

Взаимодействия цилиндрических магнитов

Условие



Задание 2. Взаимодействия цилиндрических магнитов

Описание магнитных полей и магнитных взаимодействий является математически более сложной задачей, чем описание электростатических взаимодействий. Во многом это связано с отсутствием точечных магнитных зарядов, из-за чего простейшим источником магнитного поля является магнитный диполь. Однако, во многих задачах можно формально (но математически корректно) ввести точечные магнитные заряды, не забывая при этом, что реально суще-

ствующие источники магнитного поля имеют нулевой суммарный магнитный заряд. Такой подход используется в данном задании при расчете магнитных полей, создаваемых постоянными магнитами, и характеристик их взаимодействия.

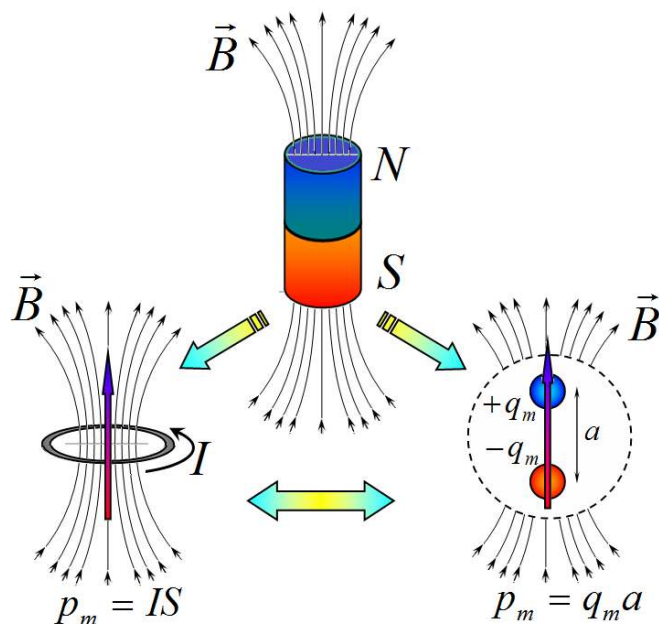
Теоретическое введение.

Согласно современным представлениям магнитное поле постоянных магнитов создается токами намагничивания, протекающими по поверхности намагниченного тела (эта идея первоначально была сформулирована А.М. Ампером и часто называется гипотезой Ампера).

Таким образом, поле небольшого цилиндрического магнита эквивалентно полю кругового тока. В качестве основной характеристики витка с током выступает магнитный момент, который равен

$$p_m = IS, \quad (1)$$

где I - сила тока в контуре, S - площадь этого контура. Альтернативный подход к описанию поля цилиндрического магнита является рассмотрение поля магнитного диполя - частицы, состоящей из двух точечных противоположных магнитных зарядов ($+q_m$ и $-q_m$), находящихся на малом расстоянии a друг от друга. Магнитный момент в этом случае определяется как



$$p_m = q_m a, \quad (2)$$

Отметим, что оба способа описания магнитных полей справедливы для точек, расстояние до которых от источников (магнита, кольца с током, магнитного диполя) значительно больше размеров самих источников. Считайте, что это условие выполняется во всех пунктах данной задачи.

Точечный магнитный заряд q_m создает центральное магнитное поле, модуль вектора индукции которого определяется по закону, аналогичному закону Кулона для электростатических полей

$$B = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2}, \quad (3)$$

здесь R - расстояние от точечного заряда, то точки, в которой рассчитывается поле, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн·м - магнитная постоянная.

На точечный магнитный заряд q_m со стороны магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ действует сила, равная

$$\vec{F} = q_m \vec{B} \quad (3)$$

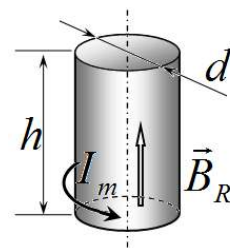
Основной характеристикой постоянных магнитов является остаточная намагниченность M_R , которая определяется как магнитный момент единицы объема $M_R = \frac{p_m}{\Delta V}$.

Эта величина обычно указывается в паспорте магнита. Вместо остаточной намагниченности также приводят величину $B_R = \mu_0 M_R$, которая называется остаточная индукция (т.е. индукция магнитного поля внутри магнита).

Еще раз подчеркнем, в настоящее время магнитных зарядов не обнаружена, поэтому величины магнитных зарядов q_m не должны входить в конечные результаты, которые должны выражаться через реальные характеристики магнитов – их магнитный момент p_m и намагниченность M .

Часть 1. Характеристики магнита.

В данной задаче рассматривается постоянный цилиндрический неодимовый магнит со следующими характеристиками:



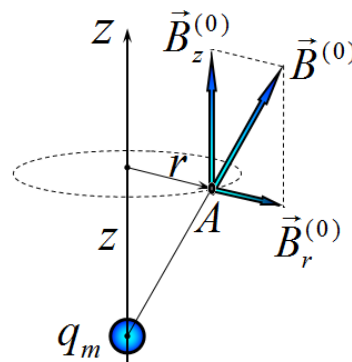
диаметр магнита $d = 4,0$ мм; высота магнита $h = 10,0$ мм; остаточная индукция поля магнита $B_R = 1,4$ Тл и направлена вдоль оси магнита; плотность материала магнита $\rho_{Nd} = 7,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

1.1 Рассчитайте массу магнита m . 1.2 Рассчитайте магнитный момент магнита p_m . 1.3 Рассчитайте силу тока намагничивания, текущего по боковой поверхности магнита I_m .

Часть 2. Магнитное поле магнита.

Рассмотрите магнитное поле, создаваемое точечным магнитным зарядом q_m . Точечный заряд находится в начале отсчета оси z . Положение произвольной точки задается координатой z и расстоянием до этой оси r . В этом случае вектор индукции магнитного поля $\vec{B}^{(0)}$ разумно разложить на две компоненты: осевую $\vec{B}_z^{(0)}$, направленную параллельно оси z ; радиальную $\vec{B}_r^{(0)}$, направленную перпендикулярно оси.

2.1 Запишите формулы для осевой $B_z^{(0)}(z, r)$ и радиальной $B_r^{(0)}(z, r)$ компонент вектора индукции поля точечного заряда, как функции координат точки (z, r) .

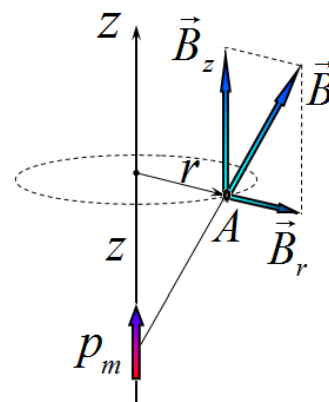


Теперь Вам необходимо рассмотреть магнитное поле, создаваемое описанным цилиндрическим магнитом. Для расчета этого поля можно считать, что оно совпадает с магнитным полем магнитного диполя.

2.2 Нарисуйте схематически картину силовых линий магнитного поля, создаваемого магнитным диполем (цилиндрическим магнитом).

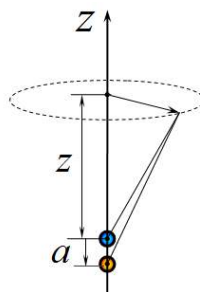
Пусть в начале оси z находится магнитный диполь с магнитным моментом p_m , направленным вдоль оси z . Положение произвольной точки A , как и ранее, задается координатами (z, r) .

2.3 Найдите зависимость осевой компоненты индукции поля магнитного диполя $B_z(z, r)$, от координат точки (z, r) . 2.4 Постройте схематический график зависимости осевой компоненты вектора индукции $B_z(z_0, r)$ от координаты r при некотором фиксированном значении координаты $z_0 > 0$. 2.5 Найдите зависимость индукции поля на оси z в зависимости от координаты z - $B_z(z)$.



2.6 Найдите зависимость радиальной компоненты индукции поля магнитного диполя $B_r(z, r)$, от координат точки (z, r) . 2.7 Постройте схематический график зависимости радиальной компоненты вектора индукции $B_z(z, r_0)$ от координаты z при некотором фиксированном значении координаты $r_0 > 0$. 2.8 Найдите значения модуля координаты $z = b$, при котором модуль функции $B_z(z, r_0)$ принимает максимальные значения $B_{r, \max}$. Найдите, чему равно это максимальное значение.

Примечания.



1. Вы можете построить схематические графики, даже если вам не удалось получить явные функциональные зависимости – это будет оценено! 2. Для облегчения вашей работы дадим математическую подсказку. Если величина a мала, то для расчета поля диполя Вы можете использовать следующее приближение, справедливое для любой функции

$$F(z + a) \approx F(z) + F'_z(z) \cdot a. \quad (4)$$

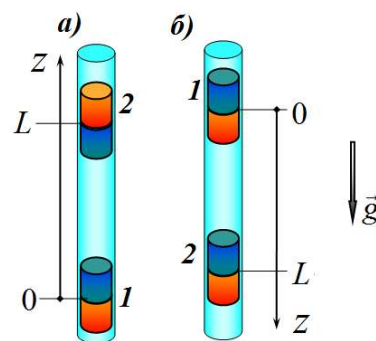
где $F'_z(z)$ - производная функции $F(z)$, вычисленная в точке z . 3. При необходимости Вы можете использовать приближенную формулу

$$(1 + x)^\gamma \approx 1 + \gamma x, \quad (5)$$

справедливую при $x \ll 1$ и любых степенях γ .

Часть 3. Притяжение и отталкивание.

Два одинаковых цилиндрических магнита помещены в вертикальную стеклянную трубку. Магнит 1 закреплен, магнит 2 может свободно двигаться вдоль трубки. Расстояние между магнитами можно считать значительно больше размеров магнитов. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Ответы выразите через магнитный момент магнитов p_m и их массу m .



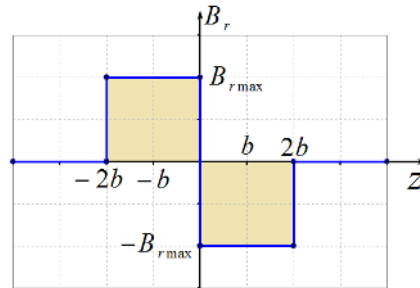
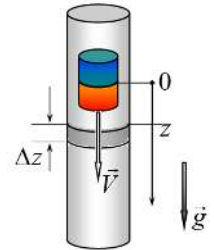
3.1 Найдите зависимость силы магнитного взаимодействия между магнитами, как функцию расстояния z между ними. 3.2 Найдите, при каком расстоянии между магнитами L , магнит 2 может находиться в равновесии. Рассмотрите два случая, а) и б) ориентации магнитов, показанные на рисунке. 3.3 Укажите, какой из экспериментов, а) или б) может быть продемонстрирован экспериментально. Ответ кратко обоснуйте. 3.4 Рассчитайте численное значение равновесного расстояния L , для магнитов, параметры которого приведены в Части 1.

Часть 4. Магнитная вязкость – токи Фуко.

Цилиндрический магнит помещают внутрь длинной вертикаль-

ной тонкостенной алюминиевой трубки. Внутренний радиус трубки равен $r_0 = 3,0$ мм, толщина стенок равна $h_0 = 0,30$ мм. Удельное электрическое сопротивление алюминия равно $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м. По-прежнему, считаем массу магнита m и его магнитный момент p_m известными. Пусть скорость движения магнита постоянна и равна V . Выделим на стенке трубки тонкий слой толщиной Δz , находящийся на расстоянии z от середины магнита. В пп. 4.1 – 4.4 ответы выразите через параметры магнитного поля b и $B_{r\max}$, найденные в п. 2.8.

4.1 Найдите силу индуцированного тока ΔI , протекающего по выделенному кольцу Δz . 4.2 Найдите мощность теплоты, выделяющейся в трубке при движении магнита. 4.3 Найдите силу вязкого магнитного трения, действующую на движущийся магнит. 4.4 Найдите скорость установившегося падения магнита в трубке V . 4.5 Рассчитайте численное значение скорости падения магнита, характеристики которого приведены в Части 1.



Примечание. *Зависимость радиальной составляющей магнитного поля магнита на стенке трубки можно приближенно заменить на ступенчатую функцию, показанную на рисунке. Используйте параметры этой функции b и $B_{r\max}$, найденные в п. 2.8. Если вам не удалось найти ответы в п.2.8, то в данной части считайте их известными.*