

Цирковая разминка Это задание состоит из двух не связанных между собой задач

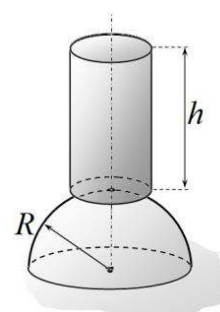
Условие

Задание 1. Цирковая разминка

Это задание состоит из двух не связанных между собой задач.



Задача 1. Девочка на шаре



Построим предельно упрощенную модель этого изящного циркового номера: первое – считаем, что шар закреплен и неподвижен; второе – считаем девочку сплошным однородным цилиндром; третье – считаем, что трение между поверхностью шара и основанием цилиндра достаточно велико, так, что цилиндр может прокатываться по поверхности шара без проскальзывания. Обозначим радиус шара R , высоту цилиндра h .

1. Определите, при каких значениях отношения $\frac{h}{R}$ цилиндр может устойчиво стоять вертикально на вершине шара.

Задача 2. Канатоходцы



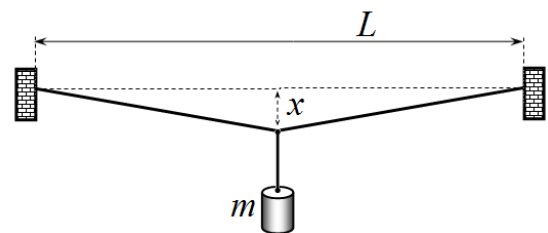
Исполнение этого циркового номера требует серьезной технической подготовки. Для исследования возможности хождения по канату проводится следующий модельный эксперимент.

Медная проволока длины $L = 2,0$ м подвешена горизонтально между двумя неподвижными упорами. Массой проволоки и ее натяжением в горизонтальном положении следует пренебрегать. К середине проволоки подвешивают груз массы m . При этом проволока провисает на некоторую величину x .

В ниже приведена диаграмма растяжения проволоки – зависимость силы упругости F , возникающей в проволоке, от ее относительной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{L}$. Там же приведены значения относительной деформации и соответствующей силы упругости в двух характерных точках. Участок диаграммы 0-1 – линейный (область упругости), точка 2 – точка разрыва.

Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

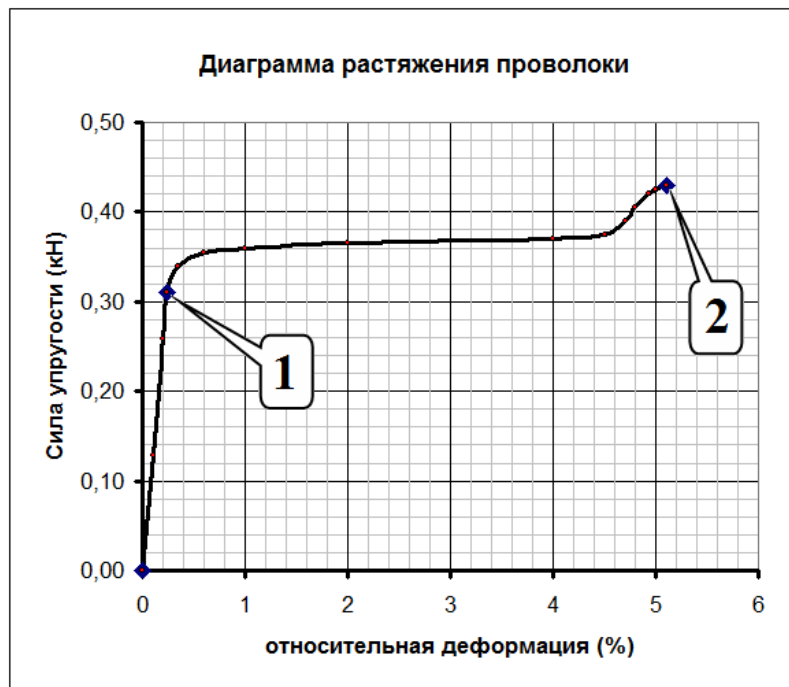
Используя приведенные данные, рассчитайте:



2.1 Величину провисания проволоки x , если масса подвешенного груза равна $m_1 = 2,0$ кг.

2.2 Максимальную массу груза m_2 , который можно подвесить к этой проволоке (до ее разрыва)

Диаграмма растяжения проволоки.



№	$\varepsilon(\%)$	$F, \text{кН}$
0	0,00	0,00
1	0,24	0,31
2	5,10	0,43

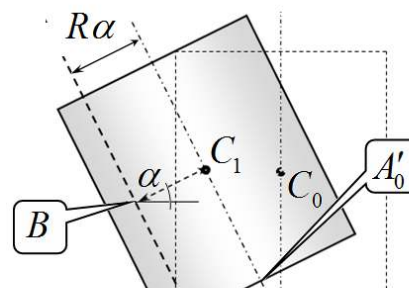
Решение

Задание 1. Цирковая разминка (Решение)

1. Условие равновесия тела – сумма сил и сумма моментов сил, действующих на тело равны нулю. При вертикальном положении цилиндра, когда его ось проходит через центр шара, эти условия выполняются. Следовательно, описанное положение цилиндра является положением равновесия не зависимо от радиуса шара и высоты цилиндра.

Для того, чтобы положения равновесия было устойчивым, необходимо, чтобы при отклонении от положения равновесия возникали силы (или моменты сил), стремящиеся вернуть тело в исходное положение. Это условие также может сформулировано иначе: положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии. Так как в рассматриваемой системе потенциальная энергия есть потенциальная энергия в поле тяжести, то условие минимума упрощается: при отклонении цилиндра от вертикального положения его центр масс должен подниматься.

Сделаем рисунок, позволяющий получить условия устойчивости равновесия цилиндра. На рисунке пунктиром показано вертикальное положение цилиндра: C_0 - положение центра масс (на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра); A_0 - точка касания на



шаре, на основании цилиндра это центр основания. При отклонении от вертикального положения цилиндр прокатывается по поверхности шара. Пусть при отклонении оси цилиндра на угол α от вертикали, точка касания смещается – на рисунке это точка A_1 . Точка A'_0 – центр основания цилиндра после его поворота. так качение происходит без проскальзывания, то длина дуги $|A_0A_1| = R\alpha$ равна длине отрезка A'_0A_1 на основании цилиндра (этот отрезок – множество точек касания при наклоне цилиндра). C_1 – положение центра масс отклоненного цилиндра.

Проведем прямую, проходящую через центр шара O и точку касания A_1 продлим ее до точки B , находящейся на расстоянии $\frac{h}{2}$ от основания цилиндра. Из рисунка следует, что высота центра масс цилиндра C_1 над центром шара равна

$$H = \left(R + \frac{h}{2}\right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha \quad (1)$$

Поэтому изменение этой высоты при отклонении цилиндра от вертикального положения равно

$$\Delta H = \left(R + \frac{h}{2}\right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right). \quad (2)$$

Как было отмечено ранее, условие устойчивости – найденное изменение высоты центра масс должно быть положительным. Решить соответствующее неравенство аналитически невозможно, поэтому следует воспользоваться тем, что угол отклонения должен быть малым. В этом случае можно воспользоваться приближенными формулами

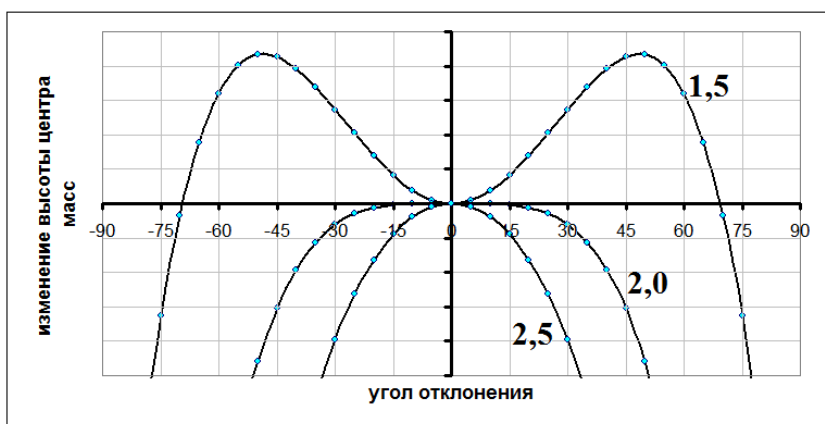
$$\sin \alpha \approx \alpha; \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (3)$$

В этом приближении формула (2) приобретает вид

$$\Delta H = \left(R + \frac{h}{2}\right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha - \left(R + \frac{h}{2}\right) \approx -\left(R + \frac{h}{2}\right) \frac{\alpha^2}{2} + R\alpha^2 = \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{4}\right) \alpha^2. \quad (4)$$

Из условия $\Delta H > 0$, следует, что условие устойчивости вертикального положения цилиндра имеет вид:

$$\frac{h}{R} < 2. \quad (5)$$



Для подтверждения справедливости проведенных рассуждений и расчетов приведем графики функции (2) при нескольких значениях величины $\frac{h}{R}$ (значения указаны на графике. (от участников олимпиады построение этого графика не требуется).

«Моментный» вариант решения.

Чтобы цилиндр после отклонения от вертикали возвращался в исходное положение, необходимо, чтобы момент силы тяжести «заставлял» его вернуться обратно. С помощью построенного рисунка можно заметить, что это будет выполняться при выполнении условия: Вертикаль, проходящая через точку C_1 (вдоль нее направлена сила тяжести) должна проходить правее точки касания A_1 . Математически это условие можно записать в виде:

$$\frac{h}{2} \sin \alpha < R \alpha \cos \alpha. \quad (4)$$

Используя приближенные формулы $\sin \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$, легко получаем решение (5).