

Условие

Задание 1. Гигантомания

Данное задание состоит из трех не связанных между собой задач на одну тему. Во всех задачах следует пренебрегать: - взаимодействием тел с Солнцем и другими небесными телами; - движением Земли вокруг Солнца и ее вращение вокруг собственной оси; - сопротивлением воздуха. Вам могут понадобиться (а могут и не понадобиться) следующие характеристики Земли: радиус $R = 6,4 \cdot 10^6$ м; масса $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ кг; ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 1.1 Падение камушка

За правильное решение (1-1)				
ВСЕГО за Задание 1	30		9	23

Сферическое тело радиуса $R = 200$ м находится на расстоянии $h = 100$ м от поверхности Земли (см. рис.) и начинает падать на землю без начальной скорости.

1.1.1 За какое время τ тело упадет на Землю? Получите формулу и рассчитайте численное значение. 1.1.2 С какой скоростью v относительно Земли упадет тело на поверхность Земли? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

Решите задачу в двух случаях: а) плотность падающего тела равна средней плотности Земли; б) масса тела равна массе Земли (т.е. тело – небольшая нейтронная звездочка).

Задача 1.2 Космический корабль.

Космический корабль движется по круговой орбите вокруг Земли на высоте h над поверхностью Земли, которая значительно меньше радиуса Земли. Размеры корабля значительно меньше радиуса Земли.

1.2. Чему равен период обращения спутника вокруг Земли T ? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

Решите задачу в двух случаях:

а) масса корабля значительно меньше массы Земли; б) масса корабля равна массе Земли.

Задача 1.3 Эталон часа

На поверхности Земли построили башню, высота которой немного превышает радиус Земли R . К вершине башни прикрепили математический маятник длины R . Массой подвеса можно пренебречь, подвешенный груз можно считать материальной точкой, масса которой значительно меньше массы Земли.



1.3 Чему равен период малых колебаний T этого маятника? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

Решение

Задание 1. Гигантомания (Решение)

Задача 1.1 Падение камушка.

Расстояние между поверхностями сферического тела и радиус этого тела значительно меньше радиуса Земли, поэтому можно считать, что на тело действует постоянная сила гравитационного притяжения равная

$$F = mg. \quad (1)$$

Такая же по модулю сила действует и на Землю.

Рассмотрим случай а) плотность тела равна плотности Земли. В этом случае масса тела значительно меньше массы Земли, поэтому смещением Земли можно пренебречь с высокой точностью. Таким образом, мы приходим к простейшей задаче: «тело падает с высоты h ...»

1.1.1.a Время падения определяем из закона равноускоренного движения тела (падающего с ускорением свободного падения $a = g$):

$$\frac{g\tau_a^2}{2} = h. \quad (1)$$

Из которого находим

$$\tau_a = \sqrt{2\frac{h}{g}} = 4,5 \text{ с}. \quad (2)$$

1.1.2.a Скорость падения можно найти различными способами, например, из закона сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = mgh. \quad (3)$$

Откуда следует:

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 100} \approx 45 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

В случае б), когда масса тела равна массе Земли, необходимо учитывать движения Земли. Задача существенно упрощается тем обстоятельством, что массы тел равны. При этом движение тела и Земли является «симметричным»: их центры движутся навстречу друг другу с

одинаковыми по модулю ускорениями и скоростями. Поэтому они столкнутся, когда каждое тело пролетит расстояние $\frac{h}{2}$. Так как силы, действующие на тела, определяются формулой (1), то ускорение каждого из тел по модулю равны g .

1.1.1.6 Для расчета времени движения запишем соотношение

$$\frac{g\tau_6^2}{2} = \frac{h}{2}. \quad (1)$$

Из которого находим

$$\tau_6 = \sqrt{\frac{h}{g}} = 3,2 \text{ с}. \quad (2)$$

1.1.2.6 Для расчета скорости каждого тела запишем кинематическое соотношение

$$\frac{h}{2} = \frac{V_1^2}{2g}. \quad (3)$$

Которое приводит к следующему значению скорости тела в момент столкновения

$$V_1 = \sqrt{gh} \quad (4)$$

Так тела движутся навстречу друг другу, то относительная скорость в момент столкновения в два раза превышает найденную скорость, т.е.

$$V = 2\sqrt{gh} = 63 \frac{M}{c}. \quad (5)$$

Задача 1.2 Космический корабль.

Отношение высоты полета корабля к радиусу Земли примерно равно 0,03. Так как численные расчеты следует проводить с двумя значащими цифрами **1.2.1a** Если масса корабля значительно меньше массы Земли, то Землю можно считать неподвижной. Тогда корабль движется по окружности, центр которой совпадает с центром Земли. На основании второго закона Ньютона можно записать уравнение движения корабля

$$m \frac{v^2}{R} = mg. \quad (1)$$

Скорость движения корабля является первой космической скоростью и равна

$$v = \sqrt{gR}. \quad (2)$$

Следовательно, период обращения корабля равен

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5,0 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 84 \text{ мин.} \quad (3)$$

1.2.16 Если масса корабля равна массе Земли, то центр Земли и корабль будут вальсировать вокруг общего центра масс. В рассматриваемом случае этот центр тяжести C находится на половине радиуса. Радиус окружности, по которой движутся корабль и центр Земли равен половине радиуса Земли

$$r = \frac{R}{2}. \quad (4)$$



Поэтому уравнение движения корабля в этом случае будет иметь вид

$$m \frac{v^2}{R/2} = mg. \quad (5)$$

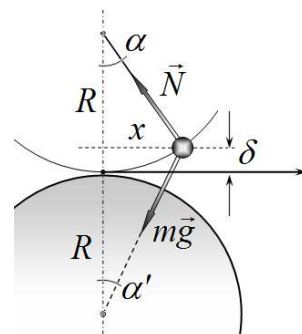
Скорость движения корабля

$$v = \sqrt{g \frac{R}{2}}. \quad (6)$$

Наконец, период обращения равен

$$T = \frac{2\pi \frac{R}{2}}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{2g}} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1 \text{ час.} \quad (7)$$

Задача 1.3 Эталон часа



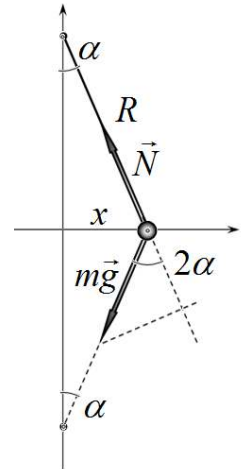
1.3 Рассмотрим траекторию движения маятника, которая является дугой окружности. Высота подъема маятника над поверхностью Земли равно

$$\delta = R - R \cos \alpha. \quad (1)$$

При малых углах отклонения маятника эта величина является малой величиной второго порядка малости, поэтому ей можно пренебречь

$$\delta = R - R \cos \alpha \approx \frac{\alpha^2}{2} R \approx 0. \quad (2)$$

В рамках этого подхода можно сделать следующие приближения: - груз маятника движется по горизонтальной прямой; - указанные на рисунке углы равны $\alpha' = \alpha$; - модуль силы тяжести не изменяется в ходе движения и равен mg , эта сила направлена к центру Земли.



На следующем рисунке показаны силы, действующие на груз маятника. Проецируя силы на направление нити маятника, получим, что

$$N = mg \cos 2\alpha \approx mg. \quad (3)$$

Здесь опять использовано приближение малых углов, когда с точностью до малых первого порядка $\cos 2\alpha \approx 1$. Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось x :

$$ma_x = -2mg \sin \alpha \approx -2mg\alpha. \quad (4)$$

Наконец, выразим угол отклонения подвеса маятника через координату груза:

$$\alpha \approx \frac{x}{R}. \quad (5)$$

Из формул (4)-(5) получаем уравнение

$$a_x = -2 \frac{g}{R} x \quad (6)$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 3,6 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 1,0 \text{ час.} \quad (7)$$

	<i>За неправильное округление (-1)</i>						
	ВСЕГО за Задание 1	30				9	23