Республиканская физическая олимпиада 2024 года
(Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач
10 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

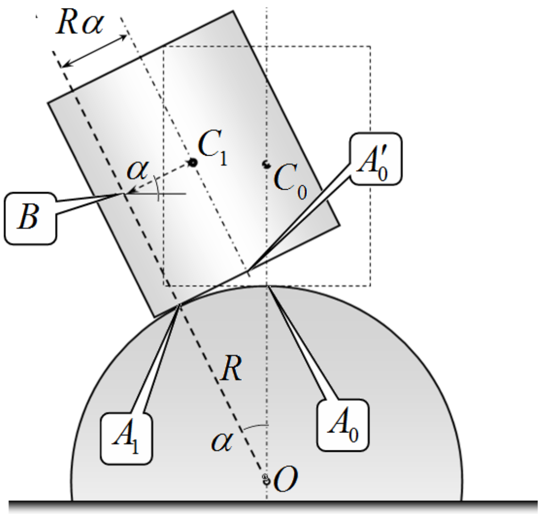
Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Цирковая разминка (Решение)

1. Условие равновесия тела – сумма сил и сумма моментов сил, действующих на тело равны нулю. При вертикальном положении цилиндра, когда его ось проходит через центр шара, эти условия выполняются. Следовательно, описанное положение цилиндра является положением равновесия не зависимо от радиуса шара и высоты цилиндра.

Для того, чтобы положения равновесия было устойчивым, необходимо, чтобы при отклонении от положения равновесия возникали силы (или моменты сил), стремящиеся вернуть тело в исходное положение. Это условие также может сформулировано иначе: положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии.

Так как в рассматриваемой системе потенциальная энергия есть потенциальная энергия в поле тяжести, то условие минимума упрощается: при отклонении цилиндра от вертикального положения его центр масс должен подниматься.



Сделаем рисунок, позволяющий получить условия устойчивости равновесия цилиндра. На рисунке пунктиром показано вертикальное положение цилиндра: C_0 - положение центра масс (на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра); A_0 - точка касания на шаре, на основании цилиндра это центр основания. При отклонении от вертикального положения цилиндр прокатывается по поверхности шара. Пусть при отклонении оси цилиндра на угол α от вертикали, точка касания смещается – на рисунке это точка A_1. Точка A_0' - центр основания цилиндра после его поворота. так качение происходит без проскальзывания, то длина дуги $|A_0A_1| = R\alpha$ равна длине отрезка $A_0'A_1$ на основании цилиндра (этот отрезок – множество точек касания при наклоне цилиндра). C_1 - положение центра масс отклоненного цилиндра. Проведем прямую, проходящую через центр шара O и точку касания A_1 продлим ее до точки B, находящейся на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра. Из рисунка следует, что высота центра масс цилиндра C_1 над центром шара равна

$$H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha \tag{1}$$

Поэтому изменение этой высоты при отклонении цилиндра от вертикального положения равно

$$\Delta H = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right). \tag{2}$$

Как было отмечено ранее, условие устойчивости – найденное изменение высоты центра масс должно быть положительным. Решить соответствующее неравенство аналитически невозможно, поэтому следует воспользоваться тем, что угол отклонения должен быть малым. В этом случае можно воспользоваться приближенными формулами

$$\sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \tag{3}$$

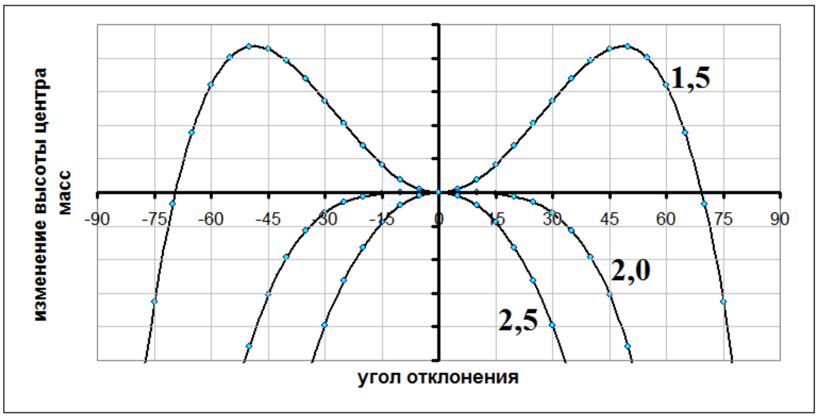
В этом приближении формула (2) приобретает вид

$$\Delta H = \left(R+\frac{h}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha - \left(R+\frac{h}{2}\right) \approx -\left(R+\frac{h}{2}\right)\frac{\alpha^2}{2} + R\alpha^2 = \left(\frac{R}{2}-\frac{h}{4}\right)\alpha^2 . \qquad (4)$$

Из условия $\Delta H > 0$, следует, что условие устойчивости вертикального положения цилиндра имеет вид:

$$\boxed{\frac{h}{R} < 2 .} \qquad (5)$$

Для подтверждения справедливости проведенных рассуждений и расчетов приведем графики функции (2) при нескольких значениях величины $\frac{h}{R}$ (значения указаны на графике. (от участников олимпиады построение этого графика не требуется).



«Моментный» вариант решения.

Чтобы цилиндр после отклонения от вертикали возвращался в исходное положение, необходимо, чтобы момент силы тяжести «заставлял» его вернуться обратно. С помощью построенного рисунка можно заметить. что это будет выполняться при выполнении условия:
Вертикаль, проходящая через точку C_1 (вдоль нее направлена сила тяжести) должна проходить правее точки касания A_1. Математически это условие можно записать в виде:

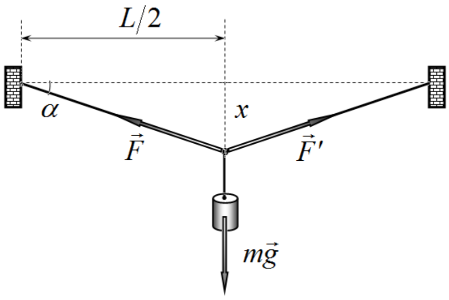
$$\frac{h}{2}\sin\alpha < R\alpha\cos\alpha . \qquad (4)$$

Используя приближенные формулы $\sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1$, легко получаем решение (5).

Задача 2. Канатоходцы

Прежде всего, обратим внимание, что относительные деформации проволоки малы (максимальная деформация немного превышает 5%). Поэтому при решении задачи можно считать, что провисание проволоки также является малой величиной $x << L$

Так как задана зависимость силы упругости от относительной деформации, то необходимо получить аналогичную зависимость, связанную, кроме того, с силой тяжести.



Выразим удлинение проволоки с величиной провисания:

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2}. \qquad (1)$$

Воспользуемся малостью величины x, и упростим данную формулу (используя приближенную формулу для степенной зависимости):

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\left(1 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{L}{2} \approx \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{L}\right)^2\right) - \frac{L}{2} = \frac{x^2}{L}. \qquad (2)$$

Эта величина представляет удлинение половины проволоки, поэтому ее относительное удлинение равно

$$\varepsilon = 2\frac{\Delta l}{L} = 2\frac{x^2}{L^2}. \qquad (3)$$

Условие равновесия груза имеет вид

$$2F \sin\alpha = mg, \qquad (4)$$

где α малый угол, который проволока образует с горизонтом (см. рис). Так угол мал, то можно записать приближенное выражение

$$\sin\alpha \approx \alpha = \frac{2x}{L}. \qquad (5)$$

Из формулы (3) выразим $\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ и подставим в уравнение (4):

$$F = \frac{mg}{2\alpha} = \frac{mg}{4\frac{x}{L}} = \frac{mg}{4\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}}. \qquad (6)$$

2.1 Используя это уравнение, найдем значение массы груза, при котором деформация проволоки линейно зависит от относительной деформации. Для этого в уравнение (6) подставим значения относительной деформации и силы упругости, соответствующие точке 1:

$$m_1 = \frac{F_1\sqrt{8\varepsilon_1}}{g} = \frac{310\sqrt{8 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3}}}{9{,}8} \approx 4{,}3 кг. \qquad (7)$$

Масса подвешенного груза меньше этой величины, поэтому искомые значения лежат в области линейной зависимости силы упругости от относительной деформации:

$$F = \frac{F_1}{\varepsilon_1}\varepsilon, \qquad (8)$$

где $\dfrac{F_1}{\varepsilon_1}$ - коэффициент наклона линейного участка диаграммы растяжения. Из формул (6), (8) и (3) получаем:

$$\frac{F_1}{\varepsilon_1}\varepsilon = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{8}}\frac{\varepsilon_1}{F_1} \quad \Rightarrow \quad \left(2\frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}\left(\frac{x}{L}\right)^3 = \frac{mg}{\sqrt{8}}\frac{\varepsilon_1}{F_1} \qquad (9)$$

Откуда окончательно находим

$$\boxed{x = L\sqrt[3]{\frac{mg}{8}\frac{\varepsilon_1}{F_1}} = 2{,}0\cdot\sqrt[3]{\frac{2{,}0\cdot 9{,}8}{8}\frac{0{,}0024}{310}} \approx 5{,}3см. \qquad (10)}$$

2.2 Разрыв проволоки происходит при $\varepsilon = \varepsilon_2 = 5{,}10\% = 5{,}1\cdot 10^{-2}$, при этом сила упругости равна $F = F_2 = 0{,}43кН = 430Н$. Тогда из уравнения (6) находим максимальную массу подвешенного груза:

$$\boxed{m_2 = \frac{F_2\sqrt{8\varepsilon_2}}{g} = \frac{430\sqrt{8\cdot 5{,}1\cdot 10^{-2}}}{9{,}8} \approx 27кг. \qquad (11)}$$

Задание 2. Газовые законы (Решение)

Часть 1. Горизонтальный сосуд.

1.1 При достижении термодинамического равновесия выровняются давления и температуры газов обеих частях сосуда:

$$\begin{aligned} P_{1a} &= P_{1b} = P_1 \\ T_{1a} &= T_{1b} = T_1 \end{aligned}. \tag{1}$$

Для определения параметров газов запишем уравнения Клапейрона для обеих порций газов

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_1V_{1a}}{T_1}; \qquad \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_{1b}}{T_1}. \tag{2}$$

Разделим уравнения (2) друг на друга

$$\frac{2}{3} = \frac{V_{1a}}{V_{1b}}. \tag{3}$$

Добавим условие постоянства объема

$$V_{1a} + V_{1b} = 2V_0. \tag{4}$$

Из этих уравнений следует, что объемы газов станут равными

$$\boxed{V_{1a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{1b} = \frac{6}{5}V_0.} \tag{5}$$

Из уравнений (2) найти значения установившихся давлений и температур нельзя, т.к. в них входят только их отношение. Поэтому следует воспользоваться первым законом термодинамики. Так как давления газов на поршень с разных сторон все время одинаковы, то работа газов по перемещению поршня равны нулю. Система теплоизолирована, поэтому внутренняя энергия газов сохраняется.

Внутреннюю энергию одноатомного газа можно рассчитать по формулам

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV. \tag{6}$$

Здесь использовано уравнение состояния идеального газа $PV = \nu RT$.

Уравнения закона сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$\frac{3}{2}P_0V_0 + \frac{3}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_1 \cdot 2V_0. \tag{7}$$

из которого следует, что давление газа не изменяется, т.е.

$$\boxed{P_{1a} = P_{1b} = P_0.} \tag{8}$$

Теперь установившуюся температуру можно найти из любого из уравнений (2):

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_{1b}}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_0\frac{V_{1b}}{V_0}. \tag{9}$$

Используя найденное значение объема, получаем

$$\boxed{T_{1a} = T_{1b} = \frac{6}{5}T_0} \tag{10}$$

1.2 Т.к. смещением поршня пренебрегаем, то объемы газов остаются неизменными:

$$\boxed{V_{2a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{2b} = \frac{6}{5}V_0 .} \qquad (11)$$

Также остаются неизменными параметры газа в части сосуда ***b:***

$$\boxed{P_{2b} = P_0; \;\; T_{2b} = \frac{6}{5}T_0 .} \qquad (12)$$

В процессе нагревания полученная теплота идет на увеличение внутренней энергии газа в части сосуда ***a***:

$$\frac{3}{2}P_0V_{1a} + Q = \frac{3}{2}P_{2a}V_{1a} . \qquad (13)$$

Подставляем известные значения параметров

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0 + \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_{2a} \cdot \frac{4}{5}V_0 . \qquad (14)$$

и находим

$$\boxed{P_{2a} = \frac{17}{12}P_0 .} \qquad (15)$$

Значение температуры газа найдем из уравнения состояния Клапейрона (для состояний 0 и 2):

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_{2a}V_{2a}}{T_{2a}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2P_0V_0}{3T_0} = \frac{17}{12}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0 \frac{1}{T_{2a}} , \qquad (16)$$

из которого следует, что температура газа станет равной

$$\boxed{T_{2a} = \frac{17}{10}T_0 .} \qquad (17)$$

1.3 После установления равновесия температуры и давления газов в разных частях сосуда станут равными

$$\begin{aligned} P_{3a} &= P_{3b} = P_3 \\ T_{3a} &= T_{3b} = T_3 \end{aligned} . \qquad (18)$$

Для упрощения расчетов рассмотрим переход из состояния 0 в конечное состояние 3 (без промежуточных этапов). Первый закон термодинамики приводит к уравнению

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot 2V_0 + Q = \frac{3}{2}P_3 \cdot 2V_0 , \qquad (19)$$

из которого сразу следует, что давление газа будет равно

$$\boxed{P_{3a} = P_{3b} = \frac{7}{6}P_0 .} \qquad (20)$$

Запишем уравнения состояния для обеих порций газов:

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_3V_{3a}}{T_3}; \qquad \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_3V_{3b}}{T_3} . \qquad (21)$$

Сложим эти два уравнения:

$$\frac{5}{3}\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_3 \cdot 2V_0}{T_3} . \qquad (22)$$

и найдем значение конечной температуры:

$$T_3 = \frac{6}{5} T_0 \frac{P_3}{P_0} = \frac{7}{5} T_0. \quad (23)$$

Таким образом:

$$\boxed{T_{3a} = T_{3b} = \frac{7}{5} T_0.} \quad (24)$$

Наконец, значения объем можно выразить из уравнений (21). Если разделить их друг на друга, получим

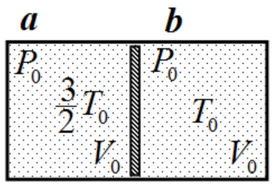
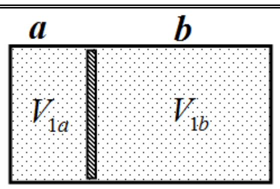
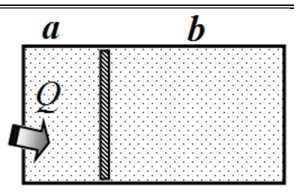
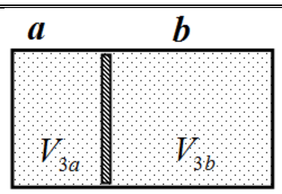
$$\frac{V_{3a}}{V_{3b}} = \frac{2}{3} \quad (25)$$

Вспоминая. что $V_{1a} + V_{1b} = 2V_0$, находим

$$\boxed{V_{3a} = \frac{4}{5} V_0; \qquad V_{3b} = \frac{6}{5} V_0.} \quad (26)$$

Все найденные значения параметров сведены в Таблице 1.

Таблица 1.

№	рисунок	параметры газа в части ***a***	параметры газа в части ***b***
0		$P_{0a} = P_0$	$P_{0b} = P_0$
		$V_{0a} = V_0$	$V_{0a} = V_0$
		$T_{0a} = \frac{3}{2} T_0$	$T_{0b} = T_0$
1		$P_{1a} = P_0$	$P_{1b} = P_0$
		$V_{1a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{1b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{1a} = \frac{6}{5} T_0$	$T_{1b} = \frac{6}{5} T_0$
2		$P_{2a} = \frac{17}{12} P_0$	$P_{2b} = P_0$
		$V_{2a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{2b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{2a} = \frac{17}{10} T_0$	$T_{2b} = \frac{6}{5} T_0$
3		$P_{3a} = \frac{7}{6} P_0$	$P_{3b} = \frac{7}{6} P_0$
		$V_{3a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{3b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{3a} = \frac{7}{5} T_0$	$T_{3b} = \frac{7}{5} T_0$

Часть 2. Вертикальный сосуд.

2. При решении данной задачи нет необходимости рассматривать все этапы процесса, можно сразу рассматривать переход от начального к конечному состоянию. Зная отношение объемов и их сумму, легко найти объемы каждой части сосуда.

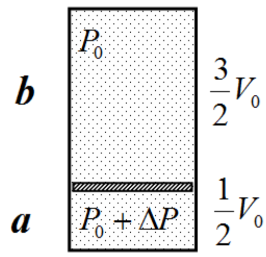
В начальном состоянии:

объем нижней части $V_{0a} = \frac{1}{2}V_0$;

объем верхней части $V_{0b} = \frac{3}{2}V_0$.

Если давление газа в верхней части сосуда равно P_0, то давление в нижней части равно $P_0 + \Delta P$, где ΔP - давление, которое создает поршень.

начальное состояние



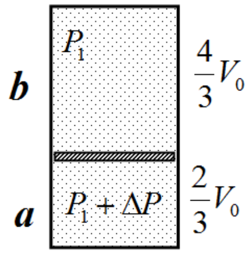
В конечном состоянии:

объем нижней части $V_{1a} = \frac{4}{3}V_0$;

объем верхней части $V_{1b} = \frac{2}{3}V_0$.

Обозначим давление газа в верхней части сосуда P_1, тогда давление в нижней части - $P_1 + \Delta P$.

конечное состояние



Запишем уравнение первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A \tag{27}$$

При вертикальном положении сосуда газ совершает работу по подъему поршня, которая равна

$$A = \Delta P\left(\frac{2}{3}V_0 - \frac{1}{2}V_0\right) = \frac{1}{6}\Delta P V_0. \tag{28}$$

Эта величина также равна изменению потенциальной энергии поршня в поле тяжести Земли.

Выразим изменение внутренней энергии газа через значения давлений и объемов:

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3}{2}\left(P_1 \cdot \frac{4}{3}V_0 + (P_1 + \Delta P)\cdot\frac{2}{3}V_0\right) - \frac{3}{2}\left(P_0 \cdot \frac{3}{2}V_0 + (P_0 + \Delta P)\cdot\frac{1}{2}V_0\right) = \\ &= \frac{3}{2}\left(P_1 V_0 + \Delta P \cdot \frac{2}{3}V_0\right) - \frac{3}{2}\left(P_0 V_0 + \Delta P \cdot \frac{1}{2}V_0\right) = \frac{3}{2}(P_1 - P_0)V_0 + \frac{1}{4}\Delta P V_0\end{aligned}. \tag{29}$$

Далее необходимо найти значения ΔP и P_1. Для этого воспользуемся равенством масс газов в обеих частях сосудов. Для начального состояния можно записать

$$\frac{3}{2}P_0 V_0 = \frac{1}{2}(P_0 + \Delta P)V_0. \tag{30}$$

Отсюда следует

$$\Delta P = 2P_0 \tag{31}$$

Для конечного:

$$\frac{4}{3}P_1 V_0 = \frac{2}{3}(P_1 + \Delta P)V_0, \tag{30}$$

что дает

$$P_1 = 2P_0 . \tag{32}$$

Подставляя полученные значения в формулу (29), получим

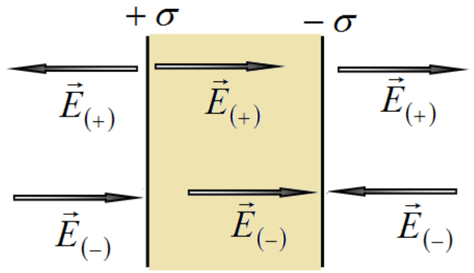
$$\Delta U = \frac{3}{2}(P_1 - P_0)V_0 + \frac{1}{4}\Delta P V_0 = 2P_0V_0 . \tag{33}$$

Теперь можно вычислить количество сообщенной газу теплоты

$$\boxed{Q = \Delta U + A = 2P_0V_0 + \frac{1}{6}\cdot 2P_0V_0 = \frac{7}{3}P_0V_0} \tag{34}$$

Задание 3. Поле в диэлектрике (Решение)

Часть 1. Нормальное поле



1.1 Бесконечная равномерно заряженная плоскость создает однородное поле, вектор напряженности которого направлен перпендикулярно плоскости. Плоский конденсатор состоит из двух больших параллельных пластин, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку. На рисунке показаны векторы напряженности полей, создаваемых положительно $\vec{E}_{(+)}$ и отрицательно $\vec{E}_{(-)}$ заряженными пластинами. Понятно, что модули этих векторов равны $\left|\vec{E}_{(+)}\right| = \left|\vec{E}_{(-)}\right| = E$ искомому значению напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью. Тогда модуль напряженности поля внутри конденсатора равен $2E$, а вне конденсатора поле отсутствует.

По определению емкость конденсатора равна отношению заряда одной из обкладок $Q = \sigma S$ к разности потенциалов между обкладками $\Delta\varphi = E_{\Sigma} d = 2Ed$:

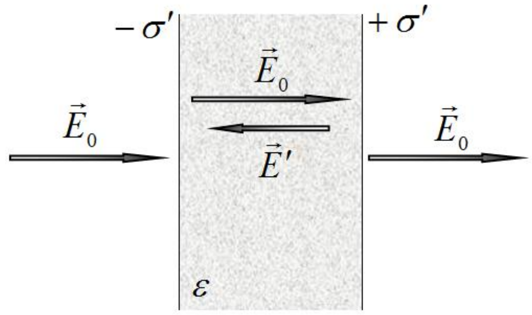
$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma S}{2Ed}. \qquad (1)$$

Приравнивая это выражение к выражению для емкости конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$,

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\sigma S}{2Ed}, \qquad (2)$$

получаем требуемую формулу для напряженности поля, создаваемого одной пластиной:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (3)}$$



1.2 Электрическое поле внутри пластины является суперпозицией внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля, созданного индуцированными зарядами $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (4)$$

С другой стороны модуль напряженности этого поля в ε раз меньше напряженности внешнего поля:

$$\frac{E_0}{\varepsilon} = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что поверхностная плотность индуцированных зарядов равна

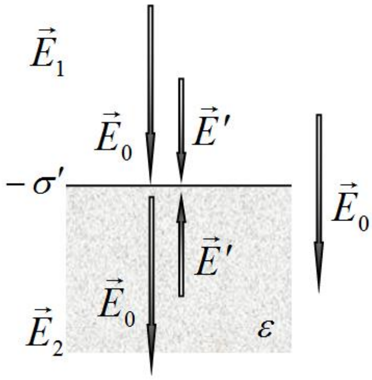
$$\boxed{\sigma' = \varepsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\varepsilon_0 E_0. \qquad (6)}$$

Эту же величину можно выразить через напряженность поля внутри пластины

$$\boxed{\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E. \qquad (7)}$$

1.3 В рассматриваемой здесь ситуации индуцированные заряды создают электрическое поле как внутри диэлектрика, так и над ним. Поэтому напряженности полей вне диэлектрика и внутри него можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 + E' = E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \\ E_2 &= E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \end{aligned}, \qquad (7)$$



где $\vec{E}_0$ - напряженность внешнего поля, создаваемого всеми остальными зарядами, кроме зарядов на границе диэлектрика.
Из этих формул не сложно найти:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \\ E_2 &= E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \left(E_1 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right) - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = E_1 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \end{aligned}. \qquad (8)$$

Так как силовые линии электрического поля перпендикулярны границе диэлектрика, то $E_1 = \varepsilon E_2$. С учетом этого соотношения, из формулы (8) следует, что плотность индуцированных зарядов равна

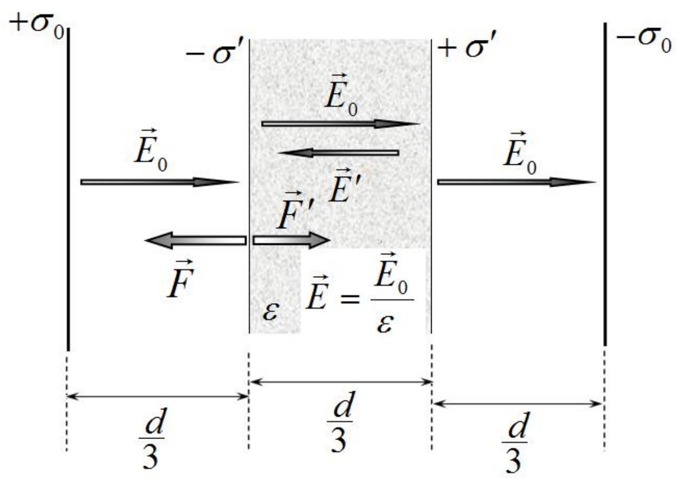
$$\boxed{\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_2.} \qquad (9)$$

1.4 Электрические заряды на обкладках конденсатора $\pm\sigma_0$ создают в пространстве между обкладками и диэлектрической пластиной электрическое поле напряженности

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}. \qquad (10)$$

Напряженность поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (11)$$



1.4.1 Из формулы (7) следует, что поверхностные плотности зарядов на поверхности пластины равны

$$\boxed{\sigma_1' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0; \quad \sigma_2' = +\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0.} \qquad (12)$$

1.4.2 Для расчета емкости конденсатора воспользуемся определением. Заряд одной из обкладок равен $Q = \sigma_0 S$. Разность потенциалов рассчитаем, как работу сил электрического поля над единичным зарядом:

$$\Delta\varphi = E_0\frac{d}{3} + E\frac{d}{3} + E_0\frac{d}{3} = E_0\frac{2d}{3} + \frac{E_0}{\varepsilon}\frac{d}{3} = \frac{E_0 d}{3}\frac{2\varepsilon+1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 d}{3\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon+1}{\varepsilon}. \quad (13)$$

Следовательно, емкость конденсатора $C = \dfrac{Q}{\Delta\varphi}$ равна

$$C_0 = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (14)$$

<u>Замечание.</u> Эта формула может быть получена из формулы для емкости последовательно соединенных конденсаторов.

1.4.3 Сила, действующая на заряженное тело, равна произведению заряда тела на напряженность электрического поля, созданного всеми внешними зарядами

$$F = qE. \quad (15)$$

Выделим на поверхности диэлектрической пластины небольшой участок площади ΔS
Тогда давление электрического поля на этот участок рассчитывается по формуле

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\sigma'\Delta S E}{\Delta S} = \sigma' E_\Sigma. \quad (16)$$

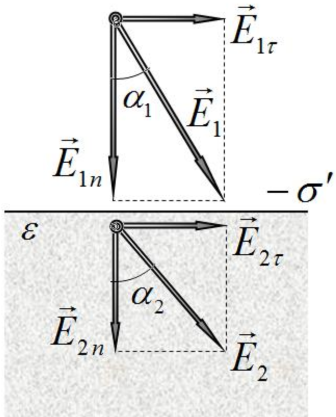
Здесь E_Σ - сумма напряженностей полей: создаваемого зарядами на обкладках конденсатора $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$; и поля создаваемого индуцированными зарядами на второй поверхности диэлектрика $E' = \dfrac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$. С учетом направления сил, получим

$$P = \sigma'\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right). \quad (17)$$

Подставляя значение величины $\sigma' = \dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma_0$, после простых алгебраических преобразований, окончательно получаем

$$P = \frac{\varepsilon^2-1}{2\varepsilon^2}\frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0}. \quad (18)$$

Часть 2. Наклонное поле



2.1.1 Различие в полях вне диэлектрика $\vec{E}_1$ и внутри него $\vec{E}_2$ возникает из-за электрического поля $\vec{E}'$, созданного зарядами, индуцированными на поверхности диэлектрика. Разложим векторы напряженностей полей на составляющие параллельны границе и нормальные к ней (см. рис.). Вследствие принципа суперпозиции для электрического поля преобразования этих компонент при переходе через границу можно рассматривать независимо друг от друга.

Так как вектор напряженности поля индуцированных зарядов $\vec{E}'$ направлен перпендикулярно границе диэлектрика, тангенциальные составляющие векторов равны между собой

$$\vec{E}_{2\tau} = \vec{E}_{2\tau}. \tag{19}$$

Как было показано ранее, нормальные составляющие отличаются в ε раз:

$$\vec{E}_{2n} = \frac{\vec{E}_{1n}}{\varepsilon}. \tag{20}$$

Используя эти соотношения легко, получить «закон преломления» для линий напряженности

$$tg\,\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \frac{E_{1\tau}}{\frac{1}{\varepsilon}E_{1n}} = \varepsilon\, tg\,\alpha_1 \tag{21}$$

Или

$$\boxed{\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1} = \varepsilon} \tag{22}$$

2.1.2 Для модуля напряженности поля внутри диэлектрика имеем

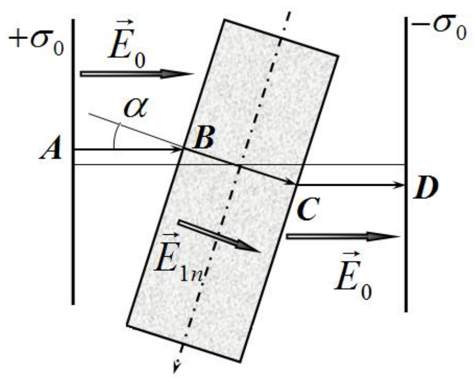
$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{E_{1\tau}^2 + \frac{E_{1n}^2}{\varepsilon^2}} = \sqrt{E_1^2\cos^2\alpha_1 + \frac{E_1^2}{\varepsilon^2}\sin^2\alpha_1} = \\ &= \frac{E_1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1} = \frac{E_1}{\varepsilon}\sqrt{1 + \left(\varepsilon^2 - 1\right)\cos^2\alpha_1} \end{aligned}. \tag{23}$$

Откуда следует, что отношение модулей равно

$$\boxed{\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sqrt{1 + \left(\varepsilon^2 - 1\right)\cos^2\alpha_1}}{\varepsilon}.} \tag{24}$$

Обратите внимание, что утверждение «диэлектрик уменьшает поле в ε раз» в общем случае не верно. В рассмотренном примере; во-первых, изменяется направление вектора индукции, во-вторых, отношение модулей векторов зависит от «угла падения» и не равно ε.

2.2.1 При неизменных зарядах на обкладках конденсатора при повороте диэлектрической пластинки изменится разность потенциалов между обкладками. Для расчета этой разности потенциалов следует найти работу сил электростатического поля по перемещению единичного пробного заряда от одной обкладки до другой. Вследствие потенциальности поля, эта работа не зависит от траектории движения пробного заряда. Достаточно просто вычислить эту работу для траектории $ABCD$, показанной на рисунке (отрезки AC и CD перпендикулярны обкладкам конденсатора, отрезок BC перпендикулярен граням пластинки):



$$\Delta\varphi = U = |AB| \cdot E_0 + |BC| \cdot E_{1n} + |CD| \cdot E_0. \tag{25}$$

Из рисунка следует, что

$$|AB| = |CD| = \frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cos\alpha. \tag{26}$$

Как было показано ранее

$$E_{1n} = \frac{E_{0n}}{\varepsilon} = \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon}. \qquad (27)$$

Поэтому разность потенциалов между обкладками конденсатора равна

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = U = |AB|\cdot E_0 + |BC|\cdot E_{1n} + |CD|\cdot E_0 = 2\left(\frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cos\alpha\right)E_0 + \frac{d}{3}\cdot\frac{E_0\cos\alpha}{\varepsilon} = \\ = E_0\left(d - \frac{d}{3}\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = E_0 d\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\cos\alpha\right)\end{aligned}. \qquad (28)$$

Учитывая, что заряд на одной обкладке равен $Q = \varepsilon_0 S E_0$, получим выражение для емкости конденсатора

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 S E_0}{E_0 d\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\cos\alpha\right)} = \frac{3\varepsilon}{\left(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\cos\alpha\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d}.} \qquad (29)$$

2.2.2 При малых углах поворота следует воспользоваться приближенной формулой $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. В этом случае формула (29) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}C = \frac{3\varepsilon}{\left(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\cos\alpha\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{3\varepsilon}{\left(3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{3\varepsilon}{\left(2\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\frac{\alpha^2}{2}\right)}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \\ = \frac{3\varepsilon}{(2\varepsilon + 1)}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}} \approx C_0\left(1 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}\right)\end{aligned} \qquad (30)$$

где использована приближенная формула $\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x$.

Окончательно получаем, что относительное изменение емкости конденсатора равно

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1}\frac{\alpha^2}{2}.} \qquad (31)$$