# Республиканская физическая олимпиада 2024 года

**(Заключительный этап)**

## Теоретический тур

# *Решения задач*
# *9 класс*
## *(для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

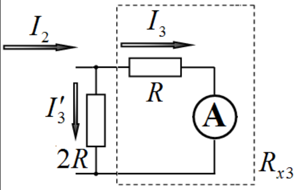
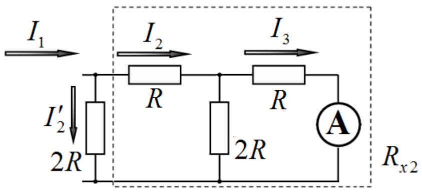
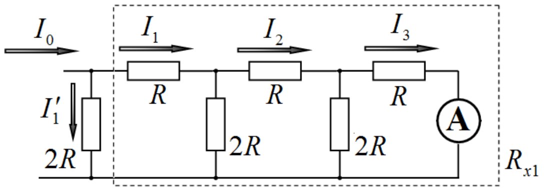
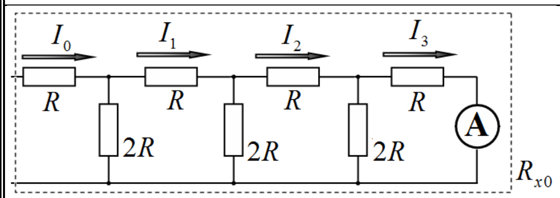

***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!***

# Задание 1. Как Уильям Томсон стал лордом Кельвином (Решение)

**Задача 1.**

**1.1** Расчет характеристик приведенной цепи традиционен и основан на законах параллельного и последовательного соединения проводников. Результаты расчетов приведены в Таблице 1.

**Таблица 1.**

| Схема | Сопротивление | Силы токов | |
|---|---|---|---|
|  | $R_{x3} = R$ | $I_3' = I_3 \frac{R_{x3}}{2R} = \frac{1}{2} I_3$ | $I_2 = I_3 + I_3' = \frac{3}{2} I_3$ |
|  | $R_{x2} = R + \frac{2R \cdot R_{x3}}{2R + R_{x3}} = \frac{5}{3} R$ | $I_2' = I_2 \frac{R_{x2}}{2R} = \frac{5}{4} I_3$ | $I_1 = I_2 + I_2' = \frac{11}{4} I_3$ |
|  | $R_{x1} = R + \frac{2R \cdot R_{x2}}{2R + R_{x2}} = \frac{21}{11} R$ | $I_1' = I_1 \frac{R_{x1}}{2R} = \frac{21}{8} I_3$ | $I_0 = I_1 + I_1' = \frac{43}{8} I_3$ |
|  | $R_{x0} = R + \frac{2R \cdot R_{x1}}{2R + R_{x1}} = \frac{85}{43} R$ | | |

**1.2** Сила тока $I_0$ определяется по закону Ома (сопротивление всей цепи есть $R_{x0}$):

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{x0}} = \frac{43}{85} \frac{U_0}{R}. \tag{1}$$

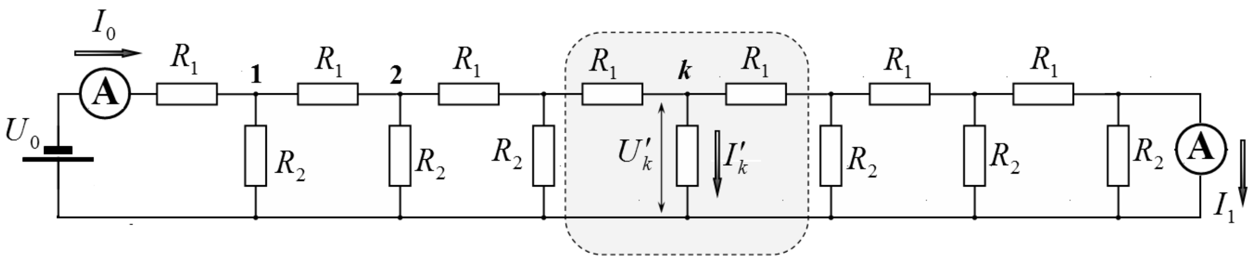
В Таблице получена связь между токами, из которой следует

$$I_0 = \frac{43}{8} I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{8}{43} I_0 = \frac{8}{85} \frac{U_0}{R}. \tag{2}$$

**1.3** Требуемые отношения сил токов равны

$$\frac{I_1}{I_0}=\frac{11}{4}\frac{8}{43}=\frac{22}{43}\approx 0{,}51 \qquad \frac{I_2}{I_1}=\frac{3}{2}\frac{4}{11}=\frac{6}{11}\approx 0{,}55 \tag{3}$$

**Задача 2.**




**2.1** В условии исходные данные заданы с двумя значащими цифрами, поэтому с такой же точностью следует проводить расчет цепи. Сопротивления $R_2$ в тысячу раз меньше сопротивлений $R_1$. Поэтому силы токов через резисторы $R_2$ более чем в 100 раз меньше, чем силы токов через резисторы $R_1$. Следовательно, с приемлемой погрешностью при расчете сил токов $I_0$ и $I_1$ токами через резисторы $R_2$ можно пренебречь. Поэтому эти силы токов равны

$$I_0 \approx I_1 = \frac{U_0}{7R_1} = 1{,}0\ A. \tag{4}$$

**2.2** Разность сил токов $\Delta I = (I_0 - I_1)$ равна сумме сил токов «утечки» через резисторы $R_2$. Выберем произвольный резистор, номер которого обозначим $k\ (k = 1,2,\ldots 7)$. В рамках использованного приближения, напряжение на этом резисторе равно

$$U'_k = U_0 - I_0 R_1 k = \frac{U_0}{7}(7-k). \tag{5}$$

Поэтому сила тока через этот резистор равна

$$I'_k = \frac{U'_k}{R_2} = \frac{U_0}{7R_2}(7-k). \tag{6}$$

Осталось просуммировать эти силы токов:

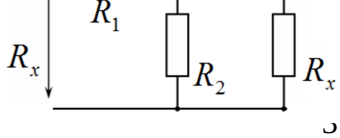
$$\Delta I = (I_0 - I_1) = \sum_{k=1}^{7} I'_k = \sum_{k=1}^{7} \frac{U_0}{7R_2}(7-k) \tag{7}$$

Элементарный расчет приводит к результату

$$\Delta I = \frac{U_0}{3R_2} = 0{,}33 мА \tag{8}$$

**Задача 3.**

**3.1** Расчет сопротивления бесконечной цепочки достаточно известен. Обозначим это сопротивление $R_x$. Если от бесконечной цепочки мысленно отключить первое звено, то сопротивление оставшейся цепочки также будет равно $R_x$. Это позволяет построить эквивалентную



схему цепочки. Запишем теперь выражение для сопротивления всей цепочки

$$R_x = R_1 + \frac{R_x R_2}{R_x + R_2}. \qquad (9)$$

Это выражение следует рассматривать как квадратное уравнение для нахождения неизвестного сопротивления $R_x$:

$$R_x^2 - R_x R_1 - R_1 R_2 = 0. \qquad (10)$$

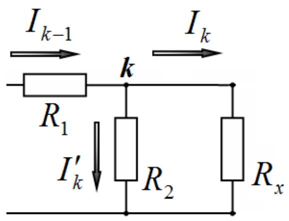
Положительный корень этого уравнения определяется по формуле (отрицательное сопротивления физического смысла не имеет):

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}. \qquad (11)$$

При $R_1 = R_0$, $R_2 = 2R_0$ сопротивление цепочки оказывается равным:

$$\boxed{R_x = 2R_0. \qquad (12)}$$

**3.2** Рассмотрим произвольное звено бесконечной цепочки, схема которого и направления сил токов показаны на рисунке. Для этих сил токов можно записать два равенства




$$\begin{aligned} I_{k-1} &= I_k + I'_k \\ I_k R_x &= I'_k R_2 \end{aligned} \qquad (13)$$

Из этих выражений следует, что

$$I_k = \frac{I_{k-1}}{1 + \frac{R_x}{R_2}} \qquad (13)$$

Это рекуррентное соотношение определяет геометрическую прогрессию для последовательности значений сил токов. В явном виде можно записать формулу для геометрической прогрессии

$$\boxed{I_k = \gamma^k I_0. \qquad (14)}$$

где

$$\gamma = \left(1 + \frac{R_x}{R_2}\right)^{-1}, \quad I_0 = \frac{U_0}{R_x}. \qquad (15)$$

**3.3** Подстановка параметров цепи в эти формулы дает $\gamma = \frac{1}{2}$, $I_0 = \frac{U_0}{2R_0}$. Тогда значения всех сил токов описываются формулой

$$\boxed{I_k = \frac{U_0}{2R_0} \cdot 2^{-k}. \qquad (16)}$$

Иными словами, после каждого звена сила тока уменьшается в два раза.

**3.4** При условии $R_2 >> R_1$ в формуле (11) надо оставить только самое большое слагаемое, которое определяет сопротивление всей цепи

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2} \approx \sqrt{R_1R_2}\,. \tag{17}$$

**3.5** В этом случае значения сил токов также образуют геометрическую прогрессию Знаменатель этой прогрессии и сила тока в цепи равны

$$\gamma = \left(1 + \frac{R_x}{R_2}\right)^{-1} = \left(1 + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^{-1} \approx \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right). \qquad I_k = \frac{U_0}{\sqrt{R_1R_2}} \tag{18}$$

Тогда явный вид формулы для значений сил токов записывается в виде:

$$\boxed{I_k = \frac{U_0}{\sqrt{R_1R_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^k.} \tag{19}$$

**Задача 4**

**4.1** Сопротивление медной жилы длиной $\Delta l$ рассчитывается по формуле

$$R_1 = \rho_1 \frac{4\Delta l}{\pi d_0^2}\,. \tag{20}$$

Подставив численные значения, получим (все величины в системе СИ):

$$\boxed{R_1 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\, \frac{4 \cdot 10^4}{\pi \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 0{,}54\ Ом.} \tag{21}$$

Сопротивление всего кабеля

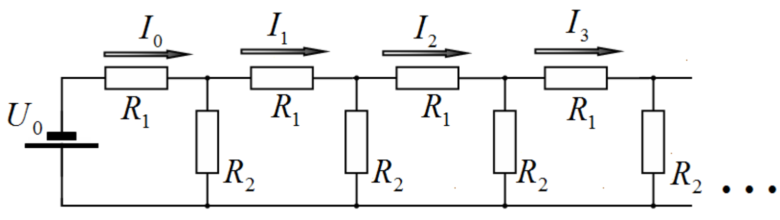
$$\boxed{R_{1\Sigma} = R_1 \frac{L}{\Delta l} = 0{,}54 \frac{5000}{10} = 270\ Ом\,.} \tag{22}$$

**4.2** Ток через изоляцию протекает перпендикулярно оси кабеля, поэтому ее сопротивление равно

$$\boxed{R_2 = \rho_2 \frac{h}{\pi\left(d + \frac{h}{2}\right)\Delta l} = 1{,}7 \cdot 10^{10}\, \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4} = 1{,}1 \cdot 10^5 Ом\,.} \tag{23}$$

Толщина изоляции сравнима с диаметром жилы, поэтому площадь поперечного сечения увеличивается по мере удаления от жилы. Поэтому в качестве разумного приближения взято сечении на половине слоя изоляции.

**4.3** Не смотря на то, что кабель представляет непрерывную систему, можно разбить ее на отдельные куски некоторой длины



$\Delta l$ (например 10 км). В этом случае эквивалентной схемой является бесконечная цепочка, рассмотренная в задаче 3.

**4.4** Для расчета отношения сил токов на выходе и входе следует воспользоваться формулой (19)

$$I_1 = I_0\left(1-\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^N. \qquad (24)$$

Здесь $N = \frac{L}{\Delta l}$. Выразим отношение сопротивлений, входящих в эту формулу

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{4\Delta l}{\pi d_0^2}\cdot\frac{\pi\left(d_0+\frac{h}{2}\right)\Delta l}{h}} = \alpha\Delta l. \qquad (25)$$

Введенная здесь постоянная величина, равна

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{4\left(d_0+\frac{h}{2}\right)}{d_0^2 h}} = 5{,}0\cdot 10^{-7}\,м^{-1}. \qquad (26)$$

Теперь можно переписать формулу (24) в виде

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(1-\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^N = \left(1-\alpha\Delta l\right)^{\frac{L}{\Delta l}}. \qquad (27)$$

Можно убедиться в том, что при $\alpha\Delta l << 1$ результаты расчетов практически не зависят от искусственно выбранного значения $\Delta l$.
Так при $\Delta l = 10км$ получаем

$$\boxed{\frac{I_1}{I_0} = \left(1-\alpha\Delta l\right)^{\frac{L}{\Delta l}} = \left(1-5{,}0\cdot 10^{-7}\cdot 10^4\right)^{500} = 0{,}082} \qquad (28)$$

т.е. сила тока уменьшилась примерно в 20 раз. Понятно, что не утечка тока являлась основной причиной неработоспособности трансатлантического кабеля!

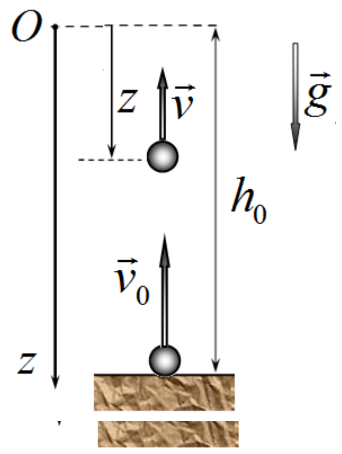
*Дополнение (от участников олимпиады не требуется). Строго говоря, в формуле (27) необходимо устремить* $\Delta l \to 0$. *В этом случае*

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(1-\alpha\Delta l\right)^{\frac{L}{\Delta l}} = \exp(-\alpha L) = 0{,}082,$$

*что совпадает с ранее полученным результатом.*

*Также можно указать смысл постоянной* $\alpha$*: обратная ей величина* $\frac{1}{\alpha} \approx 2000\,км$ *есть расстояние на котором сила тока в кабеле убывает в* $e \approx 2{,}7$ *раз.*

## Задание 2. Вытекание (решение).




### Часть 1. Бросок

Шарик движется равноускоренно с ускорением свободного падения $\vec{g}$, направленным вертикально вниз. Если высота подъема шарика равна $h$, то введенная координата шарика равна

$$z = h_0 - h. \tag{1}$$

**1.1** Максимальную высоту подъема проще всего выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_0 \tag{2}$$

Из этой формулы получаем:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{3}$$

**1.2** Проекции ускорения и начальной скорости на введенную ось $z$ равны

$$a_z = +g$$
$$v_{0z} = -v_0 \tag{4}$$

**1.3** Зависимость скорости шарика от его координаты легко выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh. \tag{5}$$

Из которого следует (с учетом знака проекции), что

$$v_z(z) = -\sqrt{2g(h_0 - h)} = -\sqrt{2gz}. \tag{6}$$

**1.4** Из формулы (5) выразим

$$mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad h = h_0 - \frac{v^2}{2g} \tag{7}$$

Так как движение шарика является равноускоренным, то зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v = v_0 - gt. \tag{8}$$

Поэтому зависимость координаты $z(t)$ имеет вид

$$z(t) = h_0 - h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(v_0 - gt)^2}{2g}. \tag{9}$$

*<u>Примечание.</u> Все формулы этой части могут быть получены чисто «кинематически», используя законы равноускоренного движения. При таком подходе проще всего использовать известную формулу*

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

**1.5** График функции (9) показан на рисунке

Кривая является параболой.
На графике обозначено
$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ - начальная и конечная координата шарика;
$\tau = \frac{v_0}{g}$ - время подъема шарика.


**1.6** Значения показателей степеней могут легко быть найдены, используя метод размерностей

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}. \qquad (10)}$$

То есть формула для искомого времени имеет вид

$$\tau_{0,5} = C\sqrt{\frac{h_0}{g}}. \qquad (11)$$

**1.7** Для расчета значения коэффициента $C$ подставим выражение (11) для времени и формулу $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ для начальной скорости в уравнение (9):

$$z = \frac{(v_0 - gt)^2}{2g} \Rightarrow 2g\frac{h_0}{2} = \left(\sqrt{2gh_0} - gC\sqrt{\frac{h_0}{g}}\right)^2 \Rightarrow 1 = \left(\sqrt{2} - C\right)^2 \qquad (12)$$

Из этого уравнения находим два возможных значения коэффициента $C$:

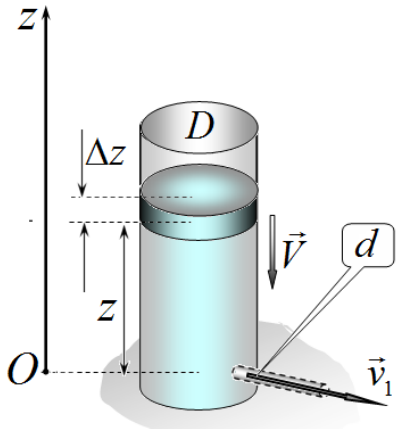
$$C_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1 \qquad (13)$$

Два корня имеют физический смысл: шарик находится на половине высоты дважды – при подъеме и при спуске. По смыслу задачи необходимо выбрать меньший корень, поэтому

$$\boxed{C = \sqrt{2} - 1 \qquad (14)}$$

*Примечание. Результаты могут быть получены и с помощью непосредственного решения уравнения (9) без перехода к безразмерным параметрам.*

**Часть 2. Дырявый сосуд**




**2.1** Рассмотрим процесс вытекания за малый промежуток времени $\Delta t$. Пусть за это время уровень воды в сосуде изменился от $z$ до $z - \Delta z$. Поэтому потенциальная энергия воды в сосуде уменьшилась на величину

$$\Delta U = \Delta mgz \qquad (15)$$

где $\Delta m$ - масса воды, вытекшей из сосуда за рассматриваемый промежуток времени. Такая же масса воды протекла через отверстие, унося кинетическую энергию

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m v_1^2}{2}. \qquad (16)$$

Так как площадь поперечного сечения сосуда значительно больше диаметра отверстия, то кинетической энергией воды, находящейся в сосуде, можно пренебречь. На основании закона сохранения механической энергии можно записать

$$\frac{\Delta m v_1^2}{2} = \Delta mgz. \qquad (17)$$

Откуда следует, что скорость вытекания воды из отверстия равна

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2gz}\,. \qquad (18)}$$

**2.2** Изменение объема воды в сосуде равно объему вытекшей воды, поэтому

$$SV\Delta t = s_1 v_1 \Delta t\,, \qquad (19)$$

где $S$, $s_1$ площади поперечного сечения сосуда и отверстия, соответственно.
Из формулы (19) следует, что

$$V = \frac{s_1}{S} v_1. \qquad (20)$$

Учитывая, что отношение площадей равно квадрату отношения диаметров, используя формулу (18) получим зависимость скорости опускания от высоты

$$V(z) = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_1 = \eta^2 \sqrt{2gz}\,. \qquad (21)$$

С учетом направления оси $z$, запишем искомую зависимость проекции этой скорости от высоты

$$\boxed{V_z(z) = -\sqrt{2\left(\eta^4 g\right)z}\,. \qquad (21)}$$

**2.3** Функция (21) полностью аналогична зависимости (6), полученной для равноускоренного движения шарика в поле тяжести земли, если заменить величину $g$ на модифицированное значение $\eta^4 g$. Кроме того, для этих зависимостей одинаковы начальные условия (при $t = 0$ $z = h_0$), поэтому законы движения также полностью аналогичны! Следовательно, далее можно использовать все формулы, полученные для движения шарика (не забывая в них изменить значение ускорения).
Так ускорение уровня воды равно

$$\boxed{a_z = +\eta^4 g\,. \qquad (22)}$$

**2.4** С помощью найденной аналогии на основании формулы (9) запишем закон движение границы

$$z(t) = \frac{\left(V_0 - \eta^4 g t\right)^2}{2\eta^4 g}. \qquad (23)$$

Начальная скорость движения определяется формулой (21), поэтому закон движения уровня воды имеет вид

$$\boxed{z(t) = \frac{\left(\sqrt{2\eta^4 g h_0} - \eta^4 g t\right)^2}{2\eta^4 g}. \qquad (23)}$$

**2.5** Время «полувытекания» найдем с помощью формулы (11) и найденным значением коэффициента (14)

$$\tau_{0,5} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{h_0}{\eta^4 g}}. \qquad (24)$$

**2.6** подстановка численных значений приводит к результату

$$\boxed{\tau_{0,5} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{h_0}{\eta^4 g}} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\cdot 20^2\sqrt{\frac{0{,}20}{10}} \approx 23c. \qquad (25)}$$

## Задание 3. Теплокровный сферический кот (Решение)

### Часть 1. Постоянное тепловыделение.

Основная идея расчета установившейся температуры – выполнение уравнения теплового баланса, когда мощность выделяющейся теплоты равна мощности теплоты. уходящей в окружающую среду

$$W = q\,. \tag{1}$$

В рассматриваемой в части 1 модели это уравнение имеет вид

$$wV = \beta S(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad w\frac{4}{3}\pi R^3 = \beta \cdot 4\pi R^2 (t - t_0). \tag{2}$$

Это уравнение перепишем в виде

$$t - t_0 = \frac{wR}{\beta}\,. \tag{3}$$

**1.1** Из уравнения (3) следует, что разность между установившейся температурой и температурой окружающей среды пропорциональная радиусу тела. Следовательно, температура котенка будет меньше. Запишем уравнение (1) для кота и для котенка

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \frac{wR_0}{\beta} \\ t_2 - t_0 &= \frac{wR_0}{2\beta} \end{aligned}\,. \tag{4}$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2}\,. \tag{5}$$

Подстановка численных значений дает следующий результат:

$$\boxed{t_1 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} = 28^\circ.} \tag{6}$$

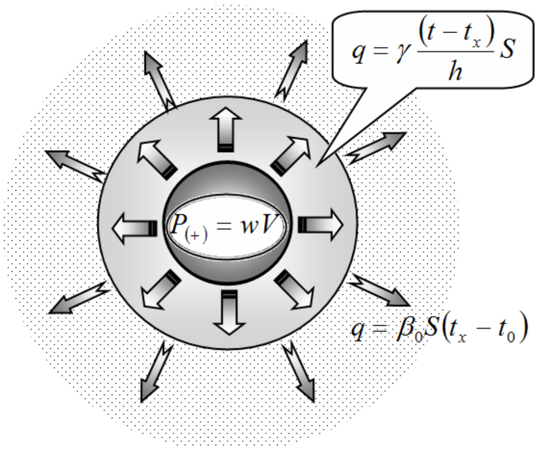
**1.2.1** Запишем уравнения баланса (3) для голого и для одетого котенка

$$\begin{aligned} t_2 - t_0 &= \frac{wR_0}{2\beta_0} \\ t_3 - t_0 &= \frac{wR_0}{2\dfrac{\beta_0}{2}} = \frac{wR_0}{\beta_0} \end{aligned}\,. \tag{7}$$

Из этих уравнений следует, что температура одетого котенка станет равной температуре голого кота

$$\boxed{t_3 = t_1 = 36^\circ} \tag{8}$$

**1.2.2** В данном случае можно записать «двойного» уравнения баланса: мощность выделяющейся теплоты равна мощности теплоты, проходящей через слой одежды, и равна мощности теплоты уходящей в окружающую среду.




$$wV = \gamma \frac{t - t_x}{h} S = \beta(t_x - t_0)S. \qquad (9)$$

Здесь $t_x$ - температура внешней поверхности одежды. Из второй части равенства (9) выразим значение $t_x$

$$\gamma \frac{t - t_x}{h} S = \beta(t_x - t_0)S \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{at + t_0}{a + 1}. \qquad (10)$$

где обозначено $a = \frac{\gamma}{h\beta_0}$. Теперь поток в окружающую среду можно представить в виде:

$$\beta_0(t_x - t_0)S = \beta\left(\frac{at + t_0}{a + 1} - t_0\right)S = \beta \frac{a}{a + 1} S(t - t_0) \qquad (11)$$

Таким образом, мощность потока теплоты от тела кота в окружающую среду пропорционален разности их температур. Полученное выражение формально совпадает с формулой (2), приведенной в условии задачи.

**1.2.3** «Новый» коэффициент пропорциональности, как следует из формулы (11), равен

$$\boxed{\alpha_1 = \beta S \frac{a}{a + 1} = \alpha_0 \frac{\gamma}{\gamma + h\beta_0}.} \qquad (12)$$

Из этого выражения следует, что при увеличении толщины слоя одежды коэффициент теплопередачи уменьшается, поэтому согласно уравнению (3) температура тела увеличивается.

Отметим, что при больших значениях теплопроводности коэффициент теплопередачи остается неизменным и равным $\alpha_0$. При малой теплопроводности коэффициент теплопередачи полностью определяется теплопроводностью одежды: $\alpha_1 \approx \frac{\gamma}{h} S$.

**Часть 2. «Живая» модель**

Основной идеей решения этой части также является уравнение теплового баланса, которое в данной модели имеет вид

$$A(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = \alpha_0(t - t_0), \qquad (13)$$

которое является квадратным уравнением, поэтому при известных коэффициентах может быть решено аналитически.

**2.1** Как оговорено в условии. при оптимальной температуре мощность тепловыделения максимальна. Зависимость $W(t) = A(t - t_{\min})(t_{\max} - t)$ является квадратичной. Значения нулей этой функции очевидны: это $t_{\min}$ и $t_{\max}$. как известно, вершина параболы находится на середине отрезка между корнями. Следовательно, оптимальная температура кота равна

$$t_{opt} = \frac{1}{2}\left(t_{\min} + t_{\max}\right) = 40^\circ . \qquad (14)$$

**2.2** В уравнении теплового баланса (13) входят две неизвестных константы – коэффициенты пропорциональности $A$ и $\alpha_0$. Но это уравнение можно переписать следующим образом

$$\bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = (t - t_0) \qquad (15)$$

В этом уравнении одна неизвестная постоянная величина $\bar{A} = \frac{A}{\alpha_0}$, которая может быть найдена из заданного значения $t_0^* = 20^\circ$. Поэтому коэффициента теплоотдачи и служит нормировочной постоянной. Поэтому

$$C = \alpha_0; \quad \bar{W} = \bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t); \quad \bar{q} = t - t_0 . \qquad (16)$$

Нормировочная постоянная $C$ (она же $\alpha_0$) равна мощности теплоты, уходящей в окружающую среду, пир разности температур поверхности и воздуха равной $1^\circ$. Отметим, что нормированные мощности измеряются в градусах Цельсия!

В нормированных функциях мощностей имеется только один параметр $\bar{A}$, который рассчитывается по дополнительному условию: при $t_0^* = 20^\circ$ температура кота оптимальна $t_{opt}$. Тогда из уравнения (15) находим:

$$\bar{A} = \frac{t_{opt} - t_0^*}{\left(t_{opt} - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t_{opt}\right)} = 0{,}20\frac{1}{^\circ C} . \qquad (17)$$

**2.3** Построение начнем с примитивного графика функции $\bar{q}(t) = t - t_0$. График – прямая линия с коэффициентом наклона равным единице, и пересекающая ось температур в точке $t_0$.

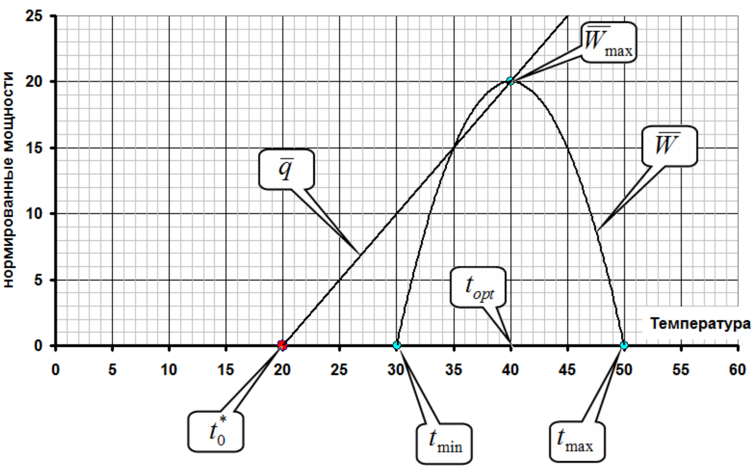



График функции $\bar{W}(t) = \bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t)$; является параболой, ветви которой направлены вниз. Нули и положение вершины этой функции были «найдены» ранее. Максимальное значение функции $\bar{W}(t)$ можно рассчитать, подставив значение $t = t_{opt}$ : $\bar{W}(t) = \bar{A}\left(t_{opt} - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t_{opt}\right) = 20^\circ$.

*Заметим, что это значение можно определить и по функции* $\bar{q}(t)$. *Эта прямая проходит через вершину параболы. Точка пересечения прямой с осью температур отстоит от температуры вершины параболы на* $20^\circ$. *Так как наклон прямой равен 1, то значение мощности в точке пересечения с параболой тоже равно* $20^\circ$.

Так как авторы заданий любезно разрешили проводить промежуточные расчеты, то запишем уравнение теплового баланса «в числах».

$$\overline{A}(t-t_{\min})(t_{\max}-t)=(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}(t-30)(50-t)=t-t_0$$

Здесь мы записали значение $\overline{A}=0{,}20=\dfrac{1}{5}$. После приведения подобных членов, получим

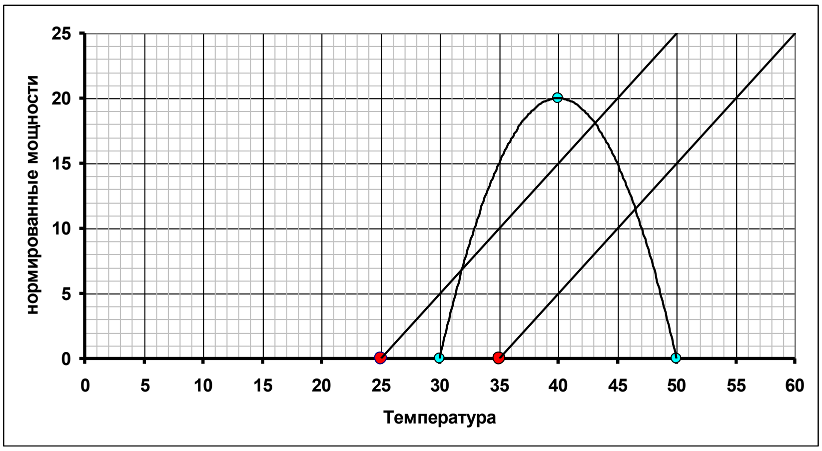
$$t^2-75t+(150-5t_0)=0 \qquad (18)$$

**2.4** Для расчета установившейся температуры, надо решить квадратное уравнение (18) при нужном значении температуры воздуха. Так при $t_0=35°$ это уравнение имеет два корня

$t_{(1)}=28{,}5°$

$t_{(2)}=46{,}5°$

Первый корень надо отбросить, так как он выходит за пределы диапазона жизнедеятельности.




При $t_0=25°$ корнями уравнения (18) являются

$t_{(1)}=32°$

$t_{(2)}=43°$.

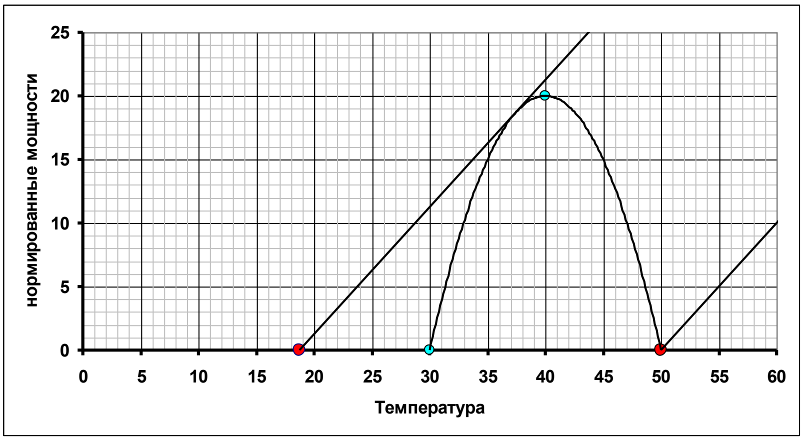
Чтобы понять смысл двух корней дадим графическую иллюстрацию этих решений. На графике «видны» корни уравнения как точки пересечения прямых с параболой. Но эти корни являются точками равновесия, которое может быть, как устойчивым, так и неустойчивым! Легко показать, что только больший корень $t_{(2)}$ (на ниспадающей ветви параболы) является устойчивым. Действительно, при температуре большей $t_{(2)}$ мощность потерь превысит мощность тепловыделения, поэтому кот начнет остывать. Если температура станет меньше значения $t_{(2)}$ ситуация обратная: мощность тепловыделения превышает мощность потерь, поэтому температура будет повышаться. Аналогичные рассуждения приводят к выводы, что меньший корень неустойчив, поэтому это значение температуры реализовываться не будет.

Таким образом, установившиеся температуры равны:

при $t_0=35°$: $t=46{,}5°$.

при $t_0=25°$: $t=43°$. (19)

**2.5** Чтобы найти допустимый диапазон температур воздуха, мысленно построим на графике мощностей тепловыделения и теплопотерь несколько прямых графиков $\overline{q}(t)$ при различных значениях температуры воздуха $t_0$. Кот сможет жить при температуре воздуха $t_0$, если соответствующая прямая пересекается с параболой $\overline{W}(t)$. На рисунке показаны «крайние»



прямые. Не сложно заметить, что максимальная температура воздуха равна

$$t_{0\max} = t_{\max} = 50^\circ . \quad (20)$$

Минимальной температуре воздуха соответствует прямая, которая является касательной к параболе. Теперь заметим, что в этом случае уравнение баланса (18) имеет единственный корень, при этом дискриминант уравнения обращается в нуль! Записываем значения дискриминанта и приравниваем его к нулю

.
$$D = \left(\frac{75}{2}\right)^2 - \left(1500 - 5t_0\right) = 0 \quad (21)$$

Из этого условия находим минимальную температуру воздуха, при которой кот выживает:

$$t_{0\min} \approx 19^\circ . \quad (22)$$

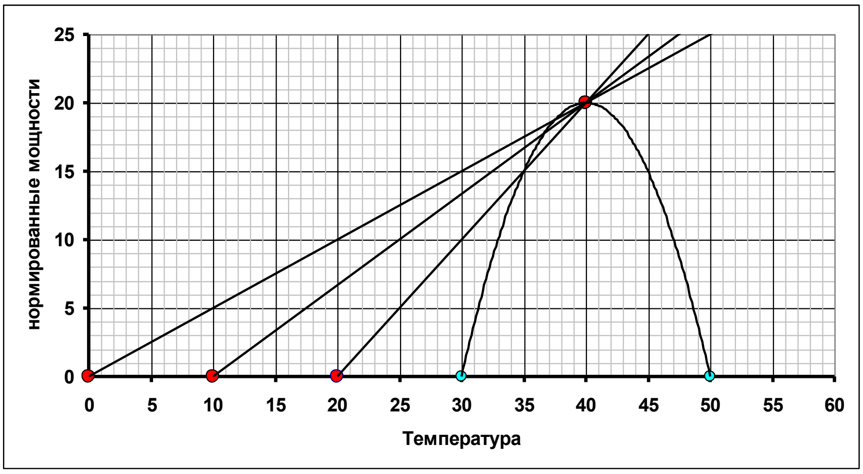
**2.6** Уравнение теплового баланса с изменяющимся коэффициентом теплоотдачи в нормированном виде имеет вид

$$\overline{A}\left(t - t_{\min}\right)\left(t_{\max} - t\right) = \frac{\alpha}{\alpha_0}\left(t - t_0\right). \quad (23)$$

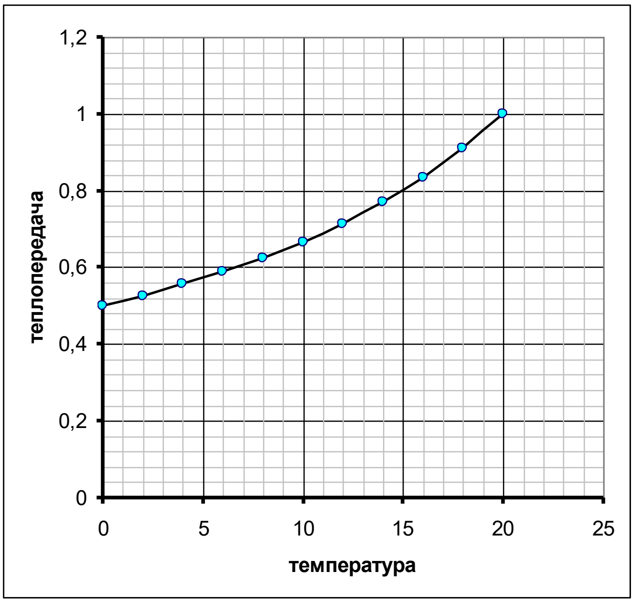
Необходимо, чтобы при любом значении $t_0$ один из корней этого уравнения был равен $t_{opt} = 40^\circ$. Вспомним, что при этой температуре, мощность тепловыделения максимальна ($W_{\max} = 20^\circ$). Таким образом, из уравнения (23) получаем, что необходимая зависимость имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\overline{W}_{\max}}{t_{opt} - t_0} = \frac{20}{40 - t_0} . \quad (24)$$

Изменение коэффициента теплопередачи приводит к изменению наклона прямой, являющейся графиком зависимости $\overline{q}(t)$. Все эти прямые должна проходить через вершину параболы и пересекать ось температур в точке $t_0$ (см. рисунок)



**2.7** График зависимости $\dfrac{\alpha(t_0)}{\alpha_0}$ показан на рисунке. Понятно, что при понижении температуры теплоотдачу (следовательно, и коэффициент теплопередачи) надо уменьшать.




**2.8** Для строго определения нужного коэффициента надо построить касательную к параболе, проходящую через начало координат. однако для оценки можно принять, что прямая отдачи проходит через вершину параболы. В этом случае, искомое значение можно найти по формуле (24) при $t_0 = 0°$.

Поэтому

$$\boxed{\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0{,}5 \qquad (25)}$$

т.е. коэффициент теплоотдачи надо уменьшить в **два** раза.

# Республиканская физическая олимпиада 2024 года
## (Заключительный этап)

## Теоретический тур

# *Решения задач*
# *10 класс*
## *(для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

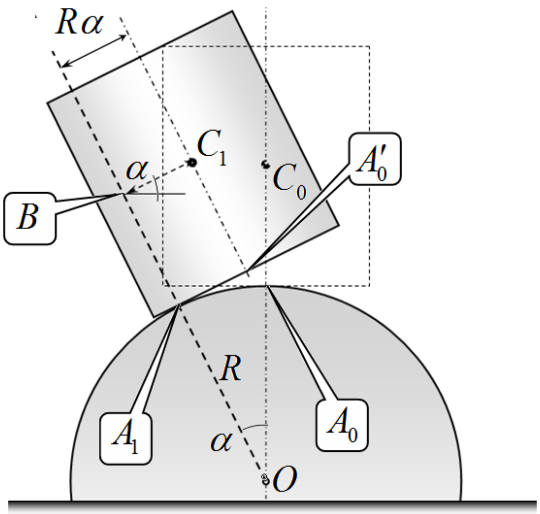
Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!


***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!***

## Задание 1. Цирковая разминка (Решение)

**1.** Условие равновесия тела – сумма сил и сумма моментов сил, действующих на тело равны нулю. При вертикальном положении цилиндра, когда его ось проходит через центр шара, эти условия выполняются. Следовательно, описанное положение цилиндра является положением равновесия не зависимо от радиуса шара и высоты цилиндра.

Для того, чтобы положения равновесия было устойчивым, необходимо, чтобы при отклонении от положения равновесия возникали силы (или моменты сил), стремящиеся вернуть тело в исходное положение. Это условие также может сформулировано иначе: положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии.
Так как в рассматриваемой системе потенциальная энергия есть потенциальная энергия в поле тяжести, то условие минимума упрощается: при отклонении цилиндра от вертикального положения его центр масс должен подниматься.




Сделаем рисунок, позволяющий получить условия устойчивости равновесия цилиндра. На рисунке пунктиром показано вертикальное положение цилиндра: $C_0$ - положение центра масс (на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра); $A_0$ - точка касания на шаре, на основании цилиндра это центр основания. При отклонении от вертикального положения цилиндр прокатывается по поверхности шара. Пусть при отклонении оси цилиндра на угол $\alpha$ от вертикали, точка касания смещается – на рисунке это точка $A_1$. Точка $A_0'$ - центр основания цилиндра после его поворота. так качение происходит без проскальзывания, то длина дуги $|A_0A_1| = R\alpha$ равна длине отрезка $A_0'A_1$ на основании цилиндра (этот отрезок – множество точек касания при наклоне цилиндра). $C_1$ - положение центра масс отклоненного цилиндра. Проведем прямую, проходящую через центр шара $O$ и точку касания $A_1$ продлим ее до точки $B$, находящейся на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра. Из рисунка следует, что высота центра масс цилиндра $C_1$ над центром шара равна

$$H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha \qquad (1)$$

Поэтому изменение этой высоты при отклонении цилиндра от вертикального положения равно

$$\Delta H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right). \qquad (2)$$

Как было отмечено ранее, условие устойчивости – найденное изменение высоты центра масс должно быть положительным. Решить соответствующее неравенство аналитически невозможно, поэтому следует воспользоваться тем, что угол отклонения должен быть малым. В этом случае можно воспользоваться приближенными формулами

$$\sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \qquad (3)$$

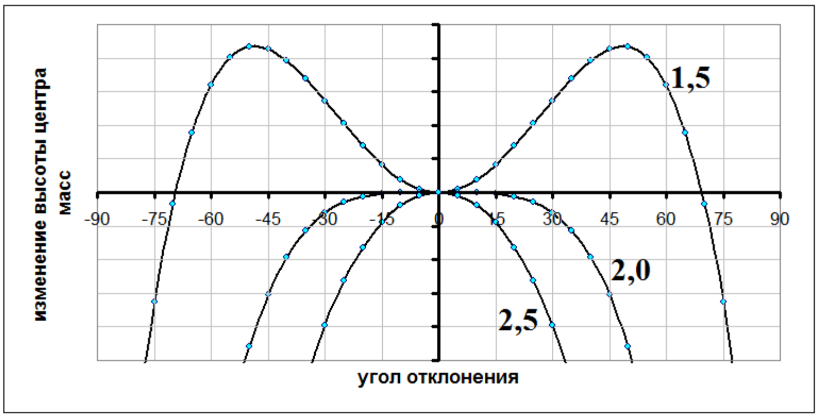
В этом приближении формула (2) приобретает вид

$$\Delta H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right) \approx -\left(R + \frac{h}{2}\right)\frac{\alpha^2}{2} + R\alpha^2 = \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{4}\right)\alpha^2 . \quad (4)$$

Из условия $\Delta H > 0$, следует, что условие устойчивости вертикального положения цилиндра имеет вид:

$$\boxed{\frac{h}{R} < 2 .} \quad (5)$$

*Для подтверждения справедливости проведенных рассуждений и расчетов приведем графики функции (2) при нескольких значениях величины $\frac{h}{R}$ (значения указаны на графике. (от участников олимпиады построение этого графика не требуется).*




**«Моментный» вариант решения.**

Чтобы цилиндр после отклонения от вертикали возвращался в исходное положение, необходимо, чтобы момент силы тяжести «заставлял» его вернуться обратно. С помощью построенного рисунка можно заметить. что это будет выполняться при выполнении условия: Вертикаль, проходящая через точку $C_1$ (вдоль нее направлена сила тяжести) должна проходить правее точки касания $A_1$. Математически это условие можно записать в виде:

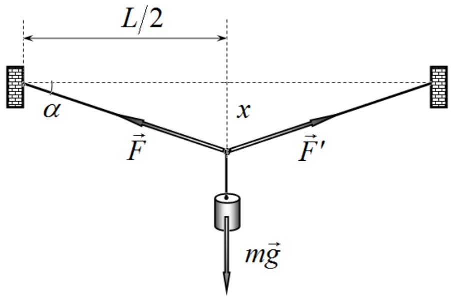
$$\frac{h}{2}\sin\alpha < R\alpha\cos\alpha . \quad (4)$$

Используя приближенные формулы $\sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1$, легко получаем решение (5).

**Задача 2. Канатоходцы**

Прежде всего, обратим внимание, что относительные деформации проволоки малы (максимальная деформация немного превышает 5%). Поэтому при решении задачи можно считать, что провисание проволоки также является малой величиной $x << L$

Так как задана зависимость силы упругости от относительной деформации, то необходимо получить аналогичную зависимость, связанную, кроме того, с силой тяжести.




Выразим удлинение проволоки с величиной провисания:

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2}. \qquad (1)$$

Воспользуемся малостью величины $x$, и упростим данную формулу (используя приближенную формулу для степенной зависимости):

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\left(1 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{L}{2} \approx \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{L}\right)^2\right) - \frac{L}{2} = \frac{x^2}{L}. \qquad (2)$$

Эта величина представляет удлинение половины проволоки, поэтому ее относительное удлинение равно

$$\varepsilon = 2\frac{\Delta l}{L} = 2\frac{x^2}{L^2}. \qquad (3)$$

Условие равновесия груза имеет вид

$$2F \sin\alpha = mg, \qquad (4)$$

где $\alpha$ малый угол, который проволока образует с горизонтом (см. рис). Так угол мал, то можно записать приближенное выражение

$$\sin\alpha \approx \alpha = \frac{2x}{L}. \qquad (5)$$

Из формулы (3) выразим $\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ и подставим в уравнение (4):

$$F = \frac{mg}{2\alpha} = \frac{mg}{4\frac{x}{L}} = \frac{mg}{4\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}}. \qquad (6)$$

**2.1** Используя это уравнение, найдем значение массы груза, при котором деформация проволоки линейно зависит от относительной деформации. Для этого в уравнение (6) подставим значения относительной деформации и силы упругости, соответствующие точке 1:

$$m_1 = \frac{F_1\sqrt{8\varepsilon_1}}{g} = \frac{310\sqrt{8 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3}}}{9{,}8} \approx 4{,}3\,кг. \qquad (7)$$

Масса подвешенного груза меньше этой величины, поэтому искомые значения лежат в области линейной зависимости силы упругости от относительной деформации:

$$F = \frac{F_1}{\varepsilon_1}\varepsilon, \qquad (8)$$

где $\dfrac{F_1}{\varepsilon_1}$ - коэффициент наклона линейного участка диаграммы растяжения. Из формул (6), (8) и (3) получаем:

$$\frac{F_1}{\varepsilon_1}\varepsilon=\frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon^{\frac{3}{2}}=\frac{mg}{\sqrt{8}}\frac{\varepsilon_1}{F_1} \quad\Rightarrow\quad \left(2\frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}\left(\frac{x}{L}\right)^3=\frac{mg}{\sqrt{8}}\frac{\varepsilon_1}{F_1} \tag{9}$$

Откуда окончательно находим

$$\boxed{x=L\sqrt[3]{\frac{mg}{8}\frac{\varepsilon_1}{F_1}}=2{,}0\cdot\sqrt[3]{\frac{2{,}0\cdot 9{,}8}{8}\frac{0{,}0024}{310}}\approx 5{,}3\,см\,.} \tag{10}$$

**2.2** Разрыв проволоки происходит при $\varepsilon=\varepsilon_2=5{,}10\%=5{,}1\cdot 10^{-2}$, при этом сила упругости равна $F=F_2=0{,}43\,кН=430\,Н$. Тогда из уравнения (6) находим максимальную массу подвешенного груза:

$$\boxed{m_2=\frac{F_2\sqrt{8\varepsilon_2}}{g}=\frac{430\sqrt{8\cdot 5{,}1\cdot 10^{-2}}}{9{,}8}\approx 27\,кг\,.} \tag{11}$$

## Задание 2. Газовые законы (Решение)

### Часть 1. Горизонтальный сосуд.

**1.1** При достижении термодинамического равновесия выровняются давления и температуры газов обеих частях сосуда:

$$\begin{aligned} P_{1a} &= P_{1b} = P_1 \\ T_{1a} &= T_{1b} = T_1 \end{aligned}. \qquad (1)$$

Для определения параметров газов запишем уравнения Клапейрона для обеих порций газов

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_1V_{1a}}{T_1}; \qquad \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_{1b}}{T_1}. \qquad (2)$$

Разделим уравнения (2) друг на друга

$$\frac{2}{3} = \frac{V_{1a}}{V_{1b}}. \qquad (3)$$

Добавим условие постоянства объема

$$V_{1a} + V_{1b} = 2V_0. \qquad (4)$$

Из этих уравнений следует, что объемы газов станут равными

$$\boxed{V_{1a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{1b} = \frac{6}{5}V_0. \qquad (5)}$$

Из уравнений (2) найти значения установившихся давлений и температур нельзя, т.к. в них входят только их отношение. Поэтому следует воспользоваться первым законом термодинамики. Так как давления газов на поршень с разных сторон все время одинаковы, то работа газов по перемещению поршня равны нулю. Система теплоизолирована, поэтому внутренняя энергия газов сохраняется.

Внутреннюю энергию одноатомного газа можно рассчитать по формулам

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV. \qquad (6)$$

Здесь использовано уравнение состояния идеального газа $PV = \nu RT$.
Уравнения закона сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$\frac{3}{2}P_0V_0 + \frac{3}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_1 \cdot 2V_0. \qquad (7)$$

из которого следует, что давление газа не изменяется, т.е.

$$\boxed{P_{1a} = P_{1b} = P_0. \qquad (8)}$$

Теперь установившуюся температуру можно найти из любого из уравнений (2):

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_{1b}}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_0\frac{V_{1b}}{V_0}. \qquad (9)$$

Используя найденное значение объема, получаем

$$\boxed{T_{1a} = T_{1b} = \frac{6}{5}T_0 \qquad (10)}$$

**1.2** Т.к. смещением поршня пренебрегаем, то объемы газов остаются неизменными:

$$V_{2a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{2b} = \frac{6}{5}V_0. \tag{11}$$

Также остаются неизменными параметры газа в части сосуда ***b:***

$$P_{2b} = P_0; \;\; T_{2b} = \frac{6}{5}T_0. \tag{12}$$

В процессе нагревания полученная теплота идет на увеличение внутренней энергии газа в части сосуда ***a***:

$$\frac{3}{2}P_0V_{1a} + Q = \frac{3}{2}P_{2a}V_{1a}. \tag{13}$$

Подставляем известные значения параметров

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0 + \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_{2a} \cdot \frac{4}{5}V_0. \tag{14}$$

и находим

$$P_{2a} = \frac{17}{12}P_0. \tag{15}$$

Значение температуры газа найдем из уравнения состояния Клапейрона (для состояний 0 и 2):

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_{2a}V_{2a}}{T_{2a}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2P_0V_0}{3T_0} = \frac{17}{12}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0\frac{1}{T_{2a}}, \tag{16}$$

из которого следует, что температура газа станет равной

$$T_{2a} = \frac{17}{10}T_0. \tag{17}$$

1.3 После установления равновесия температуры и давления газов в разных частях сосуда станут равными

$$\begin{aligned} P_{3a} &= P_{3b} = P_3 \\ T_{3a} &= T_{3b} = T_3 \end{aligned}. \tag{18}$$

Для упрощения расчетов рассмотрим переход из состояния 0 в конечное состояние 3 (без промежуточных этапов). Первый закон термодинамики приводит к уравнению

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot 2V_0 + Q = \frac{3}{2}P_3 \cdot 2V_0, \tag{19}$$

из которого сразу следует, что давление газа будет равно

$$P_{3a} = P_{3b} = \frac{7}{6}P_0. \tag{20}$$

Запишем уравнения состояния для обеих порций газов:

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_3V_{3a}}{T_3}; \qquad \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_3V_{3b}}{T_3}. \tag{21}$$

Сложим эти два уравнения:

$$\frac{5}{3}\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_3 \cdot 2V_0}{T_3}. \tag{22}$$

и найдем значение конечной температуры:

$$T_3 = \frac{6}{5}T_0\frac{P_3}{P_0} = \frac{7}{5}T_0. \qquad (23)$$

Таким образом:

$$\boxed{T_{3a} = T_{3b} = \frac{7}{5}T_0.} \qquad (24)$$

Наконец, значения объем можно выразить из уравнений (21). Если разделить их друг на друга, получим

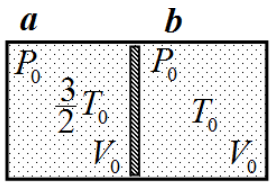
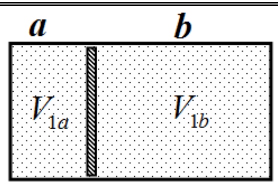
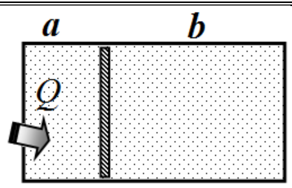
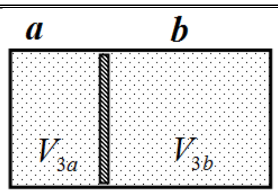
$$\frac{V_{3a}}{V_{3b}} = \frac{2}{3} \qquad (25)$$

Вспоминая. что $V_{1a} + V_{1b} = 2V_0$, находим

$$\boxed{V_{3a} = \frac{4}{5}V_0; \qquad V_{3b} = \frac{6}{5}V_0.} \qquad (26)$$

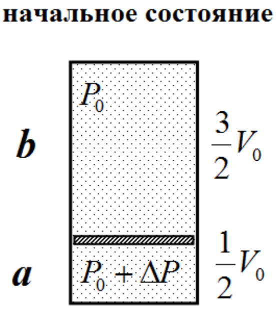
Все найденные значения параметров сведены в Таблице 1.

**Таблица 1.**

| № | рисунок | параметры газа в части ***a*** | параметры газа в части ***b*** |
|---|---|---|---|
| 0 |  | $P_{0a} = P_0$ | $P_{0b} = P_0$ |
| | | $V_{0a} = V_0$ | $V_{0a} = V_0$ |
| | | $T_{0a} = \frac{3}{2}T_0$ | $T_{0b} = T_0$ |
| 1 |  | $P_{1a} = P_0$ | $P_{1b} = P_0$ |
| | | $V_{1a} = \frac{4}{5}V_0$ | $V_{1b} = \frac{6}{5}V_0$ |
| | | $T_{1a} = \frac{6}{5}T_0$ | $T_{1b} = \frac{6}{5}T_0$ |
| 2 |  | $P_{2a} = \frac{17}{12}P_0$ | $P_{2b} = P_0$ |
| | | $V_{2a} = \frac{4}{5}V_0$ | $V_{2b} = \frac{6}{5}V_0$ |
| | | $T_{2a} = \frac{17}{10}T_0$ | $T_{2b} = \frac{6}{5}T_0$ |
| 3 |  | $P_{3a} = \frac{7}{6}P_0$ | $P_{3b} = \frac{7}{6}P_0$ |
| | | $V_{3a} = \frac{4}{5}V_0$ | $V_{3b} = \frac{6}{5}V_0$ |
| | | $T_{3a} = \frac{7}{5}T_0$ | $T_{3b} = \frac{7}{5}T_0$ |

**Часть 2. Вертикальный сосуд.**

**2.** При решении данной задачи нет необходимости рассматривать все этапы процесса, можно сразу рассматривать переход от начального к конечному состоянию. Зная отношение объемов и их сумму, легко найти объемы каждой части сосуда.

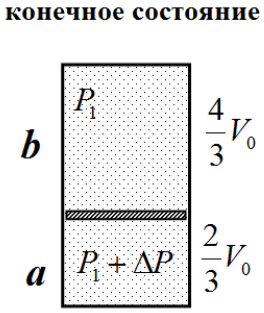



В начальном состоянии:

объем нижней части $V_{0a}=\frac{1}{2}V_0$;

объем верхней части $V_{0b}=\frac{3}{2}V_0$.

Если давление газа в верхней части сосуда равно $P_0$, то давление в нижней части равно $P_0+\Delta P$, где $\Delta P$ - давление, которое создает поршень.




В конечном состоянии:

объем нижней части $V_{1a}=\frac{4}{3}V_0$;

объем верхней части $V_{1b}=\frac{2}{3}V_0$.

Обозначим давление газа в верхней части сосуда $P_1$, тогда давление в нижней части - $P_1+\Delta P$.

Запишем уравнение первого закона термодинамики:

$$Q=\Delta U+A \qquad (27)$$

При вертикальном положении сосуда газ совершает работу по подъему поршня, которая равна

$$A=\Delta P\left(\frac{2}{3}V_0-\frac{1}{2}V_0\right)=\frac{1}{6}\Delta PV_0. \qquad (28)$$

Эта величина также равна изменению потенциальной энергии поршня в поле тяжести Земли. Выразим изменение внутренней энергии газа через значения давлений и объемов:

$$\Delta U=\frac{3}{2}\left(P_1\cdot\frac{4}{3}V_0+(P_1+\Delta P)\cdot\frac{2}{3}V_0\right)-\frac{3}{2}\left(P_0\cdot\frac{3}{2}V_0+(P_0+\Delta P)\cdot\frac{1}{2}V_0\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\left(P_1V_0+\Delta P\cdot\frac{2}{3}V_0\right)-\frac{3}{2}\left(P_0V_0+\Delta P\cdot\frac{1}{2}V_0\right)=\frac{3}{2}(P_1-P_0)V_0+\frac{1}{4}\Delta PV_0. \qquad (29)$$

Далее необходимо найти значения $\Delta P$ и $P_1$. Для этого воспользуемся равенством масс газов в обеих частях сосудов. Для начального состояния можно записать

$$\frac{3}{2}P_0V_0=\frac{1}{2}(P_0+\Delta P)V_0. \qquad (30)$$

Отсюда следует

$$\Delta P=2P_0 \qquad (31)$$

Для конечного:

$$\frac{4}{3}P_1V_0=\frac{2}{3}(P_1+\Delta P)V_0, \qquad (30)$$

что дает

$$P_1 = 2P_0 . \tag{32}$$

Подставляя полученные значения в формулу (29), получим

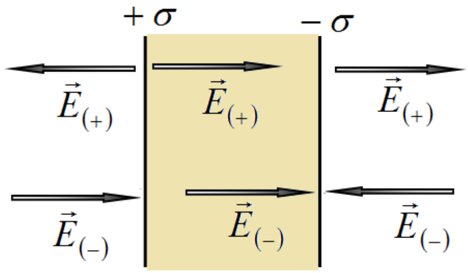
$$\Delta U = \frac{3}{2}(P_1 - P_0)V_0 + \frac{1}{4}\Delta P V_0 = 2P_0 V_0 . \tag{33}$$

Теперь можно вычислить количество сообщенной газу теплоты

$$\boxed{Q = \Delta U + A = 2P_0 V_0 + \frac{1}{6}\cdot 2P_0 V_0 = \frac{7}{3}P_0 V_0} \tag{34}$$

# Задание 3. Поле в диэлектрике (Решение)

## Часть 1. Нормальное поле




**1.1** Бесконечная равномерно заряженная плоскость создает однородное поле, вектор напряженности которого направлен перпендикулярно плоскости. Плоский конденсатор состоит из двух больших параллельных пластин, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку. На рисунке показаны векторы напряженности полей, создаваемых положительно $\vec{E}_{(+)}$ и отрицательно $\vec{E}_{(-)}$ заряженными пластинами. Понятно, что модули этих векторов равны $\left|\vec{E}_{(+)}\right| = \left|\vec{E}_{(-)}\right| = E$ искомому значению напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью. Тогда модуль напряженности поля внутри конденсатора равен $2E$, а вне конденсатора поле отсутствует.

По определению емкость конденсатора равна отношению заряда одной из обкладок $Q = \sigma S$ к разности потенциалов между обкладками $\Delta\varphi = E_{\Sigma} d = 2Ed$:

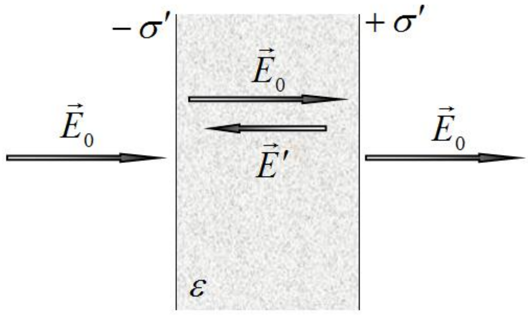
$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma S}{2Ed}. \qquad (1)$$

Приравнивая это выражение к выражению для емкости конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$,

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\sigma S}{2Ed}, \qquad (2)$$

получаем требуемую формулу для напряженности поля, создаваемого одной пластиной:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (3)}$$




**1.2** Электрическое поле внутри пластины является суперпозицией внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля, созданного индуцированными зарядами $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (4)$$

С другой стороны модуль напряженности этого поля в $\varepsilon$ раз меньше напряженности внешнего поля:

$$\frac{E_0}{\varepsilon} = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что поверхностная плотность индуцированных зарядов равна

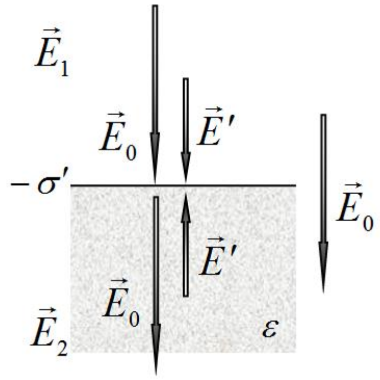
$$\boxed{\sigma' = \varepsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 E_0. \qquad (6)}$$

Эту же величину можно выразить через напряженность поля внутри пластины

$$\boxed{\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E. \qquad (7)}$$

**1.3** В рассматриваемой здесь ситуации индуцированные заряды создают электрическое поле как внутри диэлектрика, так и над ним. Поэтому напряженности полей вне диэлектрика и внутри него можно представить в виде

$$E_1 = E_0 + E' = E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \qquad E_2 = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \tag{7}$$




где $\vec{E}_0$ - напряженность внешнего поля, создаваемого всеми остальными зарядами, кроме зарядов на границе диэлектрика.
Из этих формул не сложно найти:

$$E_0 = E_1 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \qquad E_2 = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \left(E_1 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right) - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = E_1 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \tag{8}$$

Так как силовые линии электрического поля перпендикулярны границе диэлектрика, то $E_1 = \varepsilon E_2$. С учетом этого соотношения, из формулы (8) следует, что плотность индуцированных зарядов равна

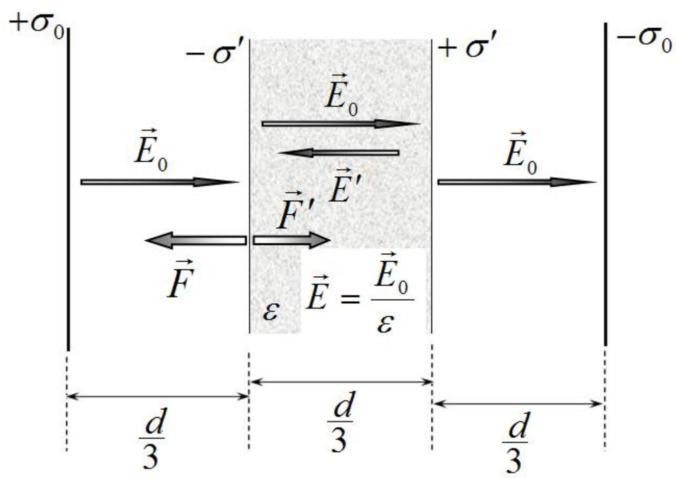
$$\boxed{\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_2.} \tag{9}$$

**1.4** Электрические заряды на обкладках конденсатора $\pm\sigma_0$ создают в пространстве между обкладками и диэлектрической пластиной электрическое поле напряженности

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}. \tag{10}$$

Напряженность поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0}. \tag{11}$$




**1.4.1** Из формулы (7) следует, что поверхностные плотности зарядов на поверхности пластины равны

$$\boxed{\sigma_1' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0; \quad \sigma_2' = +\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0.} \tag{12}$$

**1.4.2** Для расчета емкости конденсатора воспользуемся определением. Заряд одной из обкладок равен $Q = \sigma_0 S$. Разность потенциалов рассчитаем, как работу сил электрического поля над единичным зарядом:

$$\Delta\varphi = E_0\frac{d}{3} + E\frac{d}{3} + E_0\frac{d}{3} = E_0\frac{2d}{3} + \frac{E_0}{\varepsilon}\frac{d}{3} = \frac{E_0 d}{3}\frac{2\varepsilon+1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 d}{3\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon+1}{\varepsilon}. \qquad (13)$$

Следовательно, емкость конденсатора $C = \dfrac{Q}{\Delta\varphi}$ равна

$$\boxed{C_0 = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\frac{\varepsilon_0 S}{d}.} \qquad (14)$$

*<u>Замечание.</u> Эта формула может быть получена из формулы для емкости последовательно соединенных конденсаторов.*

**1.4.3** Сила, действующая на заряженное тело, равна произведению заряда тела на напряженность электрического поля, созданного всеми внешними зарядами

$$F = qE. \qquad (15)$$

Выделим на поверхности диэлектрической пластины небольшой участок площади $\Delta S$
Тогда давление электрического поля на этот участок рассчитывается по формуле

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\sigma'\Delta S E}{\Delta S} = \sigma' E_\Sigma. \qquad (16)$$

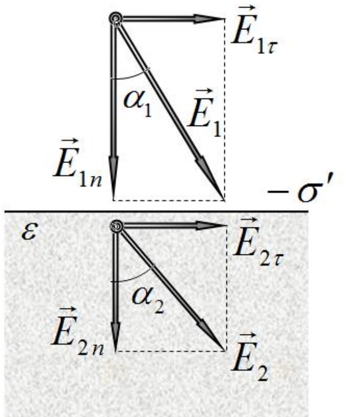
Здесь $E_\Sigma$ - сумма напряженностей полей: создаваемого зарядами на обкладках конденсатора $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$; и поля создаваемого индуцированными зарядами на второй поверхности диэлектрика $E' = \dfrac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$. С учетом направления сил, получим

$$P = \sigma'\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right). \qquad (17)$$

Подставляя значение величины $\sigma' = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma_0$, после простых алгебраических преобразований, окончательно получаем

$$\boxed{P = \frac{\varepsilon^2-1}{2\varepsilon^2}\frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0}.} \qquad (18)$$

**Часть 2. Наклонное поле**




**2.1.1** Различие в полях вне диэлектрика $\vec{E}_1$ и внутри него $\vec{E}_2$ возникает из-за электрического поля $\vec{E}'$, созданного зарядами, индуцированными на поверхности диэлектрика. Разложим векторы напряженностей полей на составляющие параллельны границе и нормальные к ней (см. рис.). Вследствие принципа суперпозиции для электрического поля преобразования этих компонент при переходе через границу можно рассматривать независимо друг от друга.

Так как вектор напряженности поля индуцированных зарядов $\vec{E}'$ направлен перпендикулярно границе диэлектрика, тангенциальные составляющие векторов равны между собой

$$\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{2\tau}\,. \tag{19}$$

Как было показано ранее, нормальные составляющие отличаются в $\varepsilon$ раз:

$$\vec{E}_{2n} = \frac{\vec{E}_{1n}}{\varepsilon}\,. \tag{20}$$

Используя эти соотношения легко, получить «закон преломления» для линий напряженности

$$tg\,\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \frac{E_{1\tau}}{\frac{1}{\varepsilon}E_{1n}} = \varepsilon\, tg\,\alpha_1 \tag{21}$$

Или

$$\boxed{\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1} = \varepsilon} \tag{22}$$

**2.1.2** Для модуля напряженности поля внутри диэлектрика имеем

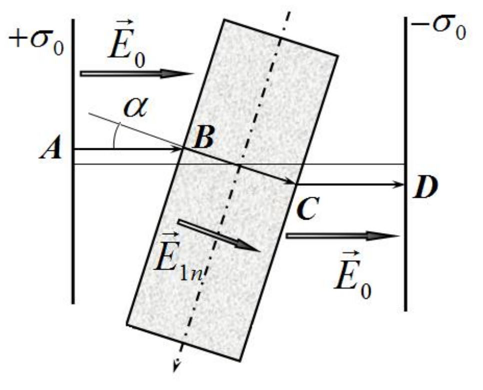
$$\begin{gathered} E_2 = \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{E_{1\tau}^2 + \frac{E_{1n}^2}{\varepsilon^2}} = \sqrt{E_1^2\cos^2\alpha_1 + \frac{E_1^2}{\varepsilon^2}\sin^2\alpha_1} = \\ = \frac{E_1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1} = \frac{E_1}{\varepsilon}\sqrt{1+\left(\varepsilon^2-1\right)\cos^2\alpha_1} \end{gathered}. \tag{23}$$

Откуда следует, что отношение модулей равно

$$\boxed{\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sqrt{1+\left(\varepsilon^2-1\right)\cos^2\alpha_1}}{\varepsilon}\,.} \tag{24}$$

*Обратите внимание, что утверждение «диэлектрик уменьшает поле в $\varepsilon$ раз» в общем случае не верно. В рассмотренном примере; во-первых, изменяется направление вектора индукции, во-вторых, отношение модулей векторов зависит от «угла падения» и не равно $\varepsilon$.*

**2.2.1** При неизменных зарядах на обкладках конденсатора при повороте диэлектрической пластинки изменится разность потенциалов между обкладками. Для расчета этой разности потенциалов следует найти работу сил электростатического поля по перемещению единичного пробного заряда от одной обкладки до другой. Вследствие потенциальности поля, эта работа не зависит от траектории движения пробного заряда. Достаточно просто вычислить эту работу для траектории $ABCD$, показанной на рисунке (отрезки $AC$ и $CD$ перпендикулярны обкладкам конденсатора, отрезок $BC$ перпендикулярен граням пластинки):




$$\Delta\varphi = U = |AB|\cdot E_0 + |BC|\cdot E_{1n} + |CD|\cdot E_0\,. \tag{25}$$

Из рисунка следует, что

$$|AB| = |CD| = \frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cos\alpha\,. \tag{26}$$

Как было показано ранее

$$E_{1n} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon} = \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon}. \quad (27)$$

Поэтому разность потенциалов между обкладками конденсатора равна

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = U = |AB| \cdot E_0 + |BC| \cdot E_{1n} + |CD| \cdot E_0 = 2\left(\frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cos\alpha\right)E_0 + \frac{d}{3} \cdot \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon} = \\ = E_0\left(d - \frac{d}{3}\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = E_0 d\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\cos\alpha\right)\end{aligned}. \quad (28)$$

Учитывая, что заряд на одной обкладке равен $Q = \varepsilon_0 S E_0$, получим выражение для емкости конденсатора

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S E_0}{E_0 d\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\cos\alpha\right)} = \frac{3\varepsilon}{\left(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\cos\alpha\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d}.} \quad (29)$$

**2.2.2** При малых углах поворота следует воспользоваться приближенной формулой $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. В этом случае формула (29) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}C = \frac{3\varepsilon}{\left(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\cos\alpha\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{3\varepsilon}{\left(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{3\varepsilon}{\left(2\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\frac{\alpha^2}{2}\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \\ = \frac{3\varepsilon}{(2\varepsilon + 1)}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}} \approx C_0\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}\right)\end{aligned} \quad (30)$$

где использована приближенная формула $\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x$.

Окончательно получаем, что относительное изменение емкости конденсатора равно

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}.} \quad (31)$$

# Республиканская физическая олимпиада 2024 года
## (Заключительный этап)

## Теоретический тур

# *Решения задач*
# *11 класс*
## *(для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!


***Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!***

# Задание 1. Гигантомания (Решение)

## Задача 1.1 Падение камушка.

Расстояние между поверхностями сферического тела и радиус этого тела значительно меньше радиуса Земли, поэтому можно считать, что на тело действует постоянная сила гравитационного притяжения равная

$$F = mg\,. \tag{1}$$

Такая же по модулю сила действует и на Землю.

Рассмотрим случай а) плотность тела равна плотности Земли.
В этом случае масса тела значительно меньше массы Земли, поэтому смещением Земли можно пренебречь с высокой точностью. Таким образом, мы приходим к простейшей задаче: «тело падает с высоты $h$ …»

**1.1.1.а** Время падения определяем из закона равноускоренного движения тела (падающего с ускорением свободного падения $a = g$):

$$\frac{g\tau_a^2}{2} = h\,. \tag{1}$$

Из которого находим

$$\boxed{\tau_a = \sqrt{2\frac{h}{g}} = 4{,}5\,c\,.} \tag{2}$$

**1.1.2.а** Скорость падения можно найти различными способами, например, из закона сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = mgh\,. \tag{3}$$

Откуда следует:

$$\boxed{V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 100} \approx 45\frac{м}{c}\,.} \tag{4}$$

В случае б), когда масса тела равна массе Земли, необходимо учитывать движения Земли.

Задача существенно упрощается тем обстоятельством, что массы тел равны. При этом движение тела и Земли является «симметричным»: их центры движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю ускорениями и скоростями. Поэтому они столкнутся, когда каждое тело пролетит расстояние $\frac{h}{2}$. Так как силы, действующие на тела, определяются формулой (1), то ускорение каждого из тел по модулю равны $g$.

**1.1.1.б** Для расчета времени движения запишем соотношение

$$\frac{g\tau_б^2}{2} = \frac{h}{2}\,. \tag{1}$$

Из которого находим

$$\tau_б = \sqrt{\frac{h}{g}} = 3{,}2\,с. \qquad (2)$$

**1.1.2.б** Для расчета скорости каждого тела запишем кинематическое соотношение

$$\frac{h}{2} = \frac{V_1^2}{2g}. \qquad (3)$$

Которое приводит к следующему значению скорости тела в момент столкновения

$$V_1 = \sqrt{gh} \qquad (4)$$

Так тела движутся навстречу друг другу, то относительная скорость в момент столкновения в два раза превышает найденную скорость, т.е.

$$V = 2\sqrt{gh} = 63\,\frac{м}{с}. \qquad (5)$$

**Задача 1.2 Космический корабль.**

Отношение высоты полета корабля к радиусу Земли примерно равно 0,03. Так как численные расчеты следует проводить с двумя зачащими цифрами

**1.2.1а** Если масса корабля значительно меньше массы Земли, то Землю можно считать неподвижной. Тогда корабль движется по окружности, центр которой совпадает с центром Земли. На основании второго закона Ньютона можно записать уравнение движения корабля

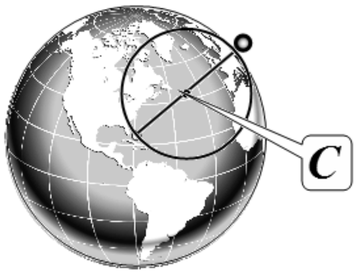
$$m\frac{v^2}{R} = mg. \qquad (1)$$

Скорость движения корабля является первой космической скоростью и равна

$$v = \sqrt{gR}. \qquad (2)$$

Следовательно, период обращения корабля равен

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 5{,}0\cdot 10^3\,с \approx 84\,мин. \qquad (3)$$




**1.2.1б** Если масса корабля равна массе Земли, то центр Земли и корабль будут вальсировать вокруг общего центра масс. В рассматриваемом случае этот центр тяжести $C$ находится на половине радиуса. Радиус окружности, по которой движутся корабль и центр Земли равен половине радиуса Земли

$$r = \frac{R}{2}. \qquad (4)$$

Поэтому уравнение движения корабля в этом случае будет иметь вид

$$m\frac{v^2}{R/2} = mg. \qquad (5)$$

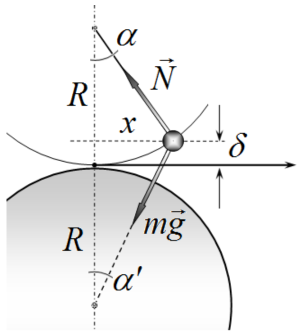
Скорость движения корабля

$$v = \sqrt{g\frac{R}{2}}. \qquad (6)$$

Наконец, период обращения равен

$$T = \frac{2\pi \frac{R}{2}}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} = 3{,}6\cdot 10^3 c \approx 1 час. \quad (7)$$

**Задача 1.3 Эталон часа**



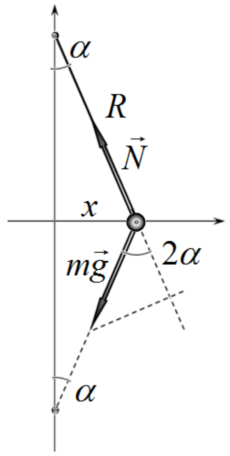

**1.3** Рассмотрим траекторию движения маятника, которая является дугой окружности. Высота подъема маятника над поверхностью Земли равно

$$\delta = R - R\cos\alpha. \quad (1)$$

При малых углах отклонения маятника эта величина является малой величиной второго порядка малости, поэтому ей можно пренебречь

$$\delta = R - R\cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2} R \approx 0. \quad (2)$$

В рамках этого подхода можно сделать следующие приближения:
- груз маятника движется по горизонтальной прямой;
- указанные на рисунке углы равны $\alpha' = \alpha$;
- модуль силы тяжести не изменяется в ходе движения и равен $mg$, эта сила направлена к центру Земли.




На следующем рисунке показаны силы, действующие на груз маятника. Проецируя силы на направление нити маятника, получим, что

$$N = mg\cos 2\alpha \approx mg. \quad (3)$$

Здесь опять использовано приближение малых углов, когда с точностью до малых первого порядка $\cos 2\alpha \approx 1$.
Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось $x$:

$$ma_x = -2mg\sin\alpha \approx -2mg\alpha. \quad (4)$$

Наконец, выразим угол отклонения подвеса маятника через координату груза:

$$\alpha \approx \frac{x}{R}. \quad (5)$$

Из формул (4)-(5) получаем уравнение

$$a_x = -2\frac{g}{R}x \quad (6)$$

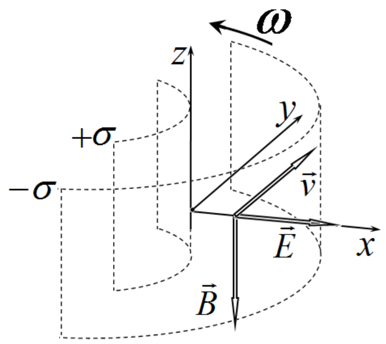
Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 3{,}6\cdot 10^3 c \approx 1{,}0 час. \quad (7)}$$

## Задание 2. Магнитное динамо (Решение).

### Часть 1. Поле в слое

**1.1** Направления требуемых векторов указаны на рисунке.
Вектор $\vec{E}$ - вдоль оси $x$;
Вектор $\vec{B}$ - в сторону, противоположную оси $z$;
Вектор $\vec{v}$ - вдоль оси $y$.



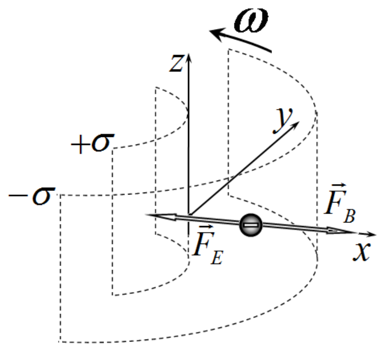

**1.2** Формулу для индукции магнитного поля можно получить на основании формулы (2) из условия задачи. Заметим, что величина $nI$ имеет смысл силы тока, приходящейся на единицу длины поверхности цилиндра. При вращении равномерно заряженного цилиндра эта величина может быть представлена в виде

$$nI \Rightarrow \sigma v = \sigma \omega R. \tag{1}$$

Поэтому индукция магнитного поля внутри слоя описывается формулой

$$\boxed{B = \mu_0 \sigma \omega R.} \tag{2}$$

**1.3** Направления векторов сил, действующих на электрон, показаны на рисунке.



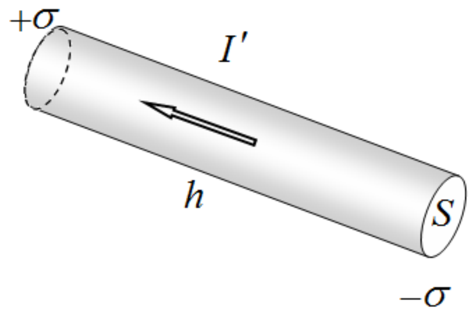

**1.4** Модуль электрической силы равен (по определению вектора напряженности поля)

$$\boxed{F_E = eE = e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \tag{3}$$

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца. Так как векторы скорости и индукции поля перпендикулярны, то модуль этой силы равен

$$\boxed{F_B = evB = e(\omega R)\cdot(\mu_0 \sigma \omega R) = e\mu_0(\omega R)^2 \sigma.} \tag{4}$$

**Часть 2. Заряды и токи.**




**2.1** Очевидно, что изменение зарядов на поверхностях слоя происходит благодаря электрическому току, который протекает поперек выделенного слоя. Выделим между боковыми поверхностями проводящего слоя тонкий цилиндр, ось которого перпендикулярна этим поверхностям. Обозначим площадь поперечного сечения этого цилиндра $S$, его длина равна толщине слоя $h$. Изменение заряда на торце цилиндра равно силе тока $I'$, протекающего по цилиндру, т.е.

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = I' \qquad (5)$$

Для расчета силы тока можно воспользоваться законом Ома, в котором в качестве напряжения надо взять работу всех сил, действующих на единичный заряд (назовем, эффективное напряжение). В данном случае это «эффективное» напряжение равно

$$U_{эф} = \frac{(F_M - F_E)}{e} h . \qquad (6)$$

Электрическое сопротивление цилиндра рассчитывается по известной формуле

$$r = \rho \frac{h}{S} \qquad (7)$$

Используя выражения для сил (3)-(4), получим

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = \frac{U_{эф}}{r} = \frac{(F_M - F_E)}{e} h \cdot \frac{S}{\rho h} = \frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1\right) S . \qquad (8)$$

Окончательно, уравнение для изменения плотности зарядов имеет вид:

$$\boxed{\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1\right). \qquad (9)}$$

**2.2** Плотность зарядов, следовательно, и индукция поля будут возрастать, если скорость изменения, определяемая уравнением (9), будет положительна, т.е. при

$$\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad V^* = \omega^* R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} . \qquad (10)$$

Известно, что эта формула определяет скорость света в вакууме, что также можно получить, подставляя численные значения электрической и магнитной постоянных:

$$\boxed{V^* = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3{,}0 \cdot 10^8 \, \frac{м}{с} . \qquad (11)}$$

Заметим, что этот же результат можно получить из формул (3)-(4), если понять, что для возрастания магнитного поля магнитная сила должна стать больше силы электрической.

**2.3** Из формулы (10) следует, что угловая скорость вращения Земли должна стать равной

$$\omega^* R = c \quad \Rightarrow \quad \omega^* = \frac{c}{R} . \qquad (12)$$

Заметим, что при этом скорость точек на поверхности Земли должна превысить скорость света почти в два раза! Период вращения (т.е. сутки) при этом равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi R}{c} \approx 0{,}073\ c\,. \qquad (13)$$

**2.4** Оценим численное значение скорости движения выделенного слоя

$$V = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^6\,м}{24 \cdot 3600 c} \approx 2{,}5 \cdot 10^2\,\frac{м}{c}\,. \qquad (14)$$

Эта величина значительно меньше скорости света. Отношение силы магнитной к силе электрической, действующей на электрон (первое слагаемое в скобках в уравнении (9)) численно равно $\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 = \left(\frac{V}{c}\right)^2 \approx 7{,}2 \cdot 10^{-13}$. Поэтому этой величиной можно пренебречь.

Тогда уравнение (9) приобретает совсем простой вид

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\rho\varepsilon_0} \qquad (15)$$

Характерное время исчезновения зарядов можно получить, если разделить начальную плотность заряда на скорость его убывания в начальный момент времени, т.е.

$$\tau = \frac{\sigma_0}{\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right|_0} = \frac{\sigma_0}{\left(\frac{\sigma_0}{\rho\varepsilon_0}\right)} = \rho\varepsilon_0 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-12} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-17}\,c\,. \qquad (16)$$

**Часть 3. Спасает ли модель масса электрона?**

**3.1** Учет массы электрона приводит к тому, что необходимо принять во внимание его центростремительное ускорение (или центробежную силу в неинерциальной системе отсчета). Как было показано выше, силой Лоренца в данной задаче можно пренебречь, поэтому условие стационарности зарядов может быть сформулировано в виде: электрическая сила обеспечивает электрону необходимое центростремительное ускорение:

$$m_e \omega^2 R = e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,. \qquad (17)$$

Отсюда следует, что стационарное значение плотности заряда равно

$$\bar{\sigma} = \frac{m_e}{e}\varepsilon_0 \omega^2 R\,. \qquad (18)$$

**3.2** Индукция поля, создаваемого этими зарядами в соответствии с формулой (2), равна

$$B = \mu_0 \bar{\sigma}\omega R = \frac{m_e}{e}\varepsilon_0\mu_0\frac{(\omega R)^3}{R} \approx \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{\left(2{,}5 \cdot 10^2\right)^3}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^6} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-28}\,Тл\,, \qquad (19)$$

что на 23 порядка меньше магнитного поля Земли.

**3.3** Полученные результаты однозначно свидетельствуют, что рассмотренная модель принципиально не может описать возникновение магнитного поля Земли

# Задание 3. Таутохронизм и принцип Ферма (Решение)

## Часть 1. Математическое введение.

**1.1** Для доказательства формулы (1) условия задачи необходимо провести элементарные преобразования на приближенной формулой для степенной функции:

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}\right) = a+\frac{x^2}{2a}. \qquad (1)$$

**1.2** Уравнение окружности, описанной в условии, имеет вид

$$x^2+(y-R)^2 = R^2. \qquad (2)$$

Из этого уравнения выразим значение $y$, используя полученную формулу (1):

$$x^2+(y-R)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad y-R = \pm\sqrt{R^2-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = R-\left(R-\frac{x^2}{2R}\right) = \frac{x^2}{2R}. \qquad (3)$$

Из очевидных геометрических соображений выбран знак «минус» перед корнем.

*Возможны и другие варианты вывода этой формулы. Например, раскрыть скобки в формуле (2), затем пренебречь величиной* $y^2$*:*

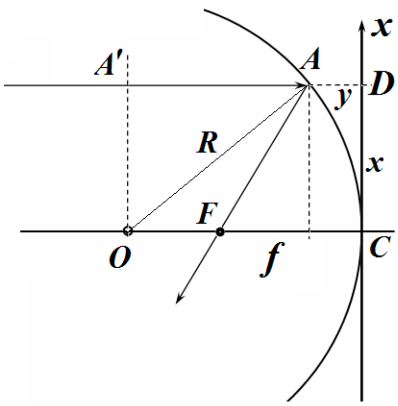
$$x^2+(y-R)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2yR+R^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{2R} \qquad (3a)$$

Отметим важное обстоятельство, которое будет использоваться в дальнейшем. Если считать малой величиной $x$, то величина $y$ является малой величиной второго порядка малости. Поэтому, если использовать приближения первого порядка по $y$, то следует оставлять величины порядка $x^2$.

## Часть 2. Таутохронизм

### Задача 2.1

**2.1** Точку фокуса можно рассматривать как изображение бесконечно удаленной точки. Согласно принципу таутохронизма для существования изображения необходимо показать, что существует точка $F$, время движения до которой одинаково для всех лучей. Из симметрии задачи следует, что эта точка находится на главной оптической оси.




Так как в данном случае свет распространяется в однородной среде, то условие постоянства времени движения равносильно условию равенства длин путей. Возьмем произвольный луч $AA'$ параллельный главной оптической оси и проходящий на расстоянии $x = |CD|$ от нее. Так как падающие лучи параллельны, то расстояние от бесконечно удаленной точки до любой плоскости, перпендикулярной лучам (и главной оптической оси) одинаково для всех этих лучей. для простоты в качестве такой плоскости возьмем плоскость $OA'$, проходящую через центр кривизны зеркала. Тогда условие таутохронизма может быть сформулировано следующим образом: должна существовать такая точка $F$, для которой расстояние $l = |AA'| + |AF|$ не зависит от величины $x$. Из рисунка следует, что это расстояние выражается через параметры системы следующим образом

$$l = (R - y) + \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = R + f \quad , \tag{4}$$

где $y = |AD|$; $f = |CF|$ - фокусное расстояние зеркала (если фокус существует). Величина $l = R + f$ расстояние от плоскости $OA'$ до фокуса, для луча, распространяющегося вдоль оптической оси. Теперь, надо найти такую зависимость $y = f(x)$, чтобы равенство (4) выполнялось при любом $x$. Проводя элементарные алгебраические преобразования, получим:

$$\begin{aligned} &(R - y) + \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = R + f \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = y + f \quad \Rightarrow \\ &x^2 + f^2 - 2yf + y^2 = y^2 + 2yf + f^2 \quad \Rightarrow \quad 4yf = x^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Итак, если поверхность зеркала описывается функцией

$$y = \frac{x^2}{4f}, \tag{6}$$

то все лучи, параллельные оптической оси, придут в точку $F$ одновременно, поэтому эта точка будет являться фокусом. Иными словами, если зеркало является параболическим, то существует фокус для всех лучей, независимо от расстояния от оптической оси.

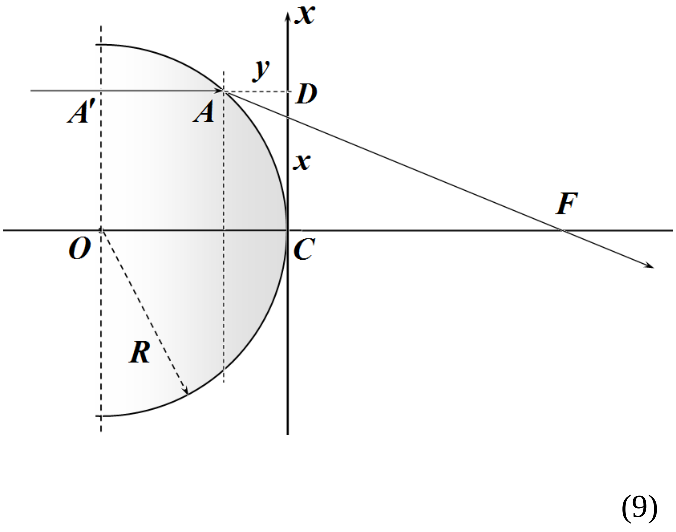
Как было показано, в п.1.2, для лучей, идущих на малом расстоянии от оптической оси окружность может заменена параболой, поэтому справедливо и обратное утверждение – парабола может быть заменена дугой окружности. Сравнивая формулу (6) с формулой (3),

$$y = \frac{x^2}{4f} = \frac{x^2}{2R}, \tag{7}$$

получаем, что фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно

$$\boxed{f = \frac{R}{2}. \tag{8}}$$

**Задача 2.2**




**2.2** Не повторяя всех рассуждений, проведенных при решении предыдущей задачи, сформулируем условие существования фокуса: ***время,*** за которой свет проходит расстояние $|A'A| + |AF|$, не зависит от расстояния $x$ от луча до главной оптической оси.

Пусть свет проходит расстояние $l$ в однородной среде с показателем преломления $n$, тогда время этого прохождения равно

$$t = \frac{l}{c/n} = \frac{nl}{c}. \tag{9}$$

где $c/n$ - скорость света в этой среде.

Заметим, что вместо того, чтобы учитывать изменение скорости света (что происходит в действительности), при расчете времени прохождения можно считать, что скорость света остается постоянной (и равной скорости света в вакууме $c$) а увеличивается длина пути, которая становится равной $nl$ (в оптике эту величину называют оптической длиной пути).

Таким образом, получаем, что условием существования фокуса является выполнение равенства при любых значениях $x$:

$$n(R-y)+\sqrt{x^2+(f+y)^2}=nR+f\,. \tag{10}$$

Преобразуем данное равенство

$$\begin{aligned} &n(R-y)+\sqrt{x^2+(f+y)^2}=nR+f \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+(f+y)^2}=f+ny \quad\Rightarrow \\ &x^2+f^2+2fy+y^2=f^2+2fny+n^2y^2 \quad\Rightarrow\quad x^2=2(n-1)fy \end{aligned} \tag{11}$$

Если искривленная поверхность линзы описывается уравнением

$$y=\frac{x^2}{2(n-1)f}\,, \tag{12}$$

то равенство (10) будет выполняться при любом значении $x$, т.е. точка $F$ является фокусом. Но эта функция описывает в параксиальном приближении «дугу окружности» радиуса $R$:

$$y=\frac{x^2}{2R}\,. \tag{13}$$

Следовательно, описанная в условии задачи линза обладает фокусом.

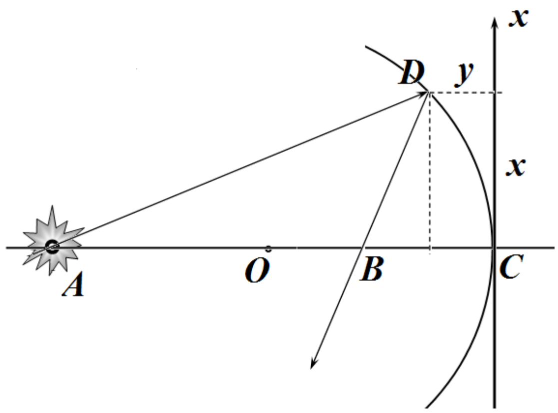
Для определения фокусного расстояния линзы достаточно приравнять выражения (12) и (13), откуда следует, что оно равно

$$\boxed{f=\frac{R}{n-1}\,.} \tag{14}$$

**Задача 2.3**

**2.3.1** По аналогии с предыдущими задачами: для существование изображения в точке $B$ необходимо, чтобы расстояние $|AD|+|DB|$, не зависело от положения точки $D$ на поверхности зеркала и равнялась расстоянию $|Ac|+|CB|$. Это условие будет выполнено, если равенство

$$\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{x^2+(b-y)^2}=a+b\,. \tag{15}$$




выполняется при любых $x$. Возводить сумму корней в квадрат – неблагодарная задача, поэтому используем приближенные формулы для преобразования равенства (16). Сначала запишем:

$$\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{x^2+(b-y)^2}\approx\sqrt{x^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+b^2-2by}\,. \tag{16}$$

Здесь мы пренебреги слагаемыми $y^2$, но оставили величины $x^2$. Ранее мы показали, что для окружности (сферы и соприкасающейся параболы) величина $y$ пропорциональна $x^2$, поэтому эти величины являются малыми одного порядка. Величина $y^2$ пропорциональна $x^4$, поэтому ей можно пренебречь. Используя соотношение между этими малыми величинами, продолжим алгебраические преобразования, используя формулу (1):

$$\sqrt{x^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+b^2-2by}=\sqrt{a^2+\left(x^2-2ay\right)}+\sqrt{b^2+\left(x^2-2by\right)}\approx$$
$$\approx a+\frac{\left(x^2-2ay\right)}{2a}+b+\frac{\left(x^2-2by\right)}{2a}. \quad (17)$$

Подставим это выражение в равенство (15):

$$a+\frac{\left(x^2-2ay\right)}{2a}+b+\frac{\left(x^2-2by\right)}{2b}=a+b. \quad (18)$$

Откуда следует, что равенство (15) будет выполняться, при следующей зависимости $y(x)$:

$$y=\frac{x^2}{4a}+\frac{x^2}{4b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{x^2}{4}. \quad (19)$$

В очередной раз получено уравнение параболы, которая может рассматриваться, как параболу, соприкасающуюся с окружностью. В очередной раз, сравнивая выражение (19) с «параболическим уравнением» окружности $y=\frac{x^2}{2R}$, получаем, что существует такое значение $b$, при котором равенство (15) выполняется для всех лучей, исходящих из точки $A$. Т.е. изображение этой точки существует.

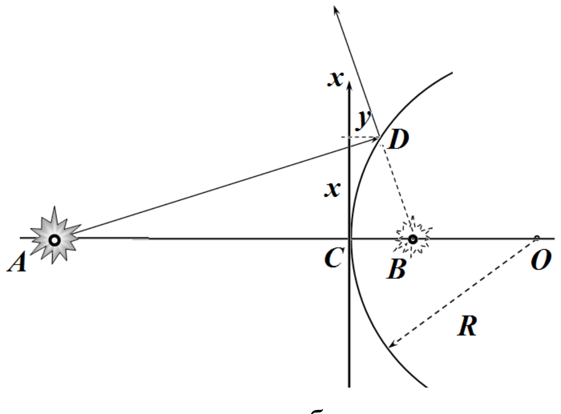
**2.3.2** Из равенства (19) и уравнения «окружности» следует искомая формула зеркала

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}.} \quad (20)$$

Здесь использовано полученное ранее значение фокусного расстояния $f=\frac{R}{2}$.

**Задача 2.4**

**2.4.1** Абсолютно очевидно, что в рассматриваемом случае лучи, вышедшие из точки $A$ и отраженные от зеркала не будут вообще пересекаться. Но могут пересечься в одной точке продолжения отраженных лучей. Предположим, что для продолжений лучей расстояния надо считать ***отрицательными*** (?!)




**2.4.2** В рамках этого предположение условие существования мнимого изображения формулируется следующим образом: величина $|AD|-|DB|$ одинакова для всех лучей, отраженных от зеркала, и равна $|AC|-|CB|=a-b$. Формально это условие записывается в виде равенства, аналогичного (15):

$$\sqrt{x^2+(a+y)^2}-\sqrt{x^2+(b-y)^2}=a-b. \quad (20)$$

Аналогичные алгебраические выкладки, преобразую это равенство к следующему виду:

$$\sqrt{x^2+(a+y)^2}-\sqrt{x^2+(b-y)^2}\approx\sqrt{x^2+a^2+2ay}-\sqrt{x^2+b^2-2by}\approx$$
$$\approx\left(a+\frac{x^2+2ay}{2a}\right)-\left(b+\frac{x^2-2by}{2b}\right)=a-b\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2}{2a}-\frac{x^2}{2b}+2y=0 \tag{21}$$

Используя «параболическое уравнение» окружности $y=\dfrac{x^2}{2R}$, получаем:

$$\boxed{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{2}{R}\,.} \tag{22}$$

Эта формула совпадает с «формулой вогнутого зеркала», если:
а) считать расстояние до мнимого изображения отрицательным;
б) фокусное расстояние также отрицательно $F=-\dfrac{R}{2}$.

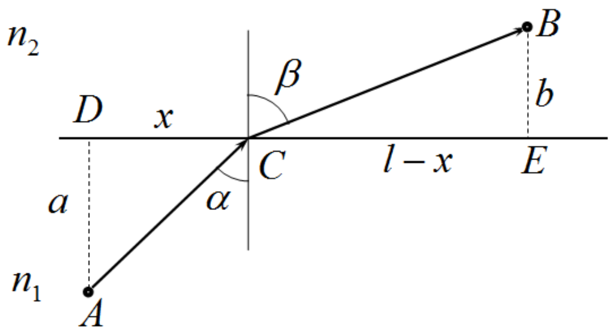
**2.4.3** Геометрическая оптика является приближением волновой оптики. Поэтому принцип таутохронизма можно обосновать следующим образом:

- Каждому лучу можно поставить в соответствие некоторую волну.
- Если все эти волны проходят от источника до изображения за одно и тоже время, то фазы этих волн одинаковы;
- В результате интерференции в точке изображения реализуется максимум интенсивности.

**Часть 3. Принцип Ферма**

**Задача 3.1**

**3.1** Пусть луч идет от точки $A$ к точке $B$ (см. рис.), преломляясь на границе раздела сред в некоторой точке $C$. Положение этой точки задается расстоянием $x$ от точки $D$. Расстояние $DE$ обозначим $l$, тогда расстояние $CE$ равно $(l-x)$. Время движения света по пути $ACB$ равно




$$\tau(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c/n_1}+\frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{c/n_2}=\frac{n_1\sqrt{a^2+x^2}+n_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{c}\,. \tag{23}$$

По принципу Ферма при движении по истинной траектории это время минимально. Чтобы найти экстремум функции (23), необходимо вычислить производную и приравнять ее к нулю:

$$\tau'(x) = \left(n_1\sqrt{a^2+x^2} + n_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}\right)' = \\ = \frac{2n_1 x}{2\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{2n_2(l-x)}{2\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = 0 \tag{24}$$

Но, как следует из рисунка,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin\alpha; \quad \frac{(l-x)}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = \sin\beta. \tag{25}$$

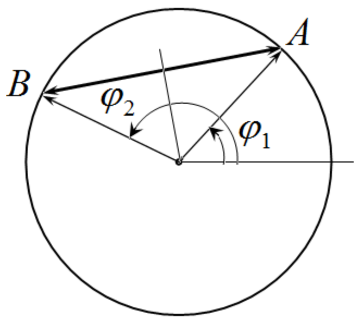
Поэтому из формул (24) – (25) следует закон преломления света:

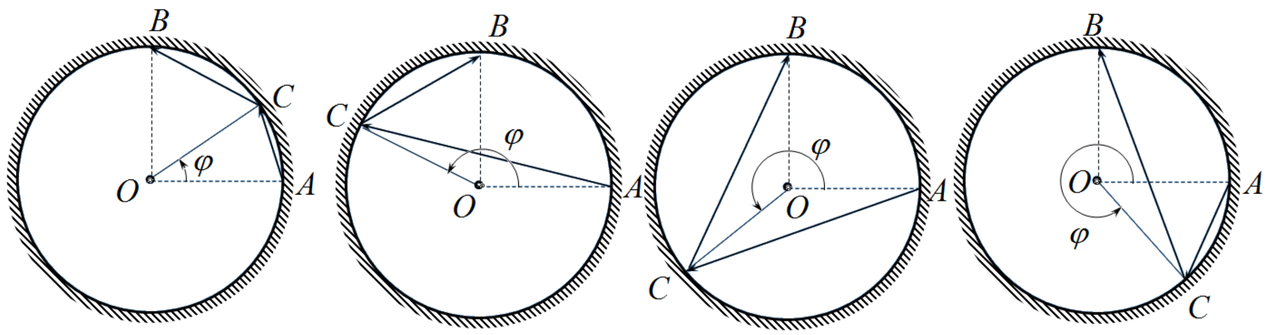
$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta. \tag{26}$$

**Задача 3.2**

**3.2.1** Для расчета длины траектории воспользуемся простой формулой для длины хорды $l = |AB|$, которую в общем виде можно записать следующим образом:

$$l = 2R\left|\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right|. \tag{27}$$




Длина траектории луча с одним отражением от внутренней поверхности $ACB$ равна сумме длин двух хорд, поэтому может быть описана формулой

$$L = 2R\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \left|\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) \tag{28}$$

Перепишем эту формулу для двух интервалов значений угла $\varphi$.

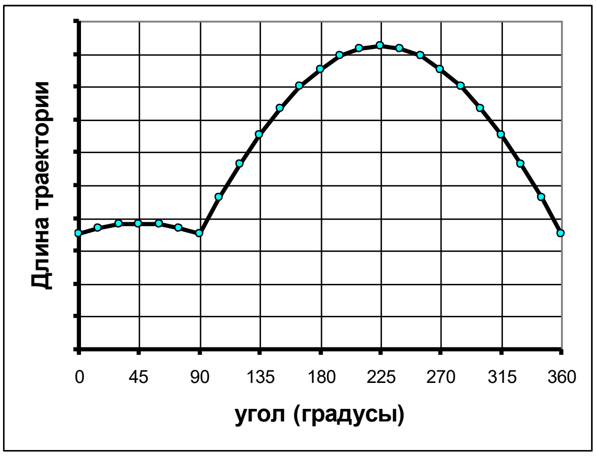
При $\varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$L = 2R\sin\frac{\varphi}{2} + 2R\sin\frac{\pi/2 - \varphi}{2} = 4R\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{29}$$

При $\varphi \geq \dfrac{\pi}{2}$

$$L = 2R\sin\frac{\varphi}{2} + 2R\sin\frac{\varphi - \pi/2}{2} = 4R\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right). \qquad (30)$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке.




**3.2.2** Истинные траектории луча, удовлетворяющие закону отражения света, реализуются при

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}. \qquad (31)$$

При этих значениях длины траекторий максимальны.

**Задача 3.3** Выводы из проделанной работы.

**3.3.1** Принцип Ферма неоходимо уточнить следующим образом:
*свет выбирает из множества путей между двумя точками тот путь, который потребует экстремального (минимального или максимального) или стационарного (не зависящего от траектории) времени.*
Математически это утверждение можно выразить таким образом. Пусть длина траектории описывается некоторой функцией от параметра $\xi$, определяющего траекторию, $L(\xi)$. Тогда истинным траекториям соответствуют значения параметров $\xi^*$, для которых производная обращается в нуль:

$$L'(\xi^*) = 0 \qquad (32)$$

**3.3.2** Обоснование принципа Ферма следует из волновых свойств света. Вблизи точки экстремума при изменении параметра от стационарного значения $\xi^*$ на малую величину $\Delta\xi$ длина траектории изменяется на величину порядка $(\Delta\xi)^2$. Поэтому вблизи точки экстремума существует широкий диапазон траекторий, длины которых изменяются на очень малую величину. Волны, распространяющиеся вдоль этих траектория приходят в точку наблюдения с малой разностью фаз, поэтому для них выполняется условие максимума интерференции.