеты: $B_{r_{\max}} = C \frac{\mu_0 p_m}{r_0^3} = 0,45$ Тл;

$$V = \frac{mg\rho}{8\pi r_0 b h_0 B_{r_{\max}}^2} = 3,9 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (28)$$

