Республиканская физическая олимпиада 2024 года
(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач
11 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Гигантомания (Решение)

Задача 1.1 Падение камушка.

Расстояние между поверхностями сферического тела и радиус этого тела значительно меньше радиуса Земли, поэтому можно считать, что на тело действует постоянная сила гравитационного притяжения равная

$$F = mg\,. \qquad (1)$$

Такая же по модулю сила действует и на Землю.

Рассмотрим случай а) плотность тела равна плотности Земли.
В этом случае масса тела значительно меньше массы Земли, поэтому смещением Земли можно пренебречь с высокой точностью. Таким образом, мы приходим к простейшей задаче: «тело падает с высоты h …»

1.1.1.а Время падения определяем из закона равноускоренного движения тела (падающего с ускорением свободного падения $a = g$):

$$\frac{g\tau_a^2}{2} = h\,. \qquad (1)$$

Из которого находим

$$\boxed{\tau_a = \sqrt{2\frac{h}{g}} = 4{,}5\,c\,.} \qquad (2)$$

1.1.2.а Скорость падения можно найти различными способами, например, из закона сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = mgh\,. \qquad (3)$$

Откуда следует:

$$\boxed{V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 100} \approx 45\frac{м}{c}\,.} \qquad (4)$$

В случае б), когда масса тела равна массе Земли, необходимо учитывать движения Земли.

Задача существенно упрощается тем обстоятельством, что массы тел равны. При этом движение тела и Земли является «симметричным»: их центры движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю ускорениями и скоростями. Поэтому они столкнутся, когда каждое тело пролетит расстояние $\frac{h}{2}$. Так как силы, действующие на тела, определяются формулой (1), то ускорение каждого из тел по модулю равны g.

1.1.1.б Для расчета времени движения запишем соотношение

$$\frac{g\tau_б^2}{2} = \frac{h}{2}\,. \qquad (1)$$

Из которого находим

$$\boxed{\tau_б = \sqrt{\frac{h}{g}} = 3{,}2\, c.} \qquad (2)$$

1.1.2.б Для расчета скорости каждого тела запишем кинематическое соотношение

$$\frac{h}{2} = \frac{V_1^2}{2g}. \qquad (3)$$

Которое приводит к следующему значению скорости тела в момент столкновения

$$V_1 = \sqrt{gh} \qquad (4)$$

Так тела движутся навстречу друг другу, то относительная скорость в момент столкновения в два раза превышает найденную скорость, т.е.

$$\boxed{V = 2\sqrt{gh} = 63\frac{м}{c}.} \qquad (5)$$

Задача 1.2 Космический корабль.

Отношение высоты полета корабля к радиусу Земли примерно равно 0,03. Так как численные расчеты следует проводить с двумя зачащими цифрами

1.2.1а Если масса корабля значительно меньше массы Земли, то Землю можно считать неподвижной. Тогда корабль движется по окружности, центр которой совпадает с центром Земли. На основании второго закона Ньютона можно записать уравнение движения корабля

$$m\frac{v^2}{R} = mg. \qquad (1)$$

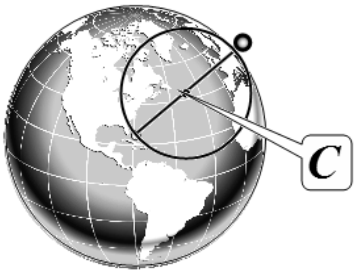
Скорость движения корабля является первой космической скоростью и равна

$$v = \sqrt{gR}. \qquad (2)$$

Следовательно, период обращения корабля равен

$$\boxed{T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 5{,}0\cdot 10^3 c \approx 84 мин.} \qquad (3)$$

1.2.1б Если масса корабля равна массе Земли, то центр Земли и корабль будут вальсировать вокруг общего центра масс. В рассматриваемом случае этот центр тяжести C находится на половине радиуса. Радиус окружности, по которой движутся корабль и центр Земли равен половине радиуса Земли



$$r = \frac{R}{2}. \qquad (4)$$

Поэтому уравнение движения корабля в этом случае будет иметь вид

$$m\frac{v^2}{R/2} = mg. \qquad (5)$$

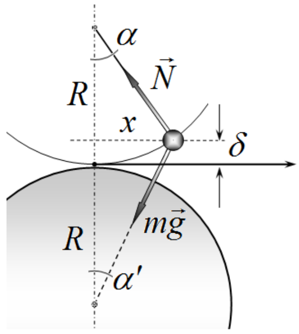
Скорость движения корабля

$$v = \sqrt{g\frac{R}{2}}. \qquad (6)$$

Наконец, период обращения равен

$$T = \frac{2\pi \frac{R}{2}}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} = 3{,}6\cdot 10^3 c \approx 1 час\,. \qquad (7)$$

Задача 1.3 Эталон часа



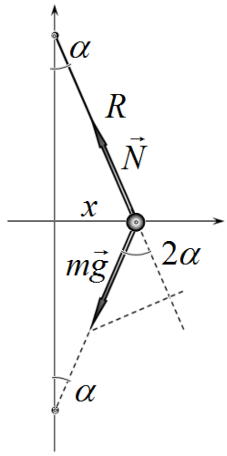
1.3 Рассмотрим траекторию движения маятника, которая является дугой окружности. Высота подъема маятника над поверхностью Земли равно

$$\delta = R - R\cos\alpha\,. \qquad (1)$$

При малых углах отклонения маятника эта величина является малой величиной второго порядка малости, поэтому ей можно пренебречь

$$\delta = R - R\cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}R \approx 0\,. \qquad (2)$$

В рамках этого подхода можно сделать следующие приближения:
- груз маятника движется по горизонтальной прямой;
- указанные на рисунке углы равны $\alpha' = \alpha$;
- модуль силы тяжести не изменяется в ходе движения и равен mg, эта сила направлена к центру Земли.



На следующем рисунке показаны силы, действующие на груз маятника. Проецируя силы на направление нити маятника, получим, что

$$N = mg\cos 2\alpha \approx mg\,. \qquad (3)$$

Здесь опять использовано приближение малых углов, когда с точностью до малых первого порядка $\cos 2\alpha \approx 1$.

Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось x:

$$ma_x = -2mg\sin\alpha \approx -2mg\alpha\,. \qquad (4)$$

Наконец, выразим угол отклонения подвеса маятника через координату груза:

$$\alpha \approx \frac{x}{R}\,. \qquad (5)$$

Из формул (4)-(5) получаем уравнение

$$a_x = -2\frac{g}{R}x \qquad (6)$$

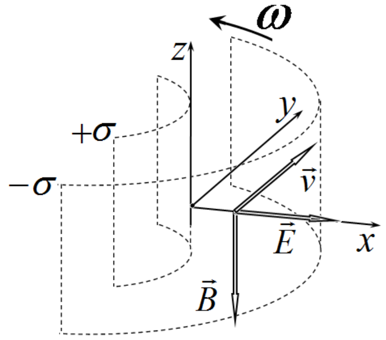
Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 3{,}6\cdot 10^3 c \approx 1{,}0 час\,. \qquad (7)}$$

Задание 2. Магнитное динамо (Решение).

Часть 1. Поле в слое

1.1 Направления требуемых векторов указаны на рисунке.
Вектор $\vec{E}$ - вдоль оси x;
Вектор $\vec{B}$ - в сторону, противоположную оси z;
Вектор $\vec{v}$ - вдоль оси y.



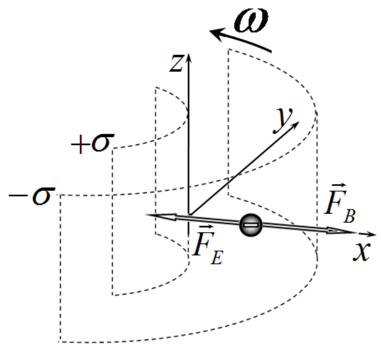
1.2 Формулу для индукции магнитного поля можно получить на основании формулы (2) из условия задачи. Заметим, что величина nI имеет смысл силы тока, приходящейся на единицу длины поверхности цилиндра. При вращении равномерно заряженного цилиндра эта величина может быть представлена в виде

$$nI \Rightarrow \sigma v = \sigma\omega R. \tag{1}$$

Поэтому индукция магнитного поля внутри слоя описывается формулой

$$\boxed{B = \mu_0\sigma\omega R.} \tag{2}$$

1.3 Направления векторов сил, действующих на электрон, показаны на рисунке.



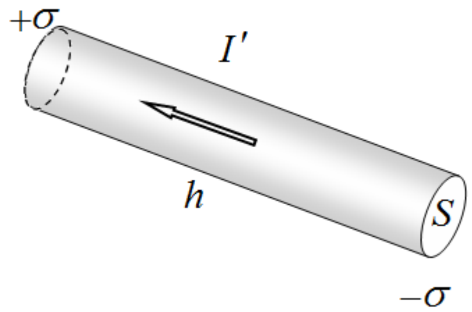
1.4 Модуль электрической силы равен (по определению вектора напряженности поля)

$$\boxed{F_E = eE = e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \tag{3}$$

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца. Так как векторы скорости и индукции поля перпендикулярны, то модуль этой силы равен

$$\boxed{F_B = evB = e(\omega R)\cdot(\mu_0\sigma\omega R) = e\mu_0(\omega R)^2\sigma.} \tag{4}$$

Часть 2. Заряды и токи.



2.1 Очевидно, что изменение зарядов на поверхностях слоя происходит благодаря электрическому току, который протекает поперек выделенного слоя. Выделим между боковыми поверхностями проводящего слоя тонкий цилиндр, ось которого перпендикулярна этим поверхностям. Обозначим площадь поперечного сечения этого цилиндра S, его длина равна толщине слоя h. Изменение заряда на торце цилиндра равно силе тока I', протекающего по цилиндру, т.е.

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = I' \quad (5)$$

Для расчета силы тока можно воспользоваться законом Ома, в котором в качестве напряжения надо взять работу всех сил, действующих на единичный заряд (назовем, эффективное напряжение). В данном случае это «эффективное» напряжение равно

$$U_{эф} = \frac{(F_M - F_E)}{e} h\,. \quad (6)$$

Электрическое сопротивление цилиндра рассчитывается по известной формуле

$$r = \rho \frac{h}{S} \quad (7)$$

Используя выражения для сил (3)-(4), получим

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = \frac{U_{эф}}{r} = \frac{(F_M - F_E)}{e} h \cdot \frac{S}{\rho h} = \frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1\right) S\,. \quad (8)$$

Окончательно, уравнение для изменения плотности зарядов имеет вид:

$$\boxed{\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0}\left(\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1\right). \quad (9)}$$

2.2 Плотность зарядов, следовательно, и индукция поля будут возрастать, если скорость изменения, определяемая уравнением (9), будет положительна, т.е. при

$$\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad V^* = \omega^* R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\,. \quad (10)$$

Известно, что эта формула определяет скорость света в вакууме, что также можно получить, подставляя численные значения электрической и магнитной постоянных:

$$\boxed{V^* = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3{,}0 \cdot 10^8 \, \frac{м}{с}. \quad (11)}$$

Заметим, что этот же результат можно получить из формул (3)-(4), если понять, что для возрастания магнитного поля магнитная сила должна стать больше силы электрической.

2.3 Из формулы (10) следует, что угловая скорость вращения Земли должна стать равной

$$\omega^* R = c \quad \Rightarrow \quad \omega^* = \frac{c}{R}\,. \quad (12)$$

Заметим, что при этом скорость точек на поверхности Земли должна превысить скорость света почти в два раза! Период вращения (т.е. сутки) при этом равен

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega^*}=\frac{2\pi R}{c}\approx 0{,}073\ c\,.} \tag{13}$$

2.4 Оценим численное значение скорости движения выделенного слоя

$$V=\omega R=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi\cdot 3{,}5\cdot 10^6\,м}{24\cdot 3600 c}\approx 2{,}5\cdot 10^2\,\frac{м}{c}\,. \tag{14}$$

Эта величина значительно меньше скорости света. Отношение силы магнитной к силе электрической, действующей на электрон (первое слагаемое в скобках в уравнении (9)) численно равно $\varepsilon_0\mu_0(\omega R)^2=\left(\frac{V}{c}\right)^2\approx 7{,}2\cdot 10^{-13}$. Поэтому этой величиной можно пренебречь.

Тогда уравнение (9) приобретает совсем простой вид

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}=-\frac{\sigma}{\rho\varepsilon_0} \tag{15}$$

Характерное время исчезновения зарядов можно получить, если разделить начальную плотность заряда на скорость его убывания в начальный момент времени, т.е.

$$\boxed{\tau=\frac{\sigma_0}{\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right|_0}=\frac{\sigma_0}{\left(\frac{\sigma_0}{\rho\varepsilon_0}\right)}=\rho\varepsilon_0\approx 1{,}4\cdot 10^{-6}\cdot 8{,}8\cdot 10^{-12}\approx 1{,}2\cdot 10^{-17}\,c\,.} \tag{16}$$

Часть 3. Спасает ли модель масса электрона?

3.1 Учет массы электрона приводит к тому, что необходимо принять во внимание его центростремительное ускорение (или центробежную силу в неинерциальной системе отсчета). Как было показано выше, силой Лоренца в данной задаче можно пренебречь, поэтому условие стационарности зарядов может быть сформулировано в виде: электрическая сила обеспечивает электрону необходимое центростремительное ускорение:

$$m_e\omega^2 R=e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,. \tag{17}$$

Отсюда следует, что стационарное значение плотности заряда равно

$$\boxed{\bar{\sigma}=\frac{m_e}{e}\varepsilon_0\omega^2 R\,.} \tag{18}$$

3.2 Индукция поля, создаваемого этими зарядами в соответствии с формулой (2), равна

$$\boxed{B=\mu_0\bar{\sigma}\omega R=\frac{m_e}{e}\varepsilon_0\mu_0\frac{(\omega R)^3}{R}\approx\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\cdot\frac{\left(2{,}5\cdot 10^2\right)^3}{\left(3\cdot 10^8\right)^2\cdot 3{,}5\cdot 10^6}\approx 2{,}8\cdot 10^{-28}\,Тл\,,} \tag{19}$$

что на 23 порядка меньше магнитного поля Земли.

3.3 Полученные результаты однозначно свидетельствуют, что рассмотренная модель принципиально не может описать возникновение магнитного поля Земли

Задание 3. Таутохронизм и принцип Ферма (Решение)

Часть 1. Математическое введение.

1.1 Для доказательства формулы (1) условия задачи необходимо провести элементарные преобразования на приближенной формулой для степенной функции:

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\approx a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}\right)=a+\frac{x^2}{2a}. \qquad (1)$$

1.2 Уравнение окружности, описанной в условии, имеет вид

$$x^2+(y-R)^2=R^2. \qquad (2)$$

Из этого уравнения выразим значение y, используя полученную формулу (1):

$$x^2+(y-R)^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad y-R=\pm\sqrt{R^2-x^2} \quad\Rightarrow\quad y=R-\left(R-\frac{x^2}{2R}\right)=\frac{x^2}{2R}. \qquad (3)$$

Из очевидных геометрических соображений выбран знак «минус» перед корнем.

Возможны и другие варианты вывода этой формулы. Например, раскрыть скобки в формуле (2), затем пренебречь величиной y^2:

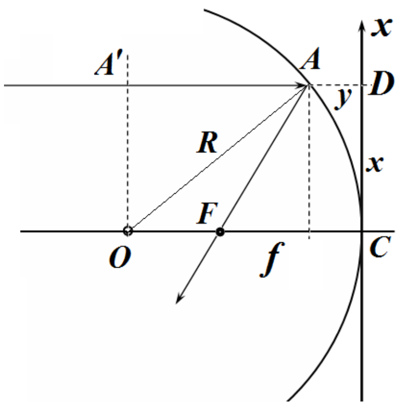
$$x^2+(y-R)^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-2yR+R^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{x^2}{2R} \qquad (3a)$$

Отметим важное обстоятельство, которое будет использоваться в дальнейшем. Если считать малой величиной x, то величина y является малой величиной второго порядка малости. Поэтому, если использовать приближения первого порядка по y, то следует оставлять величины порядка x^2.

Часть 2. Таутохронизм

Задача 2.1

2.1 Точку фокуса можно рассматривать как изображение бесконечно удаленной точки. Согласно принципу таутохронизма для существования изображения необходимо показать, что существует точка F, время движения до которой одинаково для всех лучей. Из симметрии задачи следует, что эта точка находится на главной оптической оси.



Так как в данном случае свет распространяется в однородной среде, то условие постоянства времени движения равносильно условию равенства длин путей. Возьмем произвольный луч AA' параллельный главной оптической оси и проходящий на расстоянии $x=|CD|$ от нее. Так как падающие лучи параллельны, то расстояние от бесконечно удаленной точки до любой плоскости, перпендикулярной лучам (и главной оптической оси) одинаково для всех этих лучей. для простоты в качестве такой плоскости возьмем плоскость OA', проходящую через центр кривизны зеркала. Тогда условие таутохронизма может быть сформулировано следующим образом: должна существовать такая точка F, для которой расстояние $l = |AA'| + |AF|$ не зависит от величины x. Из рисунка следует, что это расстояние выражается через параметры системы следующим образом

$$l = (R - y) + \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = R + f \,, \tag{4}$$

где $y = |AD|$; $f = |CF|$ - фокусное расстояние зеркала (если фокус существует). Величина $l = R + f$ расстояние от плоскости OA' до фокуса, для луча, распространяющегося вдоль оптической оси. Теперь, надо найти такую зависимость $y = f(x)$, чтобы равенство (4) выполнялось при любом x. Проводя элементарные алгебраические преобразования, получим:

$$\begin{gathered} (R - y) + \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = R + f \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (f - y)^2} = y + f \quad \Rightarrow \\ x^2 + f^2 - 2yf + y^2 = y^2 + 2yf + f^2 \quad \Rightarrow \quad 4yf = x^2 \end{gathered} \tag{5}$$

Итак, если поверхность зеркала описывается функцией

$$y = \frac{x^2}{4f}, \tag{6}$$

то все лучи, параллельные оптической оси, придут в точку F одновременно, поэтому эта точка будет являться фокусом. Иными словами, если зеркало является параболическим, то существует фокус для всех лучей, независимо от расстояния от оптической оси.

Как было показано, в п.1.2, для лучей, идущих на малом расстоянии от оптической оси окружность может заменена параболой, поэтому справедливо и обратное утверждение – парабола может быть заменена дугой окружности. Сравнивая формулу (6) с формулой (3),

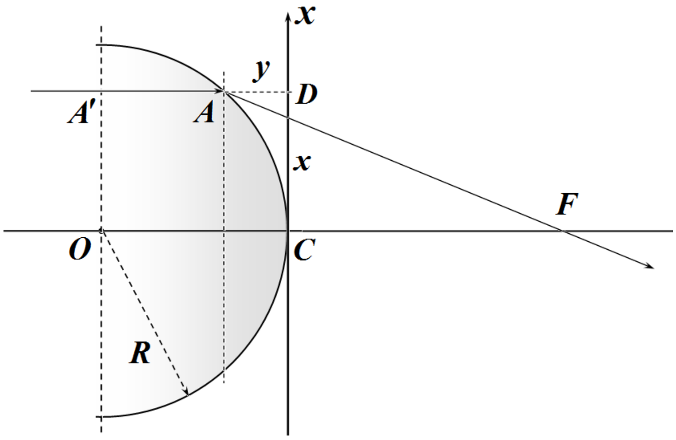
$$y = \frac{x^2}{4f} = \frac{x^2}{2R}, \tag{7}$$

получаем, что фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно

$$\boxed{f = \frac{R}{2}.} \tag{8}$$

Задача 2.2

2.2 Не повторяя всех рассуждений, проведенных при решении предыдущей задачи, сформулируем условие существования фокуса: ***время,*** за которой свет проходит расстояние $|A'A| + |AF|$, не зависит от расстояния x от луча до главной оптической оси.



Пусть свет проходит расстояние l в однородной среде с показателем преломления n, тогда время этого прохождения равно

$$t = \frac{l}{c/n} = \frac{nl}{c}. \tag{9}$$

где c/n - скорость света в этой среде.

Заметим, что вместо того, чтобы учитывать изменение скорости света (что происходит в действительности), при расчете времени прохождения можно считать, что скорость света остается постоянной (и равной скорости света в вакууме c) а увеличивается длина пути, которая становится равной nl (в оптике эту величину называют оптической длиной пути).

Таким образом, получаем, что условием существования фокуса является выполнение равенства при любых значениях x:

$$n(R-y)+\sqrt{x^2+(f+y)^2}=nR+f\,. \tag{10}$$

Преобразуем данное равенство

$$\begin{gathered} n(R-y)+\sqrt{x^2+(f+y)^2}=nR+f \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+(f+y)^2}=f+ny \quad \Rightarrow \\ x^2+f^2+2fy+y^2=f^2+2fny+n^2y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=2(n-1)fy \end{gathered} \tag{11}$$

Если искривленная поверхность линзы описывается уравнением

$$y=\frac{x^2}{2(n-1)f}\,, \tag{12}$$

то равенство (10) будет выполняться при любом значении x, т.е. точка F является фокусом. Но эта функция описывает в параксиальном приближении «дугу окружности» радиуса R:

$$y=\frac{x^2}{2R}\,. \tag{13}$$

Следовательно, описанная в условии задачи линза обладает фокусом.

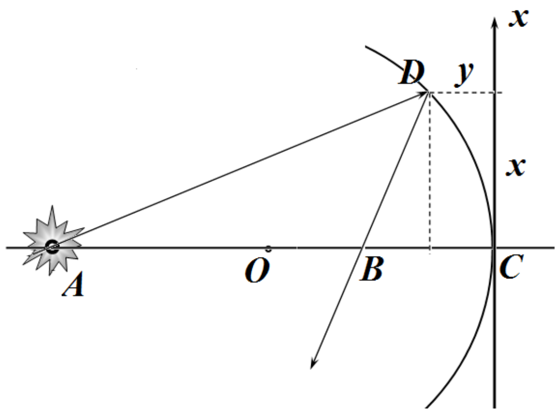
Для определения фокусного расстояния линзы достаточно приравнять выражения (12) и (13), откуда следует, что оно равно

$$\boxed{f=\frac{R}{n-1}\,.} \tag{14}$$

Задача 2.3

2.3.1 По аналогии с предыдущими задачами: для существование изображения в точке B необходимо, чтобы расстояние $|AD|+|DB|$, не зависело от положения точки D на поверхности зеркала и равнялась расстоянию $|Ac|+|CB|$. Это условие будет выполнено, если равенство

$$\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{x^2+(b-y)^2}=a+b\,. \tag{15}$$



выполняется при любых x. Возводить сумму корней в квадрат – неблагодарная задача, поэтому используем приближенные формулы для преобразования равенства (16). Сначала запишем:

$$\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\sqrt{x^2+(b-y)^2}\approx\sqrt{x^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+b^2-2by}\,. \tag{16}$$

Здесь мы пренебреги слагаемыми y^2, но оставили величины x^2. Ранее мы показали, что для окружности (сферы и соприкасающейся параболы) величина y пропорциональна x^2, поэтому эти величины являются малыми одного порядка. Величина y^2 пропорциональна x^4, поэтому ей можно пренебречь. Используя соотношение между этими малыми величинами, продолжим алгебраические преобразования, используя формулу (1):

$$\sqrt{x^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+b^2-2by}=\sqrt{a^2+\left(x^2-2ay\right)}+\sqrt{b^2+\left(x^2-2by\right)}\approx$$
$$\approx a+\frac{\left(x^2-2ay\right)}{2a}+b+\frac{\left(x^2-2by\right)}{2a}. \qquad (17)$$

Подставим это выражение в равенство (15):

$$a+\frac{\left(x^2-2ay\right)}{2a}+b+\frac{\left(x^2-2by\right)}{2b}=a+b. \qquad (18)$$

Откуда следует, что равенство (15) будет выполняться, при следующей зависимости $y(x)$:

$$y=\frac{x^2}{4a}+\frac{x^2}{4b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{x^2}{4}. \qquad (19)$$

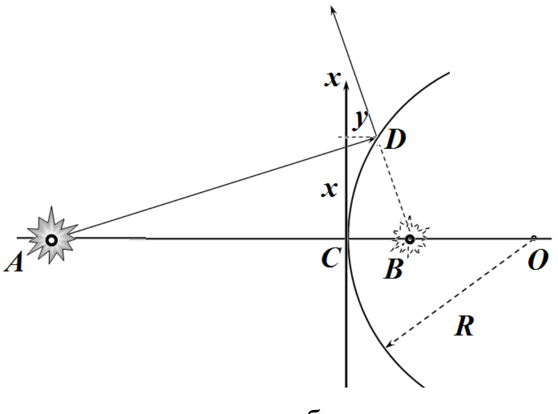
В очередной раз получено уравнение параболы, которая может рассматриваться, как параболу, соприкасающуюся с окружностью. В очередной раз, сравнивая выражение (19) с «параболическим уравнением» окружности $y=\frac{x^2}{2R}$, получаем, что существует такое значение b, при котором равенство (15) выполняется для всех лучей, исходящих из точки A. Т.е. изображение этой точки существует.

2.3.2 Из равенства (19) и уравнения «окружности» следует искомая формула зеркала

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}.} \qquad (20)$$

Здесь использовано полученное ранее значение фокусного расстояния $f=\frac{R}{2}$.

Задача 2.4



2.4.1 Абсолютно очевидно, что в рассматриваемом случае лучи, вышедшие из точки A и отраженные от зеркала не будут вообще пересекаться. Но могут пересечься в одной точке продолжения отраженных лучей. Предположим, что для продолжений лучей расстояния надо считать ***отрицательными*** (?!)

2.4.2 В рамках этого предположение условие существования мнимого изображения формулируется следующим образом: величина $|AD|-|DB|$ одинакова для всех лучей, отраженных от зеркала, и равна $|AC|-|CB|=a-b$. Формально это условие записывается в виде равенства, аналогичного (15):

$$\sqrt{x^2+(a+y)^2}-\sqrt{x^2+(b-y)^2}=a-b. \qquad (20)$$

Аналогичные алгебраические выкладки, преобразую это равенство к следующему виду:

$$\sqrt{x^2+(a+y)^2}-\sqrt{x^2+(b-y)^2}\approx\sqrt{x^2+a^2+2ay}-\sqrt{x^2+b^2-2by}\approx$$
$$\approx\left(a+\frac{x^2+2ay}{2a}\right)-\left(b+\frac{x^2-2by}{2b}\right)=a-b\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2}{2a}-\frac{x^2}{2b}+2y=0 \tag{21}$$

Используя «параболическое уравнение» окружности $y=\dfrac{x^2}{2R}$, получаем:

$$\boxed{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{2}{R}\ .} \tag{22}$$

Эта формула совпадает с «формулой вогнутого зеркала», если:
а) считать расстояние до мнимого изображения отрицательным;
б) фокусное расстояние также отрицательно $F=-\dfrac{R}{2}$.

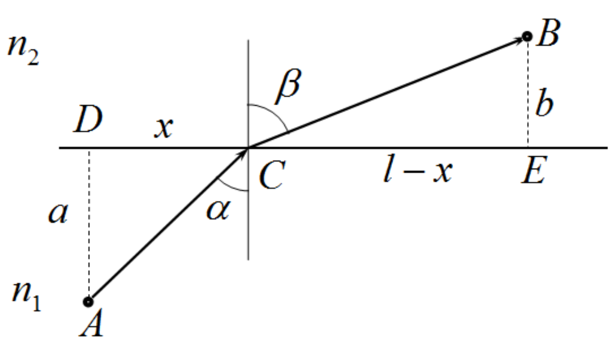
2.4.3 Геометрическая оптика является приближением волновой оптики. Поэтому принцип таутохронизма можно обосновать следующим образом:

- Каждому лучу можно поставить в соответствие некоторую волну.
- Если все эти волны проходят от источника до изображения за одно и тоже время, то фазы этих волн одинаковы;
- В результате интерференции в точке изображения реализуется максимум интенсивности.

Часть 3. Принцип Ферма

Задача 3.1

3.1 Пусть луч идет от точки A к точке B (см. рис.), преломляясь на границе раздела сред в некоторой точке C. Положение этой точки задается расстоянием x от точки D. Расстояние DE обозначим l, тогда расстояние CE равно $(l-x)$. Время движения света по пути ACB равно



$$\tau(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c/n_1}+\frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{c/n_2}=$$
$$=\frac{n_1\sqrt{a^2+x^2}+n_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{c}\ . \tag{23}$$

По принципу Ферма при движении по истинной траектории это время минимально. Чтобы найти экстремум функции (23), необходимо вычислить производную и приравнять ее к нулю:

$$\tau'(x) = \left(n_1\sqrt{a^2+x^2} + n_2\sqrt{b^2+(l-x)^2}\right)' = \\ = \frac{2n_1 x}{2\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{2n_2(l-x)}{2\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = 0 \qquad (24)$$

Но, как следует из рисунка,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin\alpha; \quad \frac{(l-x)}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = \sin\beta . \qquad (25)$$

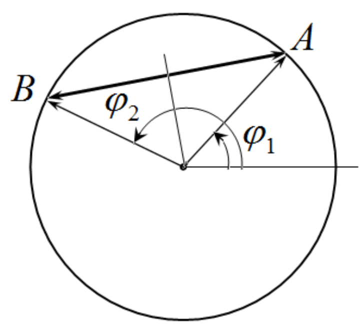
Поэтому из формул (24) – (25) следует закон преломления света:

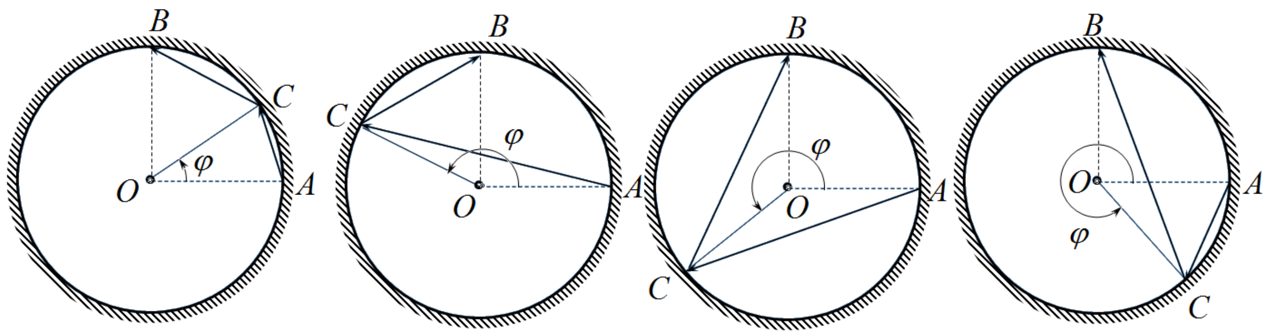
$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta . \qquad (26)$$

Задача 3.2

3.2.1 Для расчета длины траектории воспользуемся простой формулой для длины хорды $l = |AB|$, которую в общем виде можно записать следующим образом:

$$l = 2R\left|\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right| . \qquad (27)$$





Длина траектории луча с одним отражением от внутренней поверхности ACB равна сумме длин двух хорд, поэтому может быть описана формулой

$$L = 2R\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \left|\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) \qquad (28)$$

Перепишем эту формулу для двух интервалов значений угла φ.

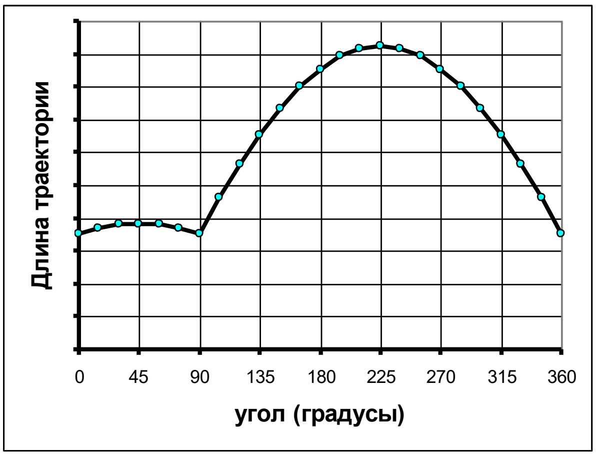
При $\varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$L = 2R\sin\frac{\varphi}{2} + 2R\sin\frac{\pi/2 - \varphi}{2} = 4R\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2}\right). \qquad (29)$$

При $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$

$$L = 2R\sin\frac{\varphi}{2} + 2R\sin\frac{\varphi - \pi/2}{2} = 4R\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right). \quad (30)$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке.



3.2.2 Истинные траектории луча, удовлетворяющие закону отражения света, реализуются при

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \end{cases}. \quad (31)$$

При этих значениях длины траекторий максимальны.

Задача 3.3 Выводы из проделанной работы.

3.3.1 Принцип Ферма неоходимо уточнить следующим образом:
свет выбирает из множества путей между двумя точками тот путь, который потребует экстремального (минимального или максимального) или стационарного (не зависящего от траектории) времени.
Математически это утверждение можно выразить таким образом. Пусть длина траектории описывается некоторой функцией от параметра ξ, определяющего траекторию, $L(\xi)$. Тогда истинным траекториям соответствуют значения параметров ξ^*, для которых производная обращается в нуль:

$$L'(\xi^*) = 0 \quad (32)$$

3.3.2 Обоснование принципа Ферма следует из волновых свойств света. Вблизи точки экстремума при изменении параметра от стационарного значения ξ^* на малую величину $\Delta\xi$ длина траектории изменяется на величину порядка $(\Delta\xi)^2$. Поэтому вблизи точки экстремума существует широкий диапазон траекторий, длины которых изменяются на очень малую величину. Волны, распространяющиеся вдоль этих траектория приходят в точку наблюдения с малой разностью фаз, поэтому для них выполняется условие максимума интерференции.