

Условие

Задание 3. Теплокровный сферический кот.



Живые организмы могут существовать в достаточно узком температурном диапазоне. Так, например, нормальная температура человека примерно равна $36,5^\circ$. повышение температуры всего на 5° свидетельствует о серьезном заболевании. В каждом организме действуют сложные механизмы терморегуляции, позволяющие поддерживать температуру тела постоянной. В данном задании Вам предстоит проанализировать некоторые проблемы, связанные с терморегуляцией живых теплокровных организмов, используя простые модели.

Будем считать, что исследуемое существо имеет форму однородного шара (далее будем называть его сферическим котом). Внутри тела этого кота в результате постоянно происходит выделение теплоты. Теплопроводность тела высока, поэтому можно считать, что температура во всех его точках одинакова, но может изменяться с течением времени.

Во всех задачах этого задания под температурой тела подразумевается установившаяся температура, которую имеет тело кота после установления теплового равновесия.

Теоретическое введение.

1. Мощность теплоты, выделяющейся внутри сферического кота постоянна (т.е. не зависит от температуры тела) и пропорциональна его объему:

$$W = wV, \quad (1)$$

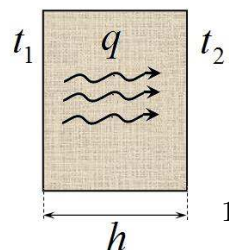
где w - некоторая постоянная величина (тепловыделение), одинаковая для всех котов, независимо от их размеров, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - объем шара, R - радиус шара. Тепловыделение w живых существ может зависеть от температуры.

2. Мощность теплоты, уходящей в окружающую среду с любой поверхности пропорциональна разности температур поверхности t_x и окружающей среды t_0 , кроме того, она пропорциональна площади поверхности S :

$$q = \beta S(t_x - t_0) \quad (2)$$

где β - известная постоянная величина (называется коэффициент теплоотдачи, зависящей от свойств окружающей среды, т.е. воздуха). Площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$.

3. Согласно закону Фурье плотность потока теплоты q (количество теплоты протекающей в единицу времени через площадку площади S) через пластинку пропорциональна разности температур на сторонах пластинки и определяется формулой



$$q = \gamma \frac{t_1 - t_2}{h} S, \quad (3)$$

здесь γ - постоянный коэффициент теплопроводности материала пластинки, h - толщина пластинки

4. Как вам предстоит показать в дальнейшем, что мощность потока теплоты, уходящей в окружающую среду (даже при наличии одежды) пропорциональна разности температур тела и окружающей среды

$$q = \alpha(t - t_0). \quad (4)$$

коэффициент пропорциональности α в данной формуле называется коэффициентом теплопередачи. Для голого кота этот коэффициент равен $\alpha = \beta S$.

Часть 1. Спящие коты

В этой части будем считать, что мощность тепловыделения w постоянна, т.е. не зависит от температуры и одинакова для котов любых размеров.

Температура окружающей среды равна $t_0 = 20^\circ\text{C}$, при этом установившаяся температура тела голого кота радиуса R_0 равна $t_1 = 36^\circ\text{C}$.

1.1 Почему маленькие дети больше мерзнут?

1.1 Рассчитайте, чему будет равна установившаяся температура голого котенка t_2 , радиус которого в два раза меньше, чем R_0 .

1.2 Почему «греет» шуба?

Благодаря одежде, надетой на котенка, коэффициент теплопередачи уменьшился в 2 раза.

1.2.1 Рассчитайте, чему будет равна установившаяся температура t_3 одетого котенка.

Покажите, что одежда действительно может изменить коэффициент теплопередачи.

Обозначим коэффициент теплопередачи голого кота - α_0 . Будем считать, что одежда является тонким слоем теплоизоляционного материала с коэффициентом теплопроводности γ толщины h (которая значительно меньше радиуса кота $h \ll R$). Можно считать, что тепловой контакт между телом кота и нижней поверхностью одежды хороший, потому их температуры равны. Температура верхнего слоя одежды отличается от температуры воздуха.

1.2.2 Покажите, что коэффициент теплопередачи одетого кота тоже может быть описан формулой $q = \alpha(t - t_0)$, но с другим коэффициентом пропорциональности α_1 , отличным от α_0 . Выразите значение этого коэффициента через величины α_0, h, γ

Часть 2. «Живая» модель

В данной части Вам необходимо проанализировать жизнь кота, в рамках более реальной модели. Размер кота остается неизменным. Примем, что мощность тепловыделения этого кота зависит от температуры: она принимает максимальное значение, при некоторой оптимальной температуре t_{opt} и монотонно уменьшается при отклонении температуры от оптимального значения (когда становится очень холодно или слишком жарко). Жизнь кота возможна, если его температура лежит в диапазоне от минимальной температуры $t_{\text{min}} = 30^\circ$ до максимальной температуры $t_{\text{max}} = 50^\circ$. Если температура кота выходит из этого диапазона, кот умирает.

Зависимость мощности тепловыделения от температуры t в указанном диапазоне описывается функцией

$$W(t) = A(t - t_{\text{min}})(t_{\text{max}} - t), \quad (5)$$

где A - постоянная величина. Вне этого температурного диапазона $W = 0$.

Известно, что при температуре воздуха $t_0^* = 20^\circ$ температура голого кота является оптимальной. В пунктах задания 2.1 – 2.5 кот остается голым, т.е. коэффициент теплоотдачи α_0 остается постоянным.

2.1 Найдите оптимальную температуру кота t_{opt} .

Предложите такую нормировку мощностей тепловыделения $\bar{W} = \frac{W}{C}$ и теплоотдачи $\bar{q} = \frac{q}{C}$, чтобы значения $\bar{W}(t)$, $\bar{q}(t)$ можно было рассчитать численно.

2.2 Укажите, что следует взять в качестве нормировочной постоянной C . Укажите физический смысл этой постоянной. Запишите формулы для зависимостей $\bar{W}(t)$, $\bar{q}(t)$. Укажите численные значения параметров этих функций. **2.3** На одном бланке постройте: точный график зависимости $\bar{W}(t)$ и график зависимости $\bar{q}(t)$ при температурах окружающей среды $t_0^* = 20^\circ$.

Далее в пунктах 2.4 - 2.6 приведите графическую иллюстрацию решения, то есть постройте графики зависимостей $\bar{W}(t)$, $\bar{q}(t)$ при указанных значениях параметров. В этих пунктах допускается численное решение уравнений (без получения окончательной формулы).

2.4 Рассчитайте установившуюся температуры голого кота, если температура окружающего воздуха равна а) $t_0 = 35^\circ$; б) $t_0 = 25^\circ$. **2.5** Рассчитайте, в каком диапазоне температур воздуха (от $t_{0\text{min}}$ до $t_{0\text{max}}$) может жить голый кот.

Чтобы не замерзнуть, кот начинает одеваться, изменяя коэффициент теплоотдачи α .

2.6 Предложите такую зависимость коэффициента теплоотдачи $\alpha(t_0)$ от температуры воздуха t_0 (при $t_0 < 20^\circ$), чтобы температура кота оставалась оптимальной, независимо от температуры воздуха. **2.7** Постройте график зависимости $\frac{\alpha(t_0)}{\alpha_0}$ при $0^\circ < t_0 < 20^\circ$. **2.8** Оцените, во сколько раз надо изменить коэффициент теплопередачи, чтобы кот смог выжить при температуре воздуха $t_0 = 0^\circ$

Решение

Задание 3. Теплокровный сферический кот (Решение)

Часть 1. Постоянное тепловыделение.

Основная идея расчета установившейся температуры – выполнение уравнения теплового баланса, когда мощность выделяющейся теплоты равна мощности теплоты, уходящей в окружающую среду

$$W = q. \quad (1)$$

В рассматриваемой в части 1 модели это уравнение имеет вид

$$wV = \beta S(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad w \frac{4}{3} \pi R^3 = \beta \cdot 4\pi R^2(t - t_0). \quad (2)$$

Это уравнение перепишем в виде

$$t - t_0 = \frac{wR}{\beta}. \quad (3)$$

1.1 Из уравнения (3) следует, что разность между установившейся температурой и температурой окружающей среды пропорциональна радиусу тела. Следовательно, температура котенка будет меньше. Запишем уравнение (1) для кота и для котенка

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \frac{wR_0}{\beta} \\ t_2 - t_0 &= \frac{wR_0}{2\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2}. \quad (5)$$

Подстановка численных значений дает следующий результат:

$$t_1 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} = 28^\circ. \quad (6)$$

1.2.1 Запишем уравнения баланса (3) для голого и для одетого котенка

$$t_2 - t_0 = \frac{wR_0}{2\beta_0}$$

$$t_3 - t_0 = \frac{wR_0}{2\frac{\beta_0}{2}} = \frac{wR_0}{\beta_0}. \quad (7)$$

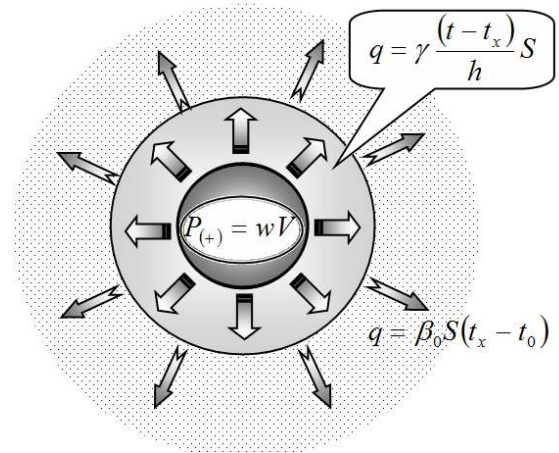
Из этих уравнений следует, что температура одетого котенка станет равной температуре голого кота

$$t_3 = t_1 = 36^\circ \quad (8)$$

1.2.2 В данном случае можно записать «двойного» уравнения баланса: мощность выделяющейся теплоты равна мощности теплоты, проходящей через слой одежды, и равна мощности теплоты уходящей в окружающую среду.

$$wV = \gamma \frac{t - t_x}{h} S = \beta(t_x - t_0)S. \quad (9)$$

Здесь t_x - температура внешней поверхности одежды. Из второй части равенства (9) выразим значение t_x



$$\gamma \frac{t - t_x}{h} S = \beta(t_x - t_0)S \Rightarrow t_x = \frac{at + t_0}{a + 1}. \quad (10)$$

где обозначено $a = \frac{\gamma}{h\beta_0}$. Теперь поток в окружающую среду можно представить в виде:

$$\beta_0(t_x - t_0)S = \beta \left(\frac{at + t_0}{a + 1} - t_0 \right) S = \beta \frac{a}{a + 1} S(t - t_0) \quad (11)$$

Таким образом, мощность потока теплоты от тела кота в окружающую среду пропорционален разности их температур. Полученное выражение формально совпадает с формулой (2), приведенной в условии задачи.

1.2.3 «Новый» коэффициент пропорциональности, как следует из формулы (11), равен

$$\alpha_1 = \beta S \frac{a}{a + 1} = \alpha_0 \frac{\gamma}{\gamma + h\beta_0}. \quad (12)$$

Из этого выражения следует, что при увеличении толщины слоя одежды коэффициент теплопередачи уменьшается, поэтому согласно уравнению (3) температура тела увеличивается. Отметим, что при больших значениях теплопроводности коэффициент теплопередачи остается неизменным и равным α_0 . При малой теплопроводности коэффициент теплопередачи полностью определяется теплопроводностью одежды: $\alpha_1 \approx \frac{\gamma}{h} S$.

Часть 2. «Живая» модель

Основной идеей решения этой части также является уравнение теплового баланса, которое в данной модели имеет вид

$$A(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = \alpha_0(t - t_0), \quad (13)$$

которое является квадратным уравнением, поэтому при известных коэффициентах может быть решено аналитически. **2.1** Как оговорено в условии. при оптимальной температуре мощность тепловыделения максимальна. Зависимость $W(t) = A(t - t_{\min})(t_{\max} - t)$ является квадратичной. Значения нулей этой функции очевидны: это $t_{\min}$ и $t_{\max}$. как известно, вершина параболы находится на середине отрезка между корнями. Следовательно, оптимальная температура котла равна

$$t_{opt} = \frac{1}{2}(t_{\min} + t_{\max}) = 40^\circ. \quad (14)$$

2.2 В уравнении теплового баланса (13) входят две неизвестных константы – коэффициенты пропорциональности A и α_0 . Но это уравнение можно переписать следующим образом

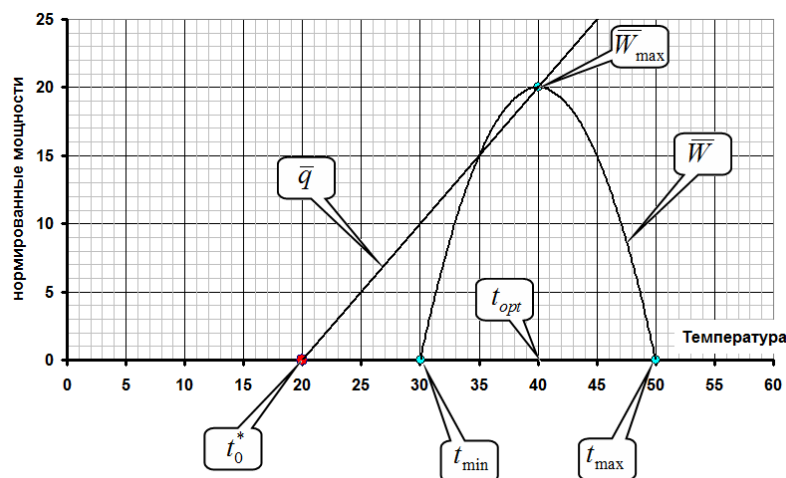
$$\bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = (t - t_0) \quad (15)$$

В этом уравнении одна неизвестная постоянная величина $\bar{A} = \frac{A}{\alpha_0}$, которая может быть найдена из заданного значения $t_0^* = 20^\circ$. Поэтому коэффициент теплоотдачи и служит нормировочной постоянной. Поэтому

$$C = \alpha_0; \quad \bar{W} = \bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t); \quad \bar{q} = t - t_0. \quad (16)$$

Нормировочная постоянная C (она же α_0) равна мощности теплоты, уходящей в окружающую среду, при разности температур поверхности и воздуха равной 1° . Отметим, что нормированные мощности измеряются в градусах Цельсия! В нормированных функциях мощностей имеется только один параметр $\bar{A}$, который рассчитывается по дополнительному условию: при $t_0^* = 20^\circ$ температура котла оптимальна t_{opt} . Тогда из уравнения (15) находим:

$$\bar{A} = \frac{t_{opt} - t_0^*}{(t_{opt} - t_{\min})(t_{\max} - t_{opt})} = 0,20 \frac{1}{^\circ C}. \quad (17)$$



2.3 Построение начнем с примитивного графика функции $\bar{q}(t) = t - t_0$. График — прямая линия с коэффициентом наклона равным единице, и пересекающая ось температур в точке t_0 . График функции $\bar{W}(t) = \bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t)$; является параболой, ветви которой направлены вниз. Нули и положение вершины этой функции были «найжены» ранее. Максимальное значение функции $\bar{W}(t)$ можно рассчитать, подставив значение $t = t_{\text{opt}}$: $\bar{W}(t) = \bar{A}(t_{\text{opt}} - t_{\min})(t_{\max} - t_{\text{opt}}) = 20^\circ$. *Заметим, что это значение можно определить и по функции $\bar{q}(t)$. Эта прямая проходит через вершину параболы. Точка пересечения прямой с осью температур отстоит от температуры вершины параболы на 20° . Так как наклон прямой равен 1, то значение мощности в точке пересечения с параболой тоже равно 20° .*

Так как авторы заданий любезно разрешили проводить промежуточные расчеты, то запишем уравнение теплового баланса «в числах».

$$\bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}(t - 30)(50 - t) = t - t_0$$

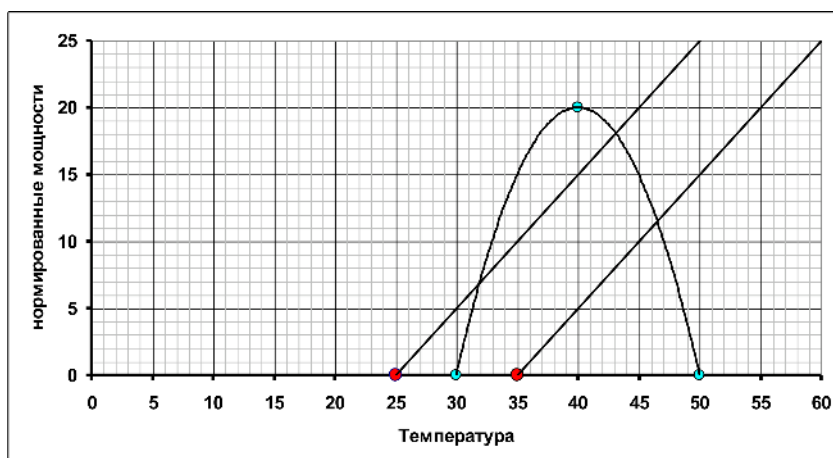
Здесь мы записали значение $\bar{A} = 0,20 = \frac{1}{5}$. После приведения подобных членов, получим

$$t^2 - 75t + (150 - 5t_0) = 0 \quad (18)$$

2.4 Для расчета установившейся температуры, надо решить квадратное уравнение (18) при нужном значении температуры воздуха. Так при $t_0 = 35^\circ$ это уравнение имеет два корня

$$t_{(1)} = 28,5^\circ$$

$$t_{(2)} = 46,5^\circ$$



Первый корень надо отбросить, так как он выходит за пределы диапазона жизнедеятельности.

При $t_0 = 25^\circ$ корнями уравнения (18) являются

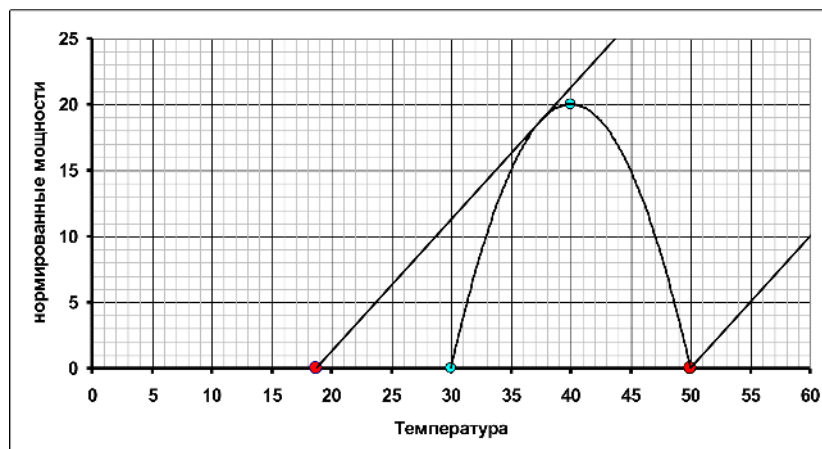
$$t_{(1)} = 32^\circ$$

$$t_{(2)} = 43^\circ.$$

Чтобы понять смысл двух корней дадим графическую иллюстрацию этих решений. На графике «видны» корни уравнения как точки пересечения прямых с параболой. Но эти корни являются точками равновесия, которое может быть, как устойчивым, так и неустойчивым! Легко показать, что только больший корень $t_{(2)}$ (на ниспадающей ветви параболы) является устойчивым. Действительно, при температуре большей $t_{(2)}$ мощность потерь превысит мощность тепловыделения, поэтому кот начнет остывать. Если температура станет меньше значения $t_{(2)}$ ситуация обратная: мощность тепловыделения превышает мощность потерь, поэтому температура будет повышаться. Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что меньший корень неустойчив, поэтому это значение температуры реализовываться не будет.

Таким образом, установившиеся температуры равны:

$$\begin{aligned} \text{при } t_0 = 35^\circ : t &= 46,5^\circ. \\ \text{при } t_0 = 25^\circ : t &= 43^\circ. \end{aligned} \tag{19}$$



2.5 Чтобы найти допустимый диапазон температур воздуха, мысленно построим на графике мощностей тепловыделения и теплопотерь несколько прямых графиков $\bar{q}(t)$ при различных значениях температуры воздуха t_0 . Кот сможет жить при температуре воздуха t_0 , если соответствующая прямая пересекается с параболой $\bar{W}(t)$. На рисунке показаны «крайние»

прямые. Не сложно заметить, что максимальная температура воздуха равна

$$t_{0\max} = t_{\max} = 50^\circ. \quad (20)$$

Минимальной температуре воздуха соответствует прямая, которая является касательной к параболе. Теперь заметим, что в этом случае уравнение баланса (18) имеет единственный корень, при этом дискриминант уравнения обращается в ноль! Записываем значения дискриминанта и приравниваем его к нулю

$$D = \left(\frac{75}{2}\right)^2 - (1500 - 5t_0) = 0 \quad (21)$$

Из этого условия находим минимальную температуру воздуха, при которой кот выживает:

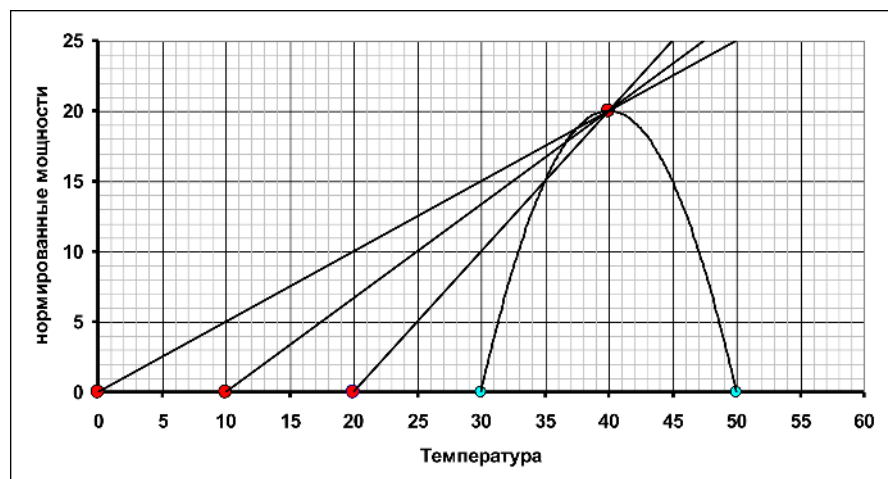
$$t_{0\min} \approx 19^\circ. \quad (22)$$

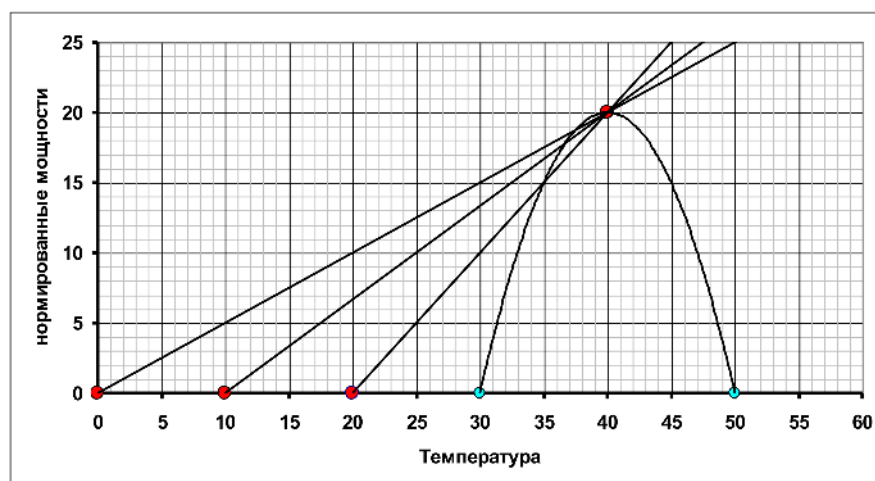
2.6 Уравнение теплового баланса с изменяющимся коэффициентом теплоотдачи в нормированном виде имеет вид

$$\bar{A}(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = \frac{\alpha}{\alpha_0}(t - t_0). \quad (23)$$

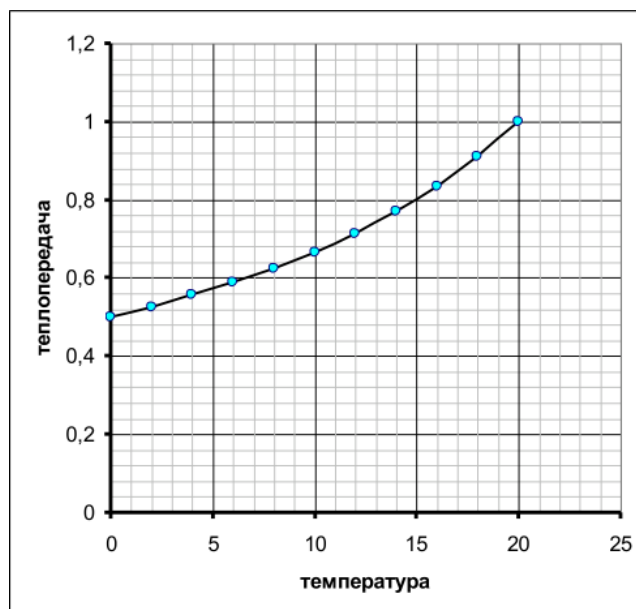
Необходимо, чтобы при любом значении t_0 один из корней этого уравнения был равен $t_{\text{opt}} = 40^\circ$. Вспомним, что при этой температуре, мощность тепловыделения максимальна ($W_{\max} = 20^\circ$). Таким образом, из уравнения (23) получаем, что необходимая зависимость имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\bar{W}_{\max}}{t_{\text{opt}} - t_0} = \frac{20}{40 - t_0}. \quad (24)$$





Изменение коэффициента теплопередачи приводит к изменению наклона прямой, являющейся графиком зависимости $\bar{q}(t)$. Все эти прямые должны проходить через вершину параболы и пересекать ось температур в точке t_0 (см. рисунок)



2.7 График зависимости $\frac{\alpha(t_0)}{\alpha_0}$ показан на рисунке. Понятно, что при понижении температуры теплоотдачи (следовательно, и коэффициент теплопередачи) надо уменьшать.

2.8 Для строго определения нужного коэффициента надо построить касательную к параболе, проходящую через начало координат. однако для оценки можно принять, что прямая отдачи проходит через вершину параболы. В этом случае, искомое значение можно найти по формуле (24) при $t_0 = 0^\circ$.

Поэтому

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0,5 \quad (25)$$

т.е. коэффициент теплоотдачи надо уменьшить в **два** раза.