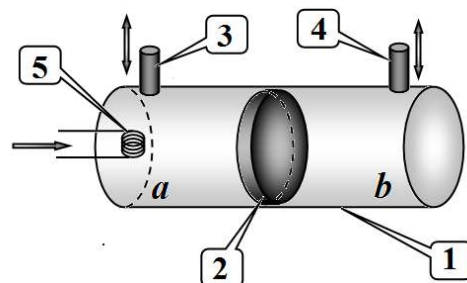


Условие

Задание 2. Газовые законы

Для проведения экспериментов используется следующая установка. Закрытый теплоизолированный цилиндрический сосуд 1 разделен на две части a и b подвижным поршнем 2. Объем поршня значительно меньше объема сосуда. Через небольшие трубки с кранами 3 и 4 в обе части сосуда можно закачивать газ. В части сосуда a находится нагреватель 5, с помощью которого газу можно передавать теплоту. Теплоемкостью сосуда и поршня можно пренебречь. Трением поршня о стенки сосуда также можно пренебречь. Поршень является теплопроводящим, поэтому газы в разных частях сосуда могут медленно обмениваться теплотой. Во всех экспериментах используется аргон (одноатомный газ). Внутренний объем сосуда равен $2V_0$.



Часть 1. Горизонтальный сосуд. В листе ответов приведена Таблица 1, в которой показаны последовательные состояния газов и примерное положение поршня. В этой Таблице приведены известные значения параметров газов. Вам необходимо заполнить эту таблицу, привести значения параметров газов (давление, объем температура) в различных состояниях. *При проведении расчетов, используйте обозначения параметров газов в различных состояниях, приведенные в Таблице 1. При решении уравнений можете использовать численные данные, приведенные в условии. Допускается проведение промежуточных численных расчетов. Все ответы должны быть выражены через значения параметров P_0, V_0, T_0 . Помните, что обыкновенные дроби – числа точные, а десятичные – приближенные!*

a		b	
P_0	$\frac{3}{2}T_0$	P_0	T_0
	V_0		V_0

Сосуд расположили горизонтально, поршень делит сосуд на две равные части. Обе части сосуда заполняют газом и закрывают краны. При этом давление газов в обеих частях сосуда одинаковы и равны P_0 . Температура газа в части b равна T_0 , а в части a – $\frac{3}{2}T_0$.

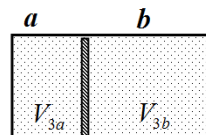
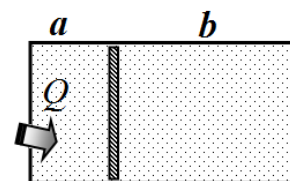
a		b	
V_{1a}		V_{1b}	

Поршень начинает медленно смещаться и через какой-то промежуток времени приходит в состояние равновесия.

1.1 Рассчитайте значения параметров газов (давления, объемы, температуры) в обеих частях сосудов, после установления теплового равновесия.

После достижения равновесия, газу в части a с помощью нагревателя быстро сообщают количество теплоты равное $Q = \frac{1}{2}P_0V_0$.

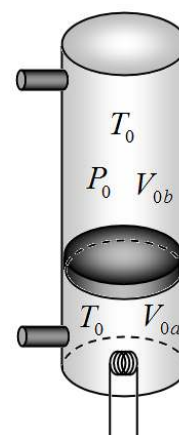
1.2 Пренебрегая смещением поршня и теплопередачей через поршень за время нагрева, рассчитайте значение параметров газов после прекращения нагревания.



После прекращения нагревания поршень приходит в движение и переходит в состояние равновесия.

1.3 Рассчитайте значения параметров газов в обеих частях сосудов, после установления теплового равновесия.

Часть 2. Вертикальный сосуд.



Обе части сосуда заполнили одинаковыми количествами аргона, и расположили сосуд вертикально. Поршень находится в равновесии. При этом температуры газа в обеих частях сосуда равны, отношение объемов частей сосуда равно $\frac{V_{0b}}{V_{0a}} = \frac{3}{1}$, давление газа в верхней части сосуда - P_0 . (которое отличается начального давления в Части 1).

2. Рассчитайте, какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы после достижения равновесия отношение объемов частей сосуда стало равным $\frac{V_{1b}}{V_{1a}} = \frac{2}{1}$.

Примечание. Изменением потенциальной энергии взаимодействия газа с Землей можно пренебречь.

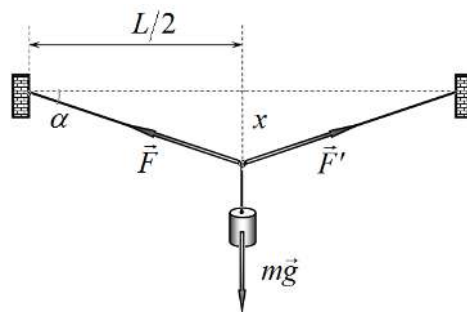
Решение

Задача 2. Канатоходцы

Прежде всего, обратим внимание, что относительные деформации проволоки малы (максимальная деформация немного превышает 5%). Поэтому при решении задачи можно считать, что провисание проволоки также является малой величиной $x \ll L$.

Так как задана зависимость силы упругости от относительной деформации, то необходимо получить аналогичную зависимость, связанную, кроме того, с силой тяжести. Выразим удлинение проволоки с величиной провисания:

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2}. \quad (1)$$



Воспользуемся малостью величины x , и упростим данную формулу (используя приближенную формулу для степенной зависимости):

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \left(1 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{L}{2} \approx \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right) - \frac{L}{2} = \frac{x^2}{L}. \quad (2)$$

Эта величина представляет удлинение половины проволоки, поэтому ее относительное удлинение равно

$$\varepsilon = 2 \frac{\Delta l}{L} = 2 \frac{x^2}{L^2}. \quad (3)$$

Условие равновесия груза имеет вид

$$2F \sin \alpha = mg, \quad (4)$$

где α малый угол, который проволока образует с горизонтом (см. рис). Так угол мал, то можно записать приближенное выражение

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{2x}{L}. \quad (5)$$

Из формулы (3) выразим $\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ и подставим в уравнение (4):

$$F = \frac{mg}{2\alpha} = \frac{mg}{4\frac{x}{L}} = \frac{mg}{4\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}}. \quad (6)$$

2.1 Используя это уравнение, найдем значение массы груза, при котором деформация проволоки линейно зависит от относительной деформации. Для этого в уравнение (6) подставим значения относительной деформации и силы упругости, соответствующие точке 1:

$$m_1 = \frac{F_1 \sqrt{8\varepsilon_1}}{g} = \frac{310 \sqrt{8 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3}}}{9,8} \approx 4,3 \text{ кг.} \quad (7)$$

Масса подвешенного груза меньше этой величины, поэтому искомые значения лежат в области линейной зависимости силы упругости от относительной деформации:

$$F = \frac{F_1}{\varepsilon_1} \varepsilon, \quad (8)$$

где $\frac{F_1}{\varepsilon_1}$ - коэффициент наклона линейного участка диаграммы растяжения. Из формул (6), (8) и (3) получаем:

$$\frac{F_1}{\varepsilon_1} \varepsilon = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}} \Rightarrow \varepsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{8}} \frac{\varepsilon_1}{F_1} \Rightarrow \left(2 \frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} \left(\frac{x}{L}\right)^3 = \frac{mg}{\sqrt{8}} \frac{\varepsilon_1}{F_1} \quad (9)$$

Откуда окончательно находим

$$x = L \sqrt[3]{\frac{mg}{8} \frac{\varepsilon_1}{F_1}} = 2,0 \cdot \sqrt[3]{\frac{2,0 \cdot 9,8 \cdot 0,0024}{8 \cdot 310}} \approx 5,3 \text{ см.} \quad (10)$$

2.2 Разрыв проволоки происходит при $\varepsilon = \varepsilon_2 = 5,10\% = 5,1 \cdot 10^{-2}$, при этом сила упругости равна $F = F_2 = 0,43 \text{ кН} = 430 \text{ Н}$. Тогда из уравнения (6) находим максимальную массу подвешенного груза:

$$m_2 = \frac{F_2 \sqrt{8\varepsilon_2}}{g} = \frac{430 \sqrt{8 \cdot 5,1 \cdot 10^{-2}}}{9,8} \approx 27 \text{ кг.} \quad (11)$$

Задание 2. Газовые законы (Решение)

Часть 1. Горизонтальный сосуд.

1.1 При достижении термодинамического равновесия выравниваются давления и температуры газов обеих частях сосуда:

$$P_{1a} = P_{1b} = P_1, \quad T_{1a} = T_{1b} = T_1. \quad (1)$$

Для определения параметров газов запишем уравнения Клапейрона для обеих порций газов

$$\frac{P_0 V_0}{\frac{3}{2} T_0} = \frac{P_1 V_{1a}}{T_1}; \quad \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_{1b}}{T_1}. \quad (2)$$

Разделим уравнения (2) друг на друга

$$\frac{2}{3} = \frac{V_{1a}}{V_{1b}}. \quad (3)$$

Добавим условие постоянства объема

$$V_{1a} + V_{1b} = 2V_0. \quad (4)$$

Из этих уравнений следует, что объемы газов станут равными

$$V_{1a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{1b} = \frac{6}{5}V_0. \quad (5)$$

Из уравнений (2) найти значения установившихся давлений и температур нельзя, т.к. в них входят только их отношение. Поэтому следует воспользоваться первым законом термодинамики. Так как давления газов на поршень с разных сторон все время одинаковы, то работа газов по перемещению поршня равна нулю. Система теплоизолирована, поэтому внутренняя энергия газов сохраняется.

Внутреннюю энергию одноатомного газа можно рассчитать по формулам

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV. \quad (6)$$

Здесь использовано уравнение состояния идеального газа $PV = \nu RT$. Уравнения закона сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$\frac{3}{2}P_0V_0 + \frac{3}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_1 \cdot 2V_0. \quad (7)$$

из которого следует, что давление газа не изменяется, т.е.

$$P_{1a} = P_{1b} = P_0. \quad (8)$$

Теперь установившуюся температуру можно найти из любого из уравнений (2):

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_{1b}}{T_1} \Rightarrow T_1 = T_0 \frac{V_{1b}}{V_0}. \quad (9)$$

Используя найденное значение объема, получаем

$$T_{1a} = T_{1b} = \frac{6}{5}T_0 \quad (10)$$

1.2 Т.к. смещением поршня пренебрегаем, то объемы газов остаются неизменными:

$$V_{2a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{2b} = \frac{6}{5}V_0. \quad (11)$$

Также остаются неизменными параметры газа в части сосуда **b**:

$$P_{2b} = P_0; \quad T_{2b} = \frac{6}{5}T_0. \quad (12)$$

В процессе нагревания полученная теплота идет на увеличение внутренней энергии газа в части сосуда **a**:

$$\frac{3}{2}P_0V_{1a} + Q = \frac{3}{2}P_{2a}V_{1a}. \quad (13)$$

Подставляем известные значения параметров

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0 + \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_{2a} \cdot \frac{4}{5}V_0. \quad (14)$$

и находим

$$P_{2a} = \frac{17}{12}P_0. \quad (15)$$

Значение температуры газа найдем из уравнения состояния Клапейрона (для состояний 0 и 2):

$$\frac{P_0V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_{2a}V_{2a}}{T_{2a}} \Rightarrow \frac{2P_0V_0}{3T_0} = \frac{17}{12}P_0 \cdot \frac{4}{5}V_0 \frac{1}{T_{2a}}, \quad (16)$$

из которого следует, что температура газа станет равной

$$T_{2a} = \frac{17}{10}T_0. \quad (17)$$

1.3 После установления равновесия температуры и давления газов в разных частях сосуда станут равными

$$\begin{aligned} P_{3a} &= P_{3b} = P_3 \\ T_{3a} &= T_{3b} = T_3 \end{aligned} \quad (18)$$

Для упрощения расчетов рассмотрим переход из состояния 0 в конечное состояние 3 (без промежуточных этапов). Первый закон термодинамики приводит к уравнению

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot 2V_0 + Q = \frac{3}{2}P_3 \cdot 2V_0, \quad (19)$$

из которого сразу следует, что давление газа будет равно

$$P_{3a} = P_{3b} = \frac{7}{6}P_0. \quad (20)$$

Запишем уравнения состояния для обеих порций газов:

$$\frac{P_0 V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_3 V_{3a}}{T_3}; \quad \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_3 V_{3b}}{T_3}. \quad (21)$$

Сложим эти два уравнения:

$$\frac{5}{3} \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_3 \cdot 2V_0}{T_3}. \quad (22)$$

и найдем значение конечной температуры:

$$T_3 = \frac{6}{5}T_0 \frac{P_3}{P_0} = \frac{7}{5}T_0. \quad (23)$$

Таким образом:

$$T_{3a} = T_{3b} = \frac{7}{5}T_0. \quad (24)$$

Наконец, значения объем можно выразить из уравнений (21). Если разделить их друг на друга, получим

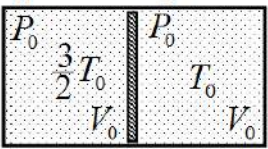
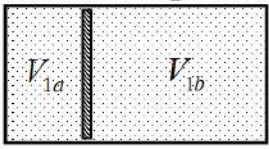
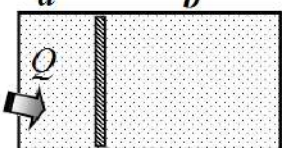
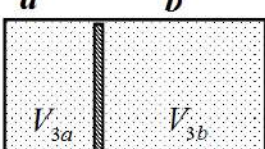
$$\frac{V_{3a}}{V_{3b}} = \frac{2}{3} \quad (25)$$

Вспоминая, что $V_{1a} + V_{1b} = 2V_0$, находим

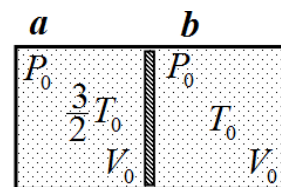
$$V_{3a} = \frac{4}{5}V_0; \quad V_{3b} = \frac{6}{5}V_0. \quad (26)$$

Все найденные значения параметров сведены в Таблице 1.

Таблица 1.

№	рисунок	параметры газа в части <i>a</i>	параметры газа в части <i>b</i>
0		$P_{0a} = P_0$	$P_{0b} = P_0$
		$V_{0a} = V_0$	$V_{0b} = V_0$
		$T_{0a} = \frac{3}{2} T_0$	$T_{0b} = T_0$
1		$P_{1a} = P_0$	$P_{1b} = P_0$
		$V_{1a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{1b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{1a} = \frac{6}{5} T_0$	$T_{1b} = \frac{6}{5} T_0$
2		$P_{2a} = \frac{17}{12} P_0$	$P_{2b} = P_0$
		$V_{2a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{2b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{2a} = \frac{17}{10} T_0$	$T_{2b} = \frac{6}{5} T_0$
3		$P_{3a} = \frac{7}{6} P_0$	$P_{3b} = \frac{7}{6} P_0$
		$V_{3a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{3b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{3a} = \frac{7}{5} T_0$	$T_{3b} = \frac{7}{5} T_0$

№	рисунок	параметры газа в части <i>a</i>	параметры газа в части <i>b</i>
0		$P_{0a} = P_0$	$P_{0b} = P_0$
		$V_{0a} = V_0$	$V_{0b} = V_0$
		$T_{0a} = \frac{3}{2} T_0$	$T_{0b} = T_0$
1		$P_{1a} = P_0$	$P_{1b} = P_0$
		$V_{1a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{1b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{1a} = \frac{6}{5} T_0$	$T_{1b} = \frac{6}{5} T_0$
2		$P_{2a} = \frac{17}{12} P_0$	$P_{2b} = P_0$
		$V_{2a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{2b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{2a} = \frac{17}{10} T_0$	$T_{2b} = \frac{6}{5} T_0$
3		$P_{3a} = \frac{7}{6} P_0$	$P_{3b} = \frac{7}{6} P_0$
		$V_{3a} = \frac{4}{5} V_0$	$V_{3b} = \frac{6}{5} V_0$
		$T_{3a} = \frac{7}{5} T_0$	$T_{3b} = \frac{7}{5} T_0$



Часть 2. Вертикальный сосуд.

2. При решении данной задачи нет необходимости рассматривать все этапы процесса, можно сразу рассматривать переход от начального к конечному состоянию. Зная отношение объемов и их сумму, легко найти объемы каждой части сосуда.

В начальном состоянии: объем нижней части $V_{0a} = \frac{1}{2}V_0$; объем верхней части $V_{0b} = \frac{3}{2}V_0$. Если давление газа в верхней части сосуда равно P_0 , то давление в нижней части равно $P_0 + \Delta P$, где ΔP - давление, которое создает поршень.

В конечном состоянии: объем нижней части $V_{1a} = \frac{4}{3}V_0$; объем верхней части $V_{1b} = \frac{2}{3}V_0$. Обозначим давление газа в верхней части сосуда P_1 , тогда давление в нижней части - $P_1 + \Delta P$.

Запишем уравнение первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A \quad (27)$$

При вертикальном положении сосуда газ совершает работу по подъему поршня, которая равна

$$A = \Delta P \left(\frac{2}{3}V_0 - \frac{1}{2}V_0 \right) = \frac{1}{6}\Delta P V_0. \quad (28)$$

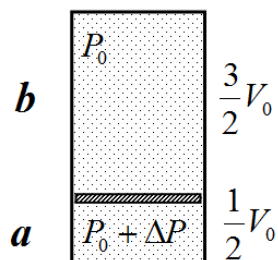
Эта величина также равна изменению потенциальной энергии поршня в поле тяжести Земли. Выразим изменение внутренней энергии газа через значения давлений и объемов:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2} \left(P_1 \cdot \frac{4}{3}V_0 + (P_1 + \Delta P) \cdot \frac{2}{3}V_0 \right) - \frac{3}{2} \left(P_0 \cdot \frac{3}{2}V_0 + (P_0 + \Delta P) \cdot \frac{1}{2}V_0 \right) = \\ &= \frac{3}{2} \left(P_1 V_0 + \Delta P \cdot \frac{2}{3}V_0 \right) - \frac{3}{2} \left(P_0 V_0 + \Delta P \cdot \frac{1}{2}V_0 \right) = \frac{3}{2}(P_1 - P_0)V_0 + \frac{1}{4}\Delta P V_0 \end{aligned} \quad (29)$$

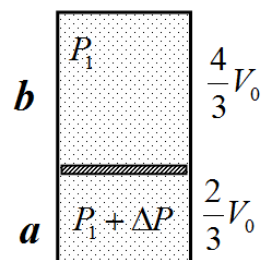
Далее необходимо найти значения ΔP и P_1 . Для этого воспользуемся равенством масс газов в обеих частях сосудов. Для начального состояния можно записать

$$\frac{3}{2}P_0 V_0 = \frac{1}{2}(P_0 + \Delta P)V_0. \quad (30)$$

начальное состояние



конечное состояние



Отсюда следует

$$\Delta P = 2P_0 \quad (31)$$

Для конечного:

$$\frac{4}{3}P_1V_0 = \frac{2}{3}(P_1 + \Delta P)V_0, \quad (30)$$

что дает

$$P_1 = 2P_0. \quad (32)$$

Подставляя полученные значения в формулу (29), получим

$$\Delta U = \frac{3}{2}(P_1 - P_0)V_0 + \frac{1}{4}\Delta PV_0 = 2P_0V_0. \quad (33)$$

Теперь можно вычислить количество сообщенной газу теплоты

$$Q = \Delta U + A = 2P_0V_0 + \frac{1}{6} \cdot 2P_0V_0 = \frac{7}{3}P_0V_0 \quad (34)$$