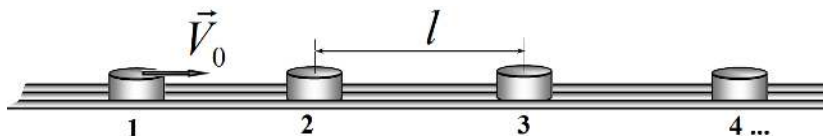


Три цепочки. Задача 1.1

Условие

Задание 1. Три цепочки.



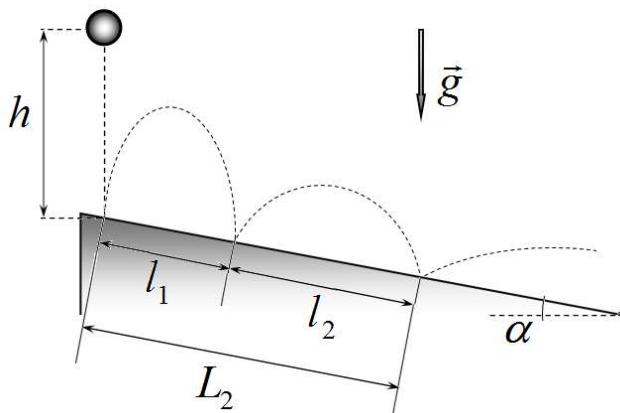
Задача 1.1

В гладком горизонтальном прямом желобе лежат N одинаковых шайб на равных расстояниях l друг от друга. Диаметры шайб значительно меньше расстояния между ними. Первой шайбе толчком сообщают скорость V_0 вдоль желоба. Столкновения между шайбами абсолютно неупругие.

1.1 Рассчитайте, через какое время после толчка сдвинется последняя шайба.

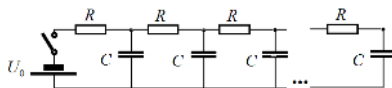
Задача 1.2

Небольшой гладкий шарик падает с высоты h на твердую длинную наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом и абсолютно упруго отражается от нее. Сопротивлением воздуха пренебречь.



1.2.1 Найдите расстояние между точками последовательных столкновений шарика с плоскостью l_k (см. рис.). 1.2.2 Найдите смещение шарика вдоль наклонной плоскости L_k за k пролетов между ударами.

Задача 1.3



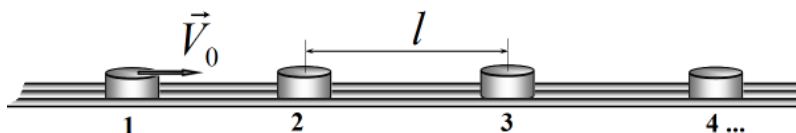
Электрическая цепь, состоящая из N одинаковых звеньев, подключена к источнику постоянного напряжения U_0 .

Сопротивление каждого резистора равно R , емкость каждого конденсатора - C . Конденсаторы не заряжены, ключ замыкают.

1.3.1 Найдите значение силы тока через источник сразу после замыкания цепи. 1.3.2 Найдите, какой суммарный электрический заряд протечет через источник до прекращения тока в цепи.

Решение

Задание 1. Три цепочки.



Задача 1.1

Обозначим скорость шарика номер k сразу после его столкновения - v_k . Из закона сохранения импульса

$$mV_0 = kmv_k, \quad (1)$$

Следует, что она равна

$$v_k = \frac{V_0}{k}. \quad (2)$$

Поэтому время движения k «слипшихся» шаров до очередного столкновения равно

$$\tau_k = \frac{l}{v_k} = k \frac{l}{V_0}. \quad (3)$$

Последняя шайба сдвинется через время T , которой равно сумме времен

$$T = \sum_{k=1}^{N-1} \tau_k = \frac{l}{V_0} \sum_{k=1}^{N-1} k. \quad (4)$$

Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, получаем нужный результат

$$T = \frac{N(N-1)}{2} \frac{l}{V_0}. \quad (5)$$

Задача 1.2

Движение шарика в данной задаче удобно рассматривать в системе координат, связанной с наклонной плоскостью. Направим ось x вдоль наклонной плоскости, а ось y перпендикулярно к ней. Начало отсчета совместим с точкой первого удара. В этой системе проекции ускорения на оси координат равны

$$\begin{cases} a_x = g \sin \alpha \\ a_y = -g \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

А проекции начальной скорости после первого удара (с учетом абсолютной упругости) описываются формулами

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \sin \alpha \\ v_{0y} = v_0 \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

где

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

модуль скорости шарика после первого удара. Так как в моменты ударов силы направлены перпендикулярно плоскости, то проекция скорости на ось x изменяться во время ударов изменяться не будет. Следовательно, движение в проекции на ось x будет равноускоренным:

$$x = v_0 t \sin \alpha + \frac{g \sin \alpha}{2} t^2. \quad (4)$$

Запишем закон движения шарика вдоль оси y после первого столкновения:

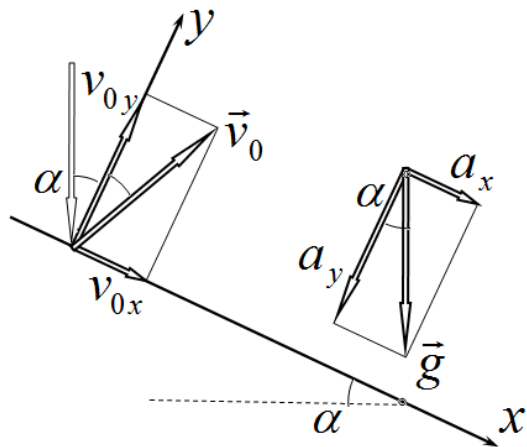
$$y = v_0 t \cos \alpha - \frac{g \cos \alpha}{2} t^2 \quad (5)$$

Из этого выражения следует, что второй удар произойдет через время τ , равное

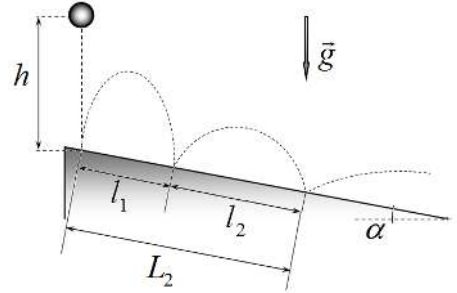
$$v_0 \tau \cos \alpha - \frac{g \cos \alpha}{2} \tau^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2v_0}{g} \quad (6)$$

Проекция скорости v_y в этот момент времени будет равна

$$v_{y1} = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \tau = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \frac{2v_0}{g} = -v_0 \cos \alpha \quad (7)$$



Таким образом, после второго отскока проекция скорости v_y останется такой же, как и после первого отскока, следовательно, после каждого столкновения эта проекция остается неизменной. Отсюда следует важный вывод – время между последовательными ударами постоянно и определяется формулой (5)! Поэтому проще сначала найти ответ на второй вопрос задачи, а затем на первый.



1.2.2 Время k пролетов равно

$$t_k = k\tau = k \frac{2v_0}{g} \quad (8)$$

Координата x (равная искомой величине L_k) задается законом движения (4):

$$L_k = v_0(k\tau) \sin \alpha + \frac{g \sin \alpha}{2} (k\tau)^2 = k(k+1) \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \quad (9)$$

С учетом формулы для начальной скорости (3), получаем

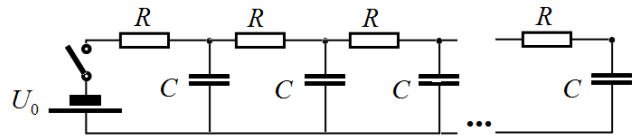
$$L_k = 4k(k+1)h \sin \alpha \quad (10)$$

1.2.1 Расстояния между последовательными ударами рассчитываются по формуле

$$l_k = L_k - L_{k-1} = 8kh \sin \alpha \quad (11)$$

Задача 1.3

1.3.1 Если конденсатор не заряжен, то напряжение на нем равно нулю, поэтому он является проводником. Следовательно, в момент замыкания цепи ток пойдет только через первый резистор, поэтому его сила равна



$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (1)$$

1.3.2 Когда конденсаторы зарядятся, ток в цепи прекратится. В этом случае напряжения на резисторах станут равными нулю (т.е. их можно считать проводниками). В этом случае напряжение на всех конденсаторах станет равным напряжению источника. Поэтому суммарный заряд цепи станет равным

$$q = N \frac{U}{C} \quad (2)$$