

Условие

Прочтите это в первую очередь!

1. Полный комплект состоит из одного задания, на выполнение которого отводится пять часов.
2. Ознакомьтесь с перечнем оборудования – проверьте его наличие и работоспособность. При отсутствии оборудования или сомнения в его работоспособности немедленно обращайтесь к представителям оргкомитета.
3. Для Вас приготовлены Листы ответов, в которых отведены поля для занесения выводов формул, полученных результатов, комментариев по ходу выполнения работы. Для результатов измерений в Листах ответов подготовлены Таблицы, для построения графиков – их бланки. Листы ответов – это ваш чистовик. Для черновиков используйте чистые рабочие листы.
4. Так как ваши работы сканируются, пишите только на одной стороне всех листов. Подписывать листы запрещается.
6. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.



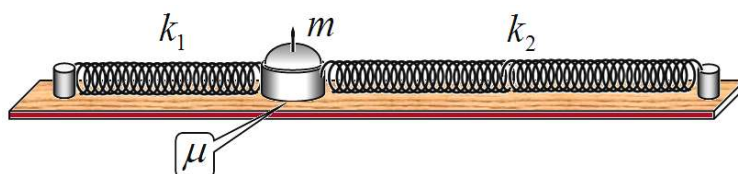
Желаем успехов в выполнении данных заданий!

Пакет содержит: - титульный лист (1 стр.); - условие экспериментального задания (3 стр.); - листы ответов (6 стр.);

Экспериментальное задание. Зона застоя

В данном задании Вам предстоит исследовать некоторые эффекты, связанные с проявлением сил упругости и сил трения.

Приборы и оборудование: экспериментальная установка для изучения явления застоя.



Экспериментальная установка состоит из деревянной линейки с миллиметровой шкалой, на концах которой закреплены два упора. К упорам прикреплены две пружины.

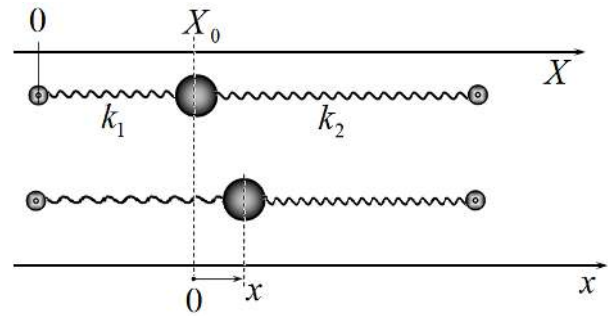
К пружинам прикреплена массивная шайба. Шайба может скользить по линейке. Пружины изготовлены из одного материала, вика пружин одинаковы, пружины отличаются только длиной. Обозначим жесткость короткой пружины k_1 , жесткость длинной пружины k_2 . Суммарная длина пружин нерастянутых меньше чем расстояние между упорами, поэтому в установке обе пружины растянуты. Массу шайбы обозначим m , коэффициент трения шайбы о линейку - μ .

Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \frac{м}{с^2}$.

Масса шайбы будет указана при выполнении работы. Разбирать установку, снимать ее отдельные детали запрещено!

Для описания положения шайбы на линейке введем две оси координат. Одна шкала X совпадает со шкалой на линейке.

Обозначим X_0 координату шайбы в положении равновесия, когда линейка расположена горизонтально. Строго говоря, эта точка является единственным положением равновесия шайбы, если пренебречь силой трения шайбы. Далее для краткости будем называть эту точку **положением равновесия**.



Вторая ось x также направлена вдоль линейки, но ее начало отсчета совпадает с положением равновесия шайбы, поэтому координата x является смещением от положения равновесия, она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Ось направлена в сторону длинной пружины.

Часть 1. Чисто теоретическая

В данной части считаем, что установка располагается горизонтально.

При смещении шайбы от положения равновесия на некоторую величину x на шайбу начинает действовать результирующая силы упругости (сумма сил упругости двух пружин). Обозначим удлинения пружин, когда шайба находится в положении равновесия, - Δl_1 и Δl_2 , соответственно.

1.1 Покажите, что проекция суммарной силы упругости, действующая на шайбу, при ее смещении на величину x определяется по формуле

$$F = -kx. \quad (1)$$

где k - постоянный коэффициент, который далее мы будем называть жесткостью установки.

1.2 Выразите жесткость установки через значения жесткости обеих пружин k_1, k_2 .

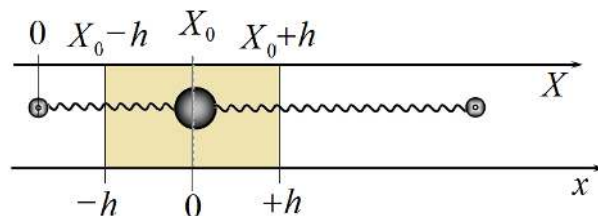
1.3 Покажите, что изменение потенциальной энергии пружин ΔU при смещении шайбы на величину x может быть рассчитано по формуле

$$\Delta U = \frac{kx^2}{2}, \quad (2)$$

независимо от начальных деформаций пружин в положении равновесия Δl_1 и Δl_2 .

Наличие трения приводит к тому, что существует интервал координат $[X_0 - h, X_0 + h]$, в пределах которой шайба может находиться в покое. Эта область называется зоной застоя. Назовем величину h - полушириной зоны застоя.

1.4 Выразите полуширины зоны застоя h через жесткость установки k , массу шайбы m и коэффициент трения μ .



Если шайбу вывести из положения равновесия и отпустить, то она начнет двигаться вдоль линейки до остановки, при этом она может несколько раз изменить направление движения (совершать затухающие колебания). Обозначим координату начального положения шайбы x_S , а координату ее окончательной остановки x_F .

1.5 Постройте график зависимости координаты остановки шайбы x_F от ее начального положения x_S . При построении этого графика считайте известной только величину h (полуширину зоны застоя). Получать общую формулу для зависимости $x_F(x_S)$ не требуется.

Часть 2. Экспериментальная - подготовительная.

Установку можно располагать произвольным образом (горизонтально, вертикально, под углом к горизонту).

2.1 Проведите необходимые измерения, на основании которых определите численные значения следующих характеристик установки: - координату точки равновесия X_0 ; - полуширину зоны застоя h ; - жесткость установки k ; - коэффициент трения μ .

Укажите, как Вы проводили измерения, какие величины непосредственно измеряли, по каким формулам рассчитывали параметры установки, полученные численные значения, оценку погрешности ваших измерений. Можете предложить (и обязательно реализовать) несколько методов определения этих величин. Порядок измерения параметров остановки может определять самостоятельно. Рекомендуется координаты точек измерять в мм.

Часть 3. Экспериментальная – зона застоя.

Проведите эксперимент, описанный вами теоретически в п. 1.5. В этом эксперименте установка должна располагаться горизонтально.

3.1 Отклоните шайбу на некоторое расстояние от положения равновесия (обозначьте начальную координату x_S) и отпустите. Измерьте координату точки остановки x_F . Если в процессе движения шайба совершает несколько промежуточных остановок (т.е. совершает затухающие колебания), то измерьте координаты всех точек промежуточных остановок $x_1, x_2...$

Результаты измерений занесите в Таблицу 1 в Листах ответов. Измерения проведите с шагом изменения x_0 не более 10 мм.

3.2 Постройте график полученной экспериментальной зависимости $x_F(x_S)$.

3.3 Сравните полученный график теоретической зависимостью: - укажите наиболее существенные различия, укажите возможные причины полученных расхождений.

3.4 Рассчитайте максимальное ускорение, с которым двигалась шайба в ваших экспериментах

3.5 Для каждого значения x_S рассчитайте, какой путь S прошла шайба до полной остановки и изменение энергии пружины в относительных единицах $\Delta\tilde{U}$.

3.6 Постройте график зависимости изменения потенциальной энергии пружин (в относительных единицах $\Delta\tilde{U}$) от пути пройденного шайбой.

Используйте все полученные экспериментальные данные. При расчетах не используйте значения жесткости k и коэффициент трения μ . Поэтому вам необходимо придумать величину пропорциональную энергии пружины, которую можно рассчитать на основе измерений координат. Результаты расчетов занесите в последние столбцы Таблицы 1.

3.7 Используя полученный график, рассчитайте численное значение величины $z = 2\frac{\mu mg}{k}$.

Укажите смысл этой величины. Укажите, согласуются ли результаты этого эксперимента с результатами предыдущих экспериментов.

Решение

Задание 1. Зона застоя. (Решение)

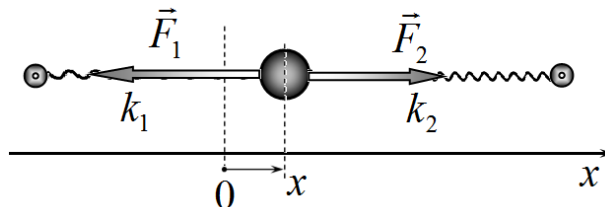
Часть 1. Чисто теоретическая

1.1 Так как удлинения пружин, когда шайба находится в положении равновесия, равны Δl_1 и Δl_2 . Тогда при смещении шайбы на величину x удлинения пружин станут равными

$$\begin{aligned}\Delta L_1 &= \Delta l_1 + x \\ \Delta L_2 &= \Delta l_2 - x\end{aligned}\tag{1}$$

Следовательно, суммарная проекция силы упругости будет равна

$$\begin{aligned}F_x &= F_2 - F_1 = k_2(\Delta l_2 - x) - k_1(\Delta l_1 + x) = \\ &= (k_2\Delta l_2 - k_1\Delta l_1) - (k_2 + k_1)x\end{aligned}\tag{2}$$



Первое слагаемое в этом выражении равно нулю, как условие равновесия при $x = 0$. Поэтому окончательно получаем, что

$$F_x = -(k_2 + k_1)x \quad (3)$$

что совпадает с формулой, приведенной в условии.

1.2 Из формулы (3) следует, что жесткость установки равна

$$k = k_2 + k_1 \quad (4)$$

1.3 Запишем выражение для изменения потенциальной энергии двух пружин и преобразуем его:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{k_1(\Delta l_1 + x)^2}{2} - \frac{k_1(\Delta l_1)^2}{2} + \frac{k_2(\Delta l_2 - x)^2}{2} - \frac{k_2(\Delta l_2)^2}{2} = \\ &= k_1\Delta l_1 \cdot x + \frac{k_1x^2}{2} - k_2\Delta l_2 \cdot x + \frac{k_2x^2}{2} = \\ &= (k_1\Delta l_1 - k_2\Delta l_2)x + \frac{(k_1 + k_2)x^2}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Первое слагаемое равно опять обращается в нуль (условие равновесия!), поэтому окончательно получаем

$$\Delta U = \frac{(k_1 + k_2)x^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \quad (6)$$

что и требовалось доказать.

1.4 На границах зоны застоя (при $x = \pm h$) максимально возможная сила трения покоя уравнивает силу упругости, поэтому

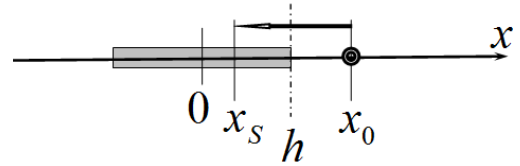
$$\mu mg = kh \quad (7)$$

откуда следует, что полуширина зоны застоя равна

$$h = \frac{\mu mg}{k} \quad (8)$$

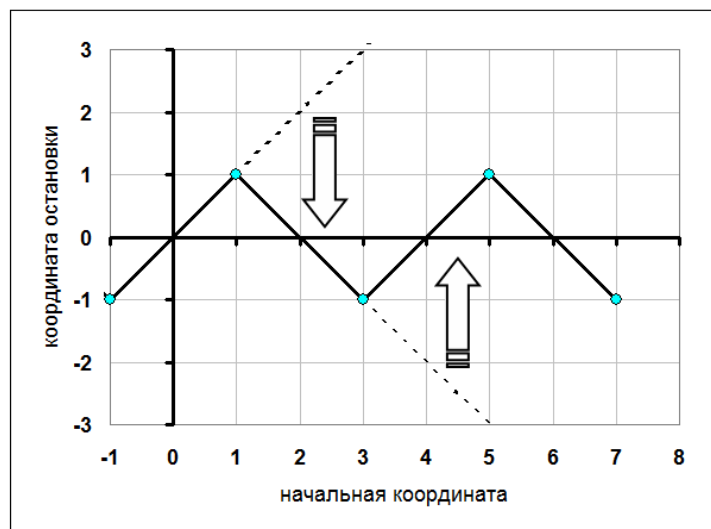
1.4 Очевидно, что функция $x_F(x_S)$ является нечетной: при изменении знака начальной координаты изменяется знак координаты точки останова. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x_0 > 0$. Если начальная координата x_0 лежит в зоне застоя $x_S \in [-h, +h]$, то шайба не сдвинется с места, поэтому в этой области

$$x_F = x_S \quad (9)$$



Рассмотрим случай, когда $x_S > h$. Запишем уравнения закона сохранения энергии между начальным и конечным положением шайбы (изменение потенциальной энергии пружины равно работе силы трения):

$$\frac{kx_S^2}{2} - \frac{kx_F^2}{2} = \mu mg(x_0 - x_S). \quad (10)$$



Из этого уравнения следует, что

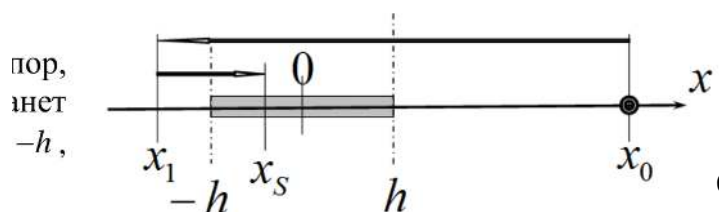
$$x_F = 2\frac{\mu mg}{k} - x_S = 2h - x_S. \quad (11)$$

Т.е. отклонение от положения равновесия уменьшается на ширину зоны застоя $2h$. Это соотношение можно записать в виде

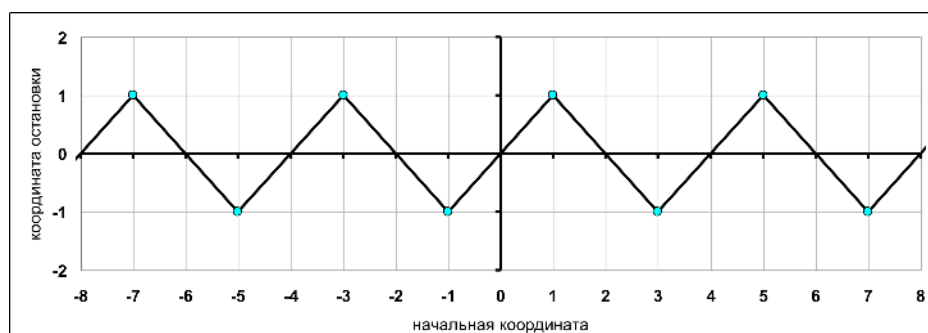
$$x_S - h = h - x_F. \quad (12)$$

Это выражение показывает, что точка остановки зеркально отражает начальную точку относительно границы зоны застоя. Поэтому при построении графика можно провести такое же отражение!

Формула (11) будет справедлива до тех пор, пока координата точки остановки не станет меньше левой границы зоны застоя $x_F > -h$, или что равносильно



$x_S < 3h$. Если начальная координата превысит это значение $x_S < 3h$, то шайба в процессе движения проскочит зону застоя и остановится в некоторой точке с координатой x_1 . После этого она начнет движение в противоположном направлении. Не повторяя проведенных рассуждений, заметим, что координата следующей остановки зеркально отразится относительно левой границы зоны застоя. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока очередная точка остановки не окажется в зоне застоя.



Таким образом, теоретический график зависимости координаты точки окончательной остановки шайбы от ее начальной координаты представляет собой ломаную линию, показанную на рисунке. На графиках по осям отложены значения $\frac{x}{h}$.

Часть 2. Экспериментальная - подготовительная.

2.1 Масса шайба равна $m = (10,0 \pm 0,1)\text{г}$.

Измерения параметров установки можно проводить различными способами, но во всех экспериментах непосредственно измеряются координаты центра шайбы. Поэтому приборная погрешность этих измерений может быть принята равной цене деления линейки

$$\Delta x_{\text{пр.}} = 1\text{мм.} \quad (13)$$

Наличие случайной ошибки может увеличить полную погрешность

Предлагается следующая последовательность проведения измерений. Располагаем прибор горизонтально и, смещая шайбу по линейке находим границы зоны застоя (т.е. предельные положения шайбы, когда она может находиться в положении равновесия):

$$\begin{aligned} X_1 &= (144 \pm 1)\text{мм} \\ X_2 &= (164 \pm 1)\text{мм} \end{aligned} \quad (14)$$

Точка положения равновесия находится на середине зоны застоя, поэтому ее координата равна

$$X_0 = \frac{X_1 + X_2}{2} = (149 \pm 1)\text{мм.} \quad (15)$$

Полуширина зоны застоя равна

$$h = \frac{X_2 - X_1}{2} = (15 \pm 1) \text{ мм.} \quad (16)$$

Располагаем прибор вертикально, измеряем смещение шайбы относительно положения равновесия $\Delta X = (225 - 149) \text{ мм} = (76 \pm 2) \text{ мм}$. Затем по формуле, следующей из условия равновесия шайбы, рассчитываем коэффициент жесткости

$$k = \frac{mg}{\Delta x} = (1,3 \pm 0,2) \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (17)$$

Примечание. Можно попытаться измерить смещения шайбы при двух вертикальных положениях. По этим измерениям найти координату точки равновесия (по формуле аналогичной (15)), а затем рассчитать коэффициент жесткости. Однако в таком эксперименте возможно, что короткая пружина полностью сожмется, что сделает второе измерение невозможным.

Коэффициент трения можно рассчитать, зная границы зоны застоя и найденное значение жесткости установки

$$\mu = \frac{k(X_2 - X_1)}{2mg} = 0,20 \pm 0,08. \quad (18)$$

Примечание. Допустимо проведение экспериментов с наклонным положением прибора.

Часть 3. Экспериментальная – зона застоя.

3.1 Результаты измерений зависимости координаты точки окончательной остановки x_S от начальной координаты x_0 приведены в Таблице 1.

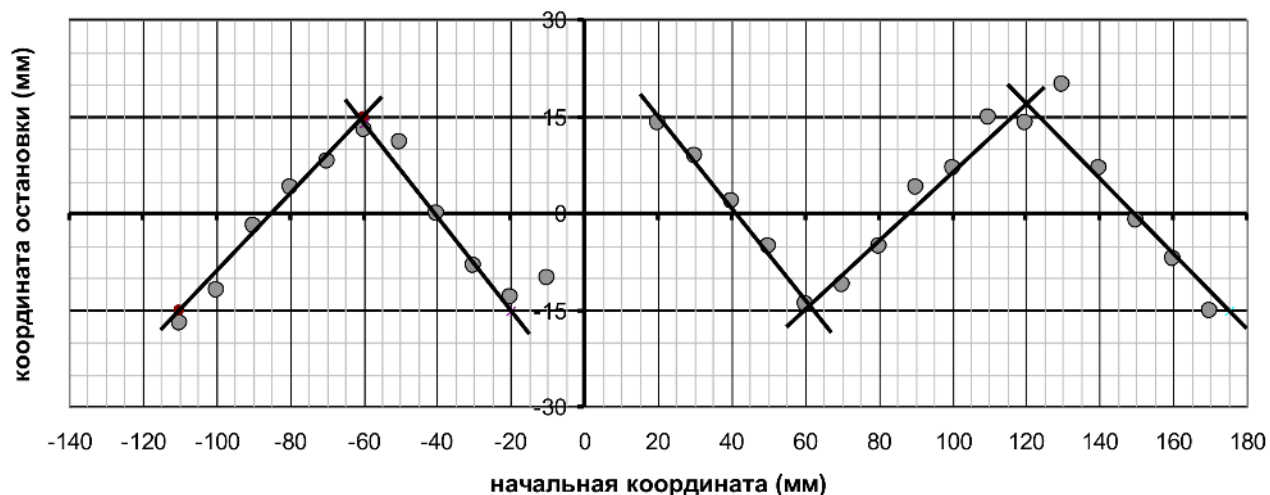
Таблица 1. Результаты измерений

координаты точек (мм)							
X_S	X_1	X_2	X_F	x_S	x_F	S , мм	$\Delta\tilde{U}$
139	139	139	139	-10	-10	0	0
129	136	136	136	-20	-13	7	0,23
119	141	141	141	-30	-8	22	0,84
109	149	149	149	-40	0	40	1,60
99	160	160	160	-50	11	61	2,38
89	166	162	162	-60	13	81	3,43
79	180	157	157	-70	8	124	4,84
69	188	153	153	-80	4	154	6,38
59	195	147	147	-90	-2	184	8,10
49	205	137	137	-100	-12	224	9,86
39	213	132	132	-110	-17	255	11,81
169	163	163	163	20	14	6	0,20
179	158	158	158	30	9	21	0,82
189	151	151	151	40	2	38	1,60
199	144	144	144	50	-5	55	2,48
209	135	135	135	60	-14	74	3,40
219	123	138	138	70	-11	111	4,78
229	116	144	144	80	-5	141	6,38
239	110	153	153	90	4	172	8,08
249	100	156	156	100	7	205	9,95
259	90	164	164	110	15	243	11,88
269	86	176	163	120	14	286	14,20
279	77	180	169	130	20	316	16,50
289	65	190	156	140	7	383	19,55
299	57	200	148	150	-1	437	22,50
309	48	210	142	160	-7	491	25,55
319	39	218	134	170	-15	543	28,68

В таблице приведены: X_S - начальная координата шайбы по шкале линейки; X_1 , X_2 - координаты промежуточных остановок (если они есть) по шкале линейки; X_F - координата окончательной остановки по шкале линейки; x_S , x_F - координаты начальной и конечной точек относительно положения равновесия X_0 :

$$x_{S,F} = X_{S,F} - X_0. \quad (19)$$

3.2 График полученной зависимости с набором аппроксимирующих отрезков прямых показан на рисунке.



3.3 Качественно график похож на график теоретической зависимости — четко видна «зигзагообразная» линия. Самым существенным отступлением от теоретической зависимости являются существенные отклонения «точек изломов». Теоретически они должны отстоять на ширину зоны застоя, т.е. 15 мм. На экспериментальном графике расстояния между этими точками значимо больше (превышают 20 мм, максимальное — даже 60 мм). Теоретически это расстояние равно ширине зоны застоя. Однако эксперимент не подтверждает этот вывод. По-видимому, основной причиной таких различий является различие между коэффициентом трения покоя (именно он измерялся в описанных выше экспериментах) и коэффициентом трения скольжения, который определяет путь шайбы между двумя последовательными остановками. Обычно коэффициент трения скольжения меньше коэффициента трения покоя, что и объясняет полученные данные.

3.4 Максимальное ускорение шайба имеет при максимальном смещении от положения равновесия. В проведенных экспериментах это отклонение равно $x_{\max} = 170$ мм, поэтому на основании второго закона Ньютона можно рассчитать:

$$a_{\max} = \frac{kx_{\max}}{m} - \mu g \approx 20 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad (20)$$

что в два раза превышает ускорение свободного падения.

3.5 Путь, пройденный шайбой до полной остановки, можно рассчитать по формуле

$$S = \sum_i |X_i - X_{i-1}|. \quad (21)$$

где X_i - координаты последовательных остановок шайбы. Результаты таких расчетов приведены в Таблице 1.

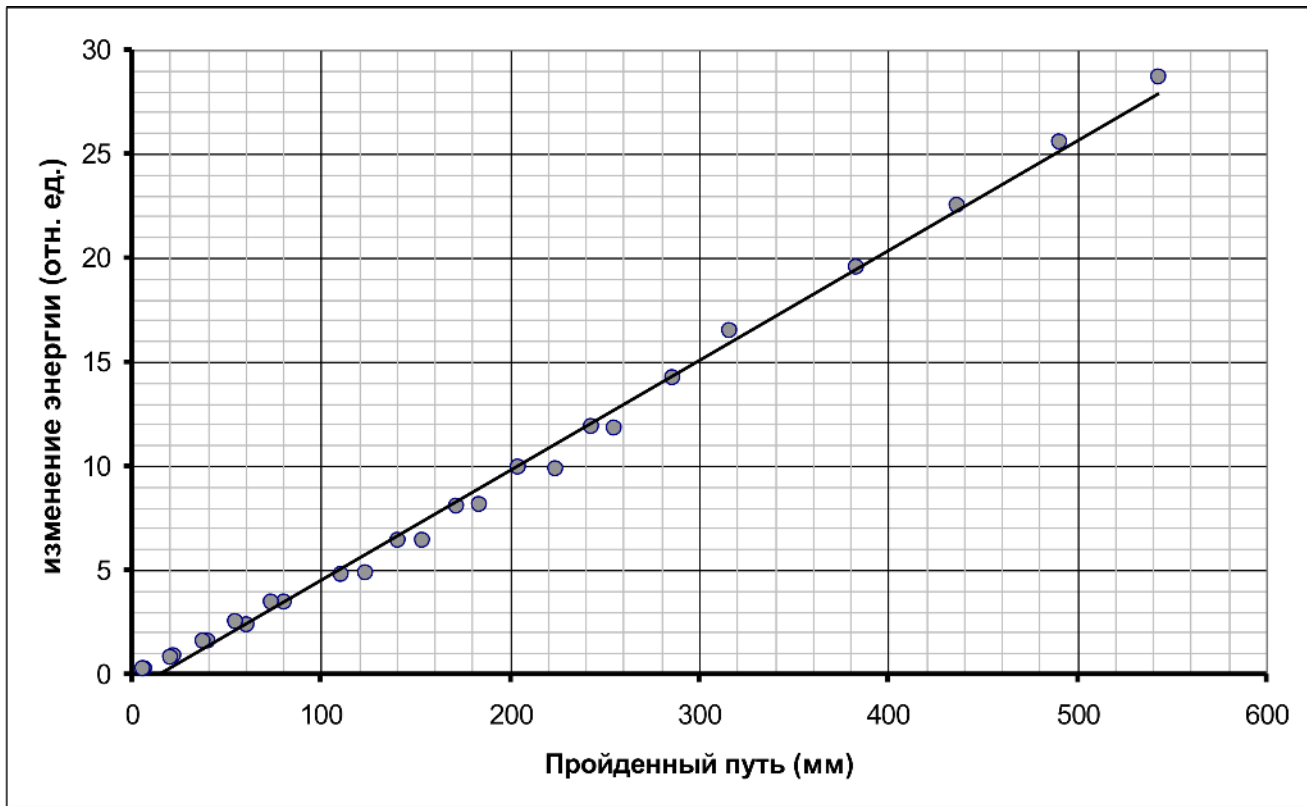
3.6 Изменение потенциальной энергии пружин следует рассчитывать по формуле

$$\Delta U = \frac{k}{2} (x_S^2 - x_F^2), \quad (22)$$

В качестве изменения энергии в относительных единицах, можно взять разность квадратов начального и конечного отклонений. В таблице приведены результаты расчетов величин

$$\Delta\tilde{U} = \frac{x_S^2 - x_F^2}{1000} \quad (23)$$

Мы разделили на 1000, чтобы оперировать с меньшими числами. График зависимости $\Delta\tilde{U}$ от пройденного пути S показан на рисунке.



3.7 Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{k}{2} (x_S^2 - x_F^2) = \mu mgS \Rightarrow (x_S^2 - x_F^2) = 2 \frac{\mu mg}{k} S. \quad (24)$$

Из построенного графика можно найти коэффициент наклона графика $a = 0,053$. Простой пересчет к одним единицам измерения дает следующее значение коэффициента пропорциональности в функции (24)

$$2 \frac{\mu mg}{k} = 53 \text{ мм}. \quad (25)$$

Эта величина показывает, на сколько уменьшается отклонение от положения равновесия между двумя последовательными остановками шайбы.