



# Республиканская физическая олимпиада 2023 года (Заключительный этап)

## Экспериментальный тур

# Решения задач

*(для жюри)*

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



*Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших  
замечательных школьников!*

## 9 Класс

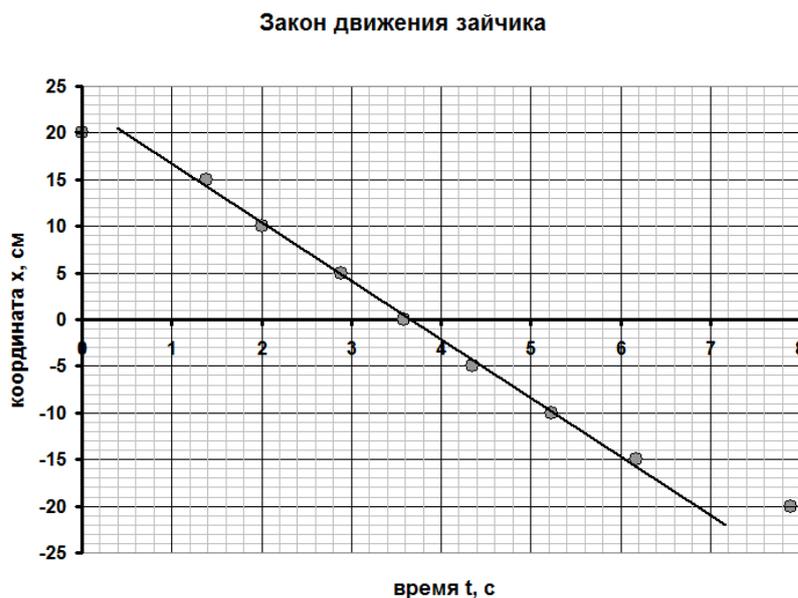
### Задание 1. Долгопериодный маятник. Решение.

#### Часть 1. Закон движения.

1.1 Для измерений удобно записывать в память секундомера времени прохождения зайчика через определенные точки – фактически снимается зависимость времени от координаты. Результаты этих измерений приведены в таблице 1 и на графике (рис. 1).

Таблица 1. Зависимость координаты зайчика от времени.

$X, \text{ см}$	$T, \text{ с}$
20	0,00
15	1,39
10	2,00
5	2,89
0	3,59
-5	4,35
-10	5,23
-15	6,17
-20	7,89



Как это не странно на первый взгляд, график является практически прямой линией – т.е. движение близко к равномерному.

1.2 Как следует из рисунка 1, движение можно считать равномерным в интервале координат примерно равным  $[-15 \text{ см}, +15 \text{ см}]$ . Скорость найденная по графику примерно равна  $v = 6,3 \text{ см/с}$ .

#### Часть 2. Изучение колебаний.

2.1 Эксперимент однозначно говорит, что период колебаний от амплитуды не зависит!

2.2 Результаты измерений периодов колебаний, при различных расстояниях до грузов приведены в Таблице 2.

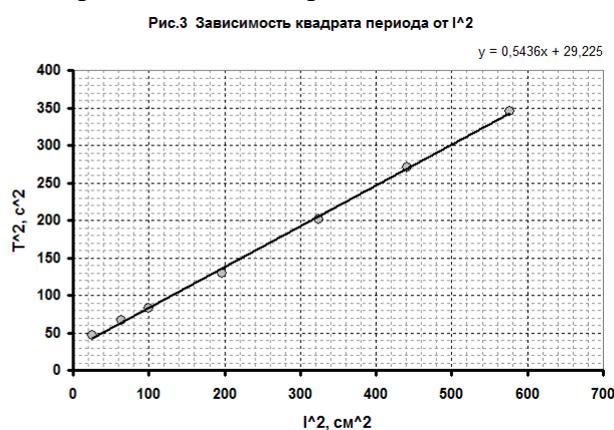
Таблица 2. Зависимость периода от расстояния до грузов.

$L, \text{ см}$	$T, \text{ с}$	$L^2, \text{ см}^2$	$T^2, \text{ с}^2$
5	6,87	25	47,20
8	8,19	64	67,08
10	9,08	100	82,45
14	11,35	196	128,82
18	14,18	324	201,07
21	16,46	441	270,93
24	18,58	576	345,22

Для проверки приведенной формулы следует построить зависимость квадрата периода от квадрата расстояния.

$$T = \sqrt{Al^2 + B} \Rightarrow T^2 = Al^2 + B$$

Графики прямых измерений и возведенных в квадрат показаны на рис. 2 -3.

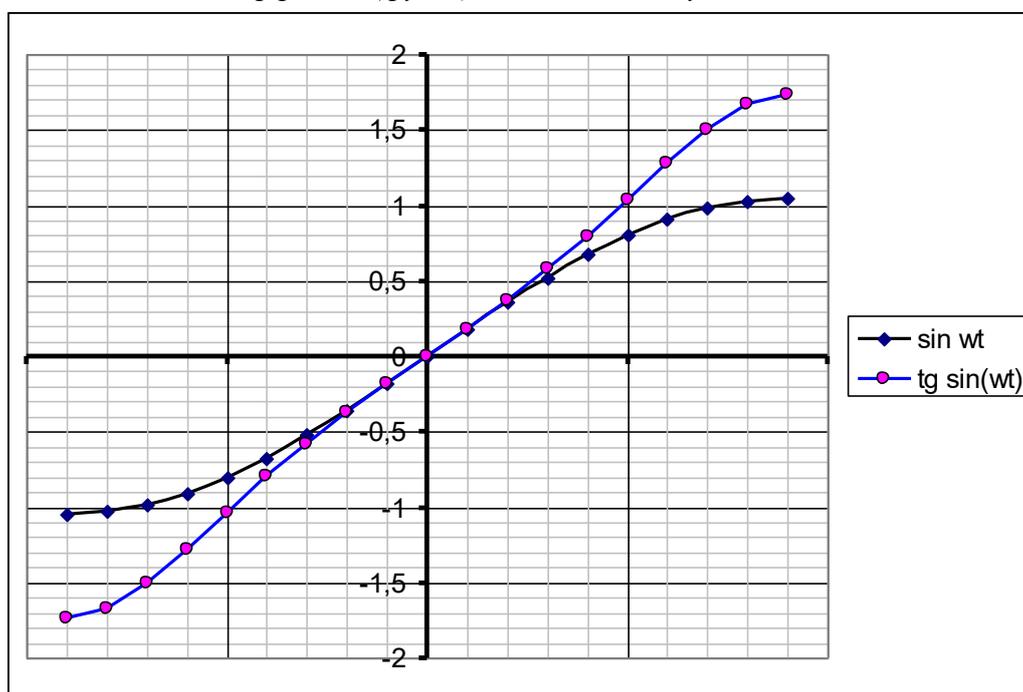


Видно, что «квадратная» зависимость линейна, что подтверждает справедливость приведенной формулы. По графику найдены параметры зависимости

$$A = 54 \frac{c^2}{cm^2}, \quad B = 29c^2.$$

*Примечания. Период колебаний изменяется от 8,5 с до 3,5 с.*

*Рисунок дает объяснение эффекта (функция «тангенс синуса» более линейна, чем «синус»)*



## Задание 2. Деление токов и деление напряжений. Решение.

### Часть 1. Делитель тока.

1.1 По закону Ома

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0}. \quad (1)$$

1.2 Из законов параллельного и последовательного соединения проводников можно записать

$$I_1 l = (I_0 - I_1)x. \quad (2)$$

Из этого выражения следует, что

$$I_1 = I_0 \frac{x}{l+x}. \quad (3)$$

1.3 Сопротивление постоянного резистора равно

$$R_0 = (9,30 \pm 0,05) \text{ Ом} \quad (4)$$

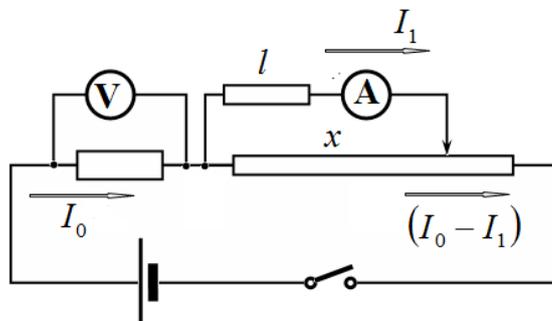
1.4 Длина участка проволоки равна

$$l = (10,0 \pm 0,5) \text{ см}. \quad (5)$$

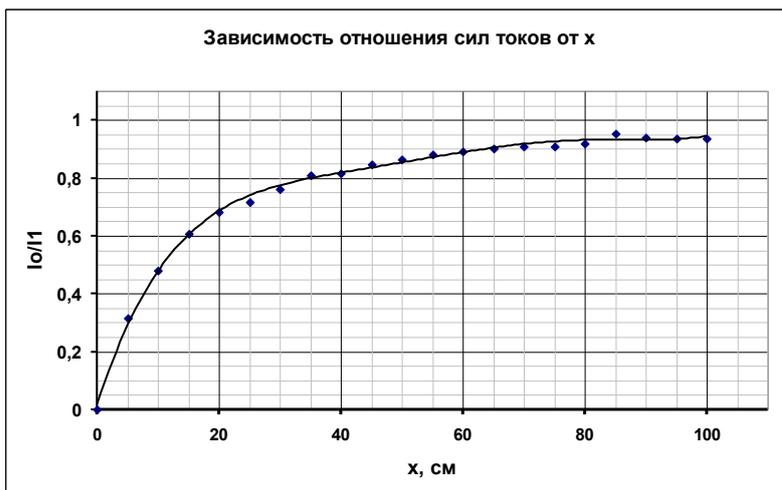
1.5 Результаты измерений зависимости напряжения  $U_0$  и силы тока  $I_1$  от длины участка  $BE$  -  $x$  приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

$X, \text{ см}$	$U_0, \text{ мВ}$	$I_1, \text{ мА}$	$I_0, \text{ мА}$	$l/x$	$I_0/I_1$
0	2900	0	312		
5	2940	100	316	2,000	3,161
10	3010	155	324	1,000	2,088
15	3100	202	333	0,667	1,650
20	3200	235	344	0,500	1,464
25	3310	255	356	0,400	1,396
30	3420	280	368	0,333	1,313
35	3560	310	383	0,286	1,235
40	3710	325	399	0,250	1,227
45	3840	350	413	0,222	1,180
50	4040	375	434	0,200	1,158
55	4230	400	455	0,182	1,137
60	4440	425	477	0,167	1,123
65	4650	450	500	0,154	1,111
70	4910	480	528	0,143	1,100
75	5180	505	557	0,133	1,103
80	5520	545	594	0,125	1,089
85	5930	608	638	0,118	1,049
90	6330	640	681	0,111	1,064
95	6800	685	731	0,105	1,067
100	7200	725	774	0,100	1,068



1.6 График зависимости отношения сил токов  $I_1/I_0$  от длины участка проволоки  $x$  показан на рисунке.



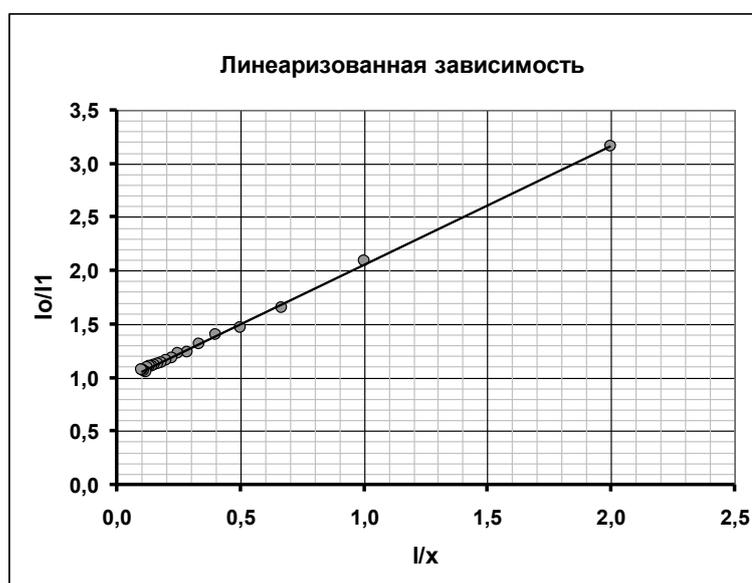
1.7 Теоретическая зависимость, описывающая эту кривую, определяется формулой (3), которая допускает простую линеаризацию

$$\frac{I_0}{I_1} = 1 + \frac{l}{x}. \quad (6)$$

Расчеты введенных переменных

$$Y = \frac{I_0}{I_1} \quad \text{и} \quad X = \frac{l}{x}$$

Таблице 1. График этой линеаризованной зависимости показан на рисунке.



1.8 Коэффициенты линеаризованной зависимости, рассчитанные по МНК, равны

$$a = 1,11 \pm 0,02$$

$$b = 0,94 \pm 0,01$$

(7)

1.9 Из формулы (6) следует, что теоретические значения этих коэффициентов равны

$$a = b = 1.$$

1.10 Полученные экспериментальные значения достаточно близки к теоретическим. Основной причиной полученных различий являются:

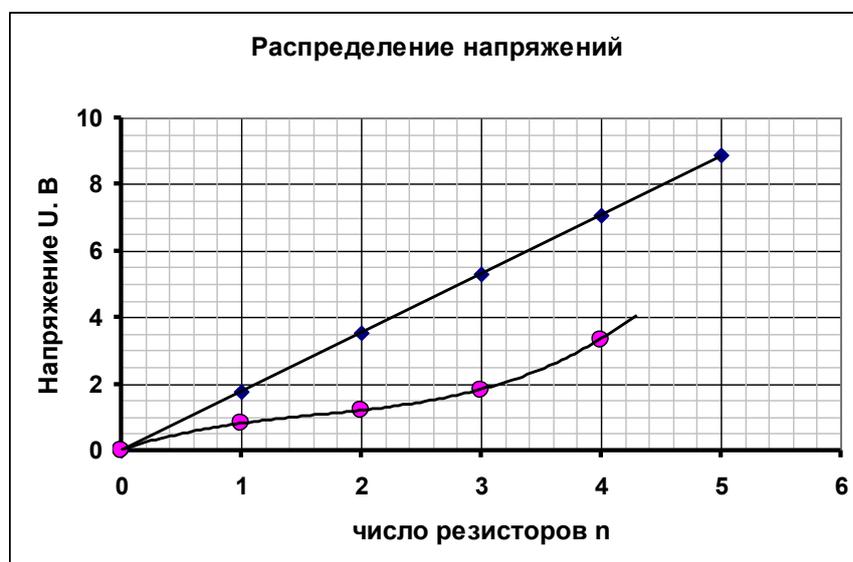
- погрешности измерений (прежде всего силы тока);
- систематические погрешности, связанные с неучтенными сопротивлениями проводов и контактов.

**Часть 2. Делитель напряжения.**

2.1 Результаты требуемых измерений приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

$n$	Мультиметр	Вольтметр	Линеаризация	
	$U_n, В$	$U_n, В$	$X = 5 - n$	$Y = \frac{U}{U_n} - \frac{5}{n}$
0	0	0	5	
1	1,76	0,80	4	6,25
2	3,53	1,21	3	4,94
3	5,30	1,82	2	3,28
4	7,08	3,34	1	1,44
5	8,86		0	0



Графики полученных зависимостей показаны на рисунке.

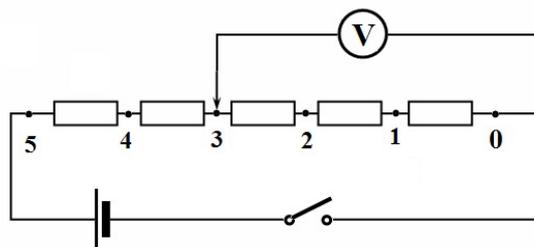
2.2 Собственное сопротивление мультиметра значительно превышает сопротивления резисторов, поэтому его можно считать бесконечно большим. В этом случае напряжение источника поровну «делится» между резисторами, поэтому теоретическая формула для напряжения, измеренного мультиметром, имеет примитивный вид

$$U_n = \frac{n}{5} U_s. \quad (8)$$

Измеренное значение напряжения источника  $U_s = 8,9 В$ , поэтому коэффициент наклона линейной зависимости должен быть равен  $\frac{\Delta U}{\Delta n} = 1,78$ , что хорошо совпадает с экспериментальным значением.

2.3 Основной причиной различия результатов измерений, проведенных разными приборами, является конечное сопротивление вольтметра  $R_v$ , считать которое бесконечно большим в данном случае нельзя.

2.4 Рассчитаем значение напряжения на вольтметре, если его сопротивление равно  $R_V$ . Будем считать, что напряжение источника остается постоянным. В этом случае измеряемое напряжение описывается функцией



$$U_n = U_s \frac{R_x}{(5-n)R + R_x}, \quad (9)$$

где  $n$  - число резисторов, на которых измеряется напряжение,  $R$  - сопротивление одного резистора;

$$R_x = \frac{nRR_V}{nR + R_V}. \quad (10)$$

сопротивление параллельно соединенных вольтметра и  $n$  резисторов. Преобразуем формулу (9), чтобы привести ее к линейной зависимости:

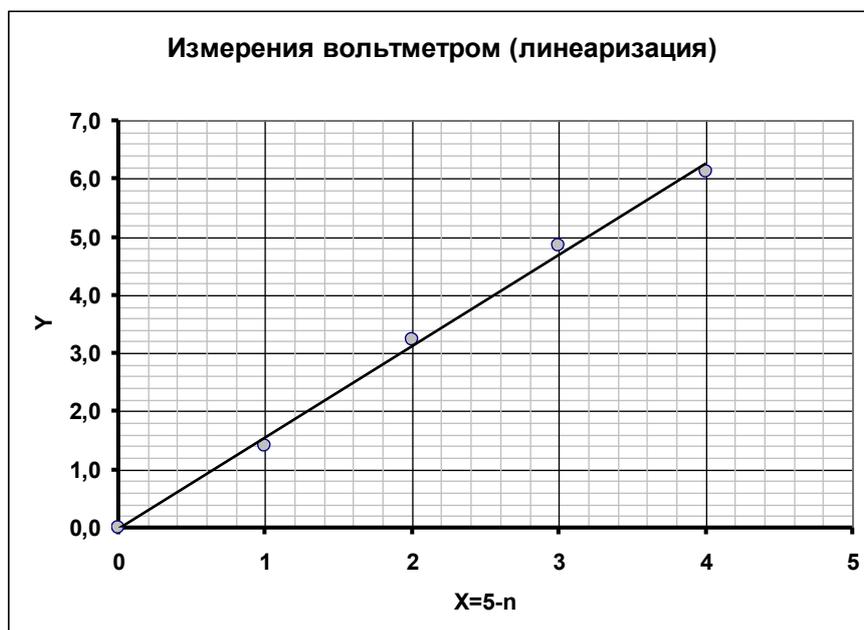
$$\frac{U_s}{U_n} = 1 + (5-n) \frac{R}{R_x} = 1 + (5-n) \frac{R}{nRR_V} (nR + R_V) = \frac{5}{n} + (5-n) \frac{R}{R_V}. \quad (11)$$

Интересно отметить, что при  $R_V \gg R$  формула (11) переходит в формулу (8).

Из соотношения (11) следует, что величина  $Y = \frac{U_s}{U_n} - \frac{5}{n}$  пропорциональна величине

$$X = 5 - n.$$

В последних столбцах Таблицы 2 приведены рассчитанные значения этих величин. График зависимости между ними показан на рисунке и подтверждает проведенные теоретические построения.



## 10 класс.

### Задание 1. Миллидинамометр. Решение.

#### Часть 1. Исследование пружины.

1.1 Длина недеформированной пружины

$$L_0 = 10,0 \text{ см} \quad (1)$$

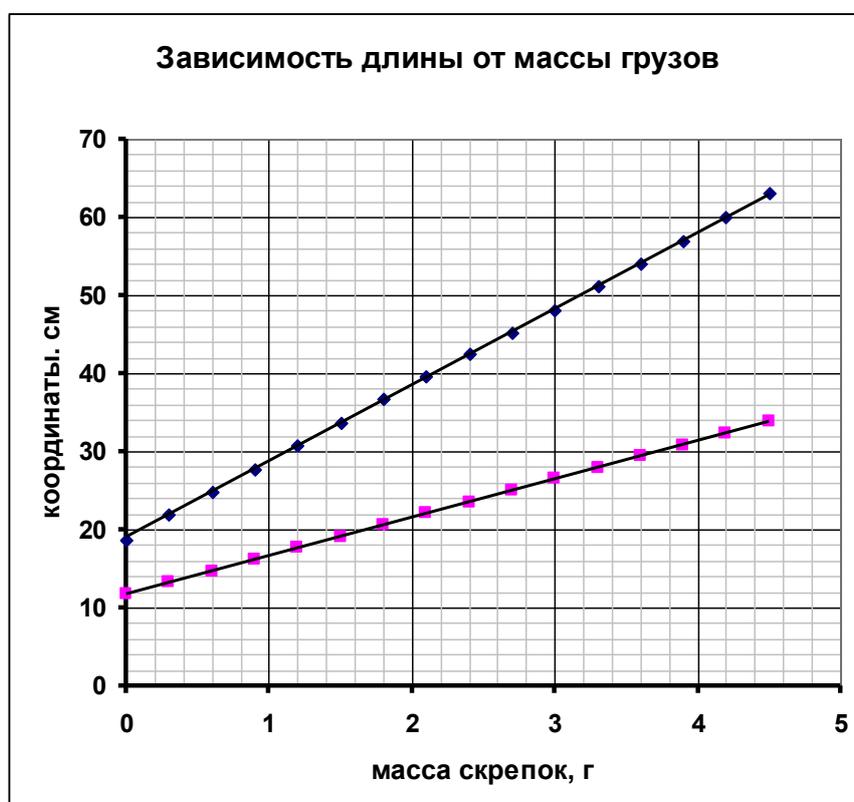
Длина пружины, растянутой под собственным весом, равна

$$L_1 = 19,0 \text{ см} \quad (2)$$

1.2 Результаты измерений зависимости координат конца и середины пружины от массы подвешенного груза приведены в Таблице 1 и на графиках

Таблица 1.

$n$	$m, \text{ г}$	$L, \text{ см}$	$L_{0,5}, \text{ см}$
0	0	18,8	11,8
1	0,3	21,9	13,2
2	0,6	24,8	14,7
3	0,9	27,8	16,2
4	1,2	30,8	17,6
5	1,5	33,8	19,1
6	1,8	36,8	20,6
7	2,1	39,6	22,0
8	2,4	42,6	23,5
9	2,7	45,3	25,0
10	3,0	48,1	26,5
11	3,3	51,1	27,9
12	3,6	54,0	29,4
13	3,9	57,0	30,9
14	4,2	60,0	32,3
15	4,5	63,0	33,8



1.3 Чтобы найти требуемые характеристики запишем теоретическую формулу длины целой пружины, считая, что ее деформация подчиняется закону Гука:

$$L = L_0 + \frac{m_0 g}{2k} + \frac{mg}{k}. \quad (3)$$

В этом выражении:

Первое слагаемое – длина недеформированной пружины;

Второе слагаемое – деформация пружины под действием собственного веса;

Третье слагаемое – деформация пружины под действием веса подвешенных скрепок.

Аналогично для половины пружины можно записать (учетом того, что ее коэффициент жесткости в два раза больше):

Экспериментальный тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

$$L_{0,5} = \frac{1}{2}L_0 + \frac{m_0 g}{2(2k)} + \frac{\left(m + \frac{m_0}{2}\right)g}{2k} = \frac{1}{2}L_0 + \frac{3 m_0 g}{4 k} + \frac{mg}{2k}. \quad (4)$$

1.4 Расчет по МНК параметров линейной зависимости  $L = at + b$  дает следующие значения коэффициентов

$$a = 9,77 \frac{см}{с}, \quad b = 19,0 см. \quad (5)$$

Используя теоретическую зависимость (3), находим требуемые параметры

$$a = \frac{g}{k} \Rightarrow k = \frac{g}{a} \quad (6)$$
$$b = L_0 + \frac{m_0 g}{2k} \Rightarrow m_0 = 2k \frac{b - L_0}{g}$$

Подстановка численных значений приводит к результатам

$$k = \frac{g}{a} = \frac{9,8 \frac{м}{с^2}}{9,77 \frac{см}{с}} = 1,0 \frac{мН}{см}. \quad (7)$$

$$m_0 = 2k \frac{b - L_0}{g} = 2 \cdot 1,0 \frac{мН}{см} \frac{(19,0 - 10,0) см}{9,8 \frac{м}{с^2}} = 1,8г \quad (8)$$

Аналогичный расчет для деформации половины пружины подтверждает теоретические построения: коэффициент жесткости оказывается в 2 раза большим, значения массы пружины совпадает с найденным значением.

1.5 Из формулы (3) выразим значение силы

$$L = L_0 + \frac{m_0 g}{2k} + \frac{F}{k} \Rightarrow \quad (9)$$
$$F = kL - k \left( L_0 + \frac{m_0 g}{2k} \right)$$

Откуда следует, что искомые коэффициенты градуировочной функции равны

$$a = k = 1,0 \frac{мН}{см}, \quad b = -k \left( L_0 + \frac{m_0 g}{2k} \right) = -19 мН. \quad (10)$$

Полученные значения дают простое правило расчета силы по длине пружины: сила в миллиньтонах равна длине пружины в см минус 19.

При горизонтальном расположении динамометра из параметра  $b$  следует исключить деформацию пружины под действием собственного веса. В этом случае значение коэффициента  $a$  остается неизменным, а коэффициент  $b$  становится равным

$$a = k = 1,0 \frac{мН}{см}, \quad b = -kL_0 = -10 мН. \quad (11)$$

## Часть 2. Характеристики миллидинамометра и его применение.

2.1 При любом положении динамометра его чувствительность (точность измерения силы) равна

Экспериментальный тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

$$\Delta F_{\min} = k\Delta x_{\min} = 0,2\text{МН} . \quad (12)$$

Максимальное значение силы определяется длиной шкалы измерения длины. Если принять ее равной 150 см. то максимальная сила равна  $F_{\max} = 140\text{МН}$  при горизонтальном расположении динамометра и  $F_{\max} = 131\text{МН}$  при вертикальном расположении.

2.2 Непосредственные измерения деформации пружины с подвешенным листом бумаги дают значение массы листа бумаги  $m = 1,7\text{г}$  .

2.3 Когда пружина находится на поверхности стола необходимо учесть силу трения, действующую на саму пружину, которая также трется о стол. В этом случае необходимо измерить деформации пружины в зависимости от числа скрепок, лежащих на листе бумаги. Тогда коэффициент наклона будет определяться трением бумаги о стол. А сила трения, действующая на пружину, будет влиять только на коэффициент сдвига. В результате измерений получено значение  $\mu \approx 0,2$  .

## Задание 2. Куда направлена сила трения? Решение.

### Часть 1. Тянем бумагу.

1.1 Сила трения направлена в сторону противоположную вектору относительной скорости движения тела. Эта основная идея позволяет легко построить направление сил, действующих на брусок (сила нормальной реакции, сила трения о бумагу, сила трения о дощечку). Как и банальном случае движения бруска по наклонной плоскости, коэффициент трения оказывается равным тангенсу угла между нормалью к поверхности дощечки и направлением результирующей силы взаимодействия бруска с дощечкой. В данном случае

$$\mu = \operatorname{tg}(\alpha - \beta). \quad (1)$$

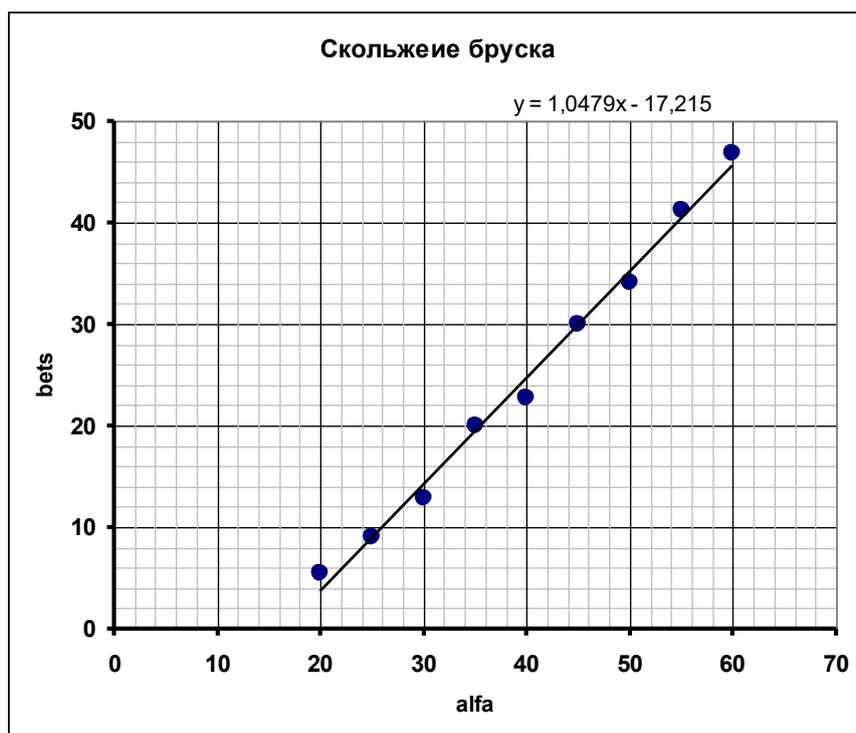
1.2 Траектория движения бруска действительно близка к прямой линии. При этом угол наклона траектории примерно равен

$$\beta \approx 15^\circ. \quad (2)$$

1.3 Результаты измерений зависимости между углами  $\beta$  и  $\alpha$  представлены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1.

$\alpha$	$\beta$
10	0,0
15	0,0
20	5,4
25	9,1
30	12,9
35	20,0
40	22,8
45	30,0
50	34,0
55	41,3
60	46,8



1.4 Из формулы (1) следует, что

$$\beta = \alpha - \operatorname{arctg}\mu. \quad (2)$$

График подтверждает данную зависимость, так как коэффициент его наклона близок к 1. Коэффициент сдвига равен  $b = 17,2^\circ$ , откуда следует, что

$$\mu = \operatorname{tg}b = 0,31. \quad (3)$$

Погрешность найденного значения составляет примерно 10%.

1.5 Из формулы (2) следует, что минимальное значение угла, при котором начинается скольжение, равно

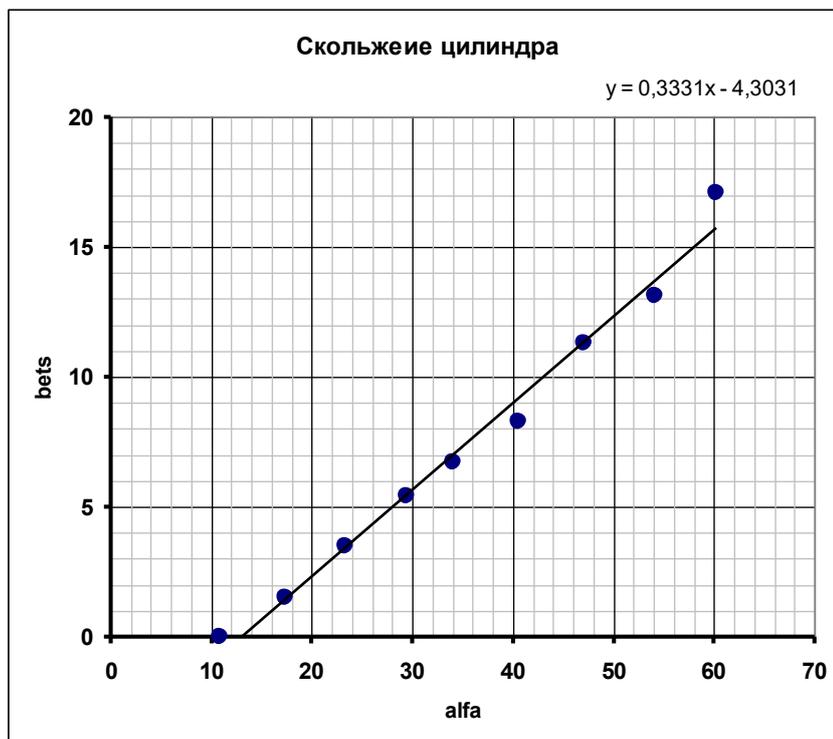
$$\alpha_{\min} = b \approx 17^\circ, \quad (4)$$

Что подтверждается экспериментально.

1.6 Результаты аналогичных измерений для металлического цилиндра приведены в Таблице 2 и на графике.

Таблица 2.

$\alpha$	$\beta$
6,0	0
10,8	0
17,4	1,5
23,4	3,5
29,5	5,4
34,1	6,7
40,5	8,3
47,1	11,3
54,1	13,1
60,2	17,1



1.7 Полученная зависимость линейна, но принципиально отличается от предыдущей зависимости, так как коэффициент наклона существенно отличается от 1. Главная причина этого заключается во вращательном движении цилиндра. Вследствие этого сила трения направлена под некоторым углом к вектору относительной скорости. Оценка этого угла отклонения дает значение примерно равное  $7^\circ$ . Вторая причина полученного отличия заключается в том, что в данном случае сила трения боковой поверхности цилиндра о дощечку является трением покоя, поэтому она определяется тангенциальной составляющей внешней силы, в данном случае силы трения основания цилиндра о поверхность бумаги.

## Часть 2. Толкаем карандаш.

2.1 Требуемые построения представлены на рисунке на следующей странице.

2.2 Полученная траектория движения центра карандаша не линейна, поэтому простейшая функция, которая ее описывает, есть квадратичная функция

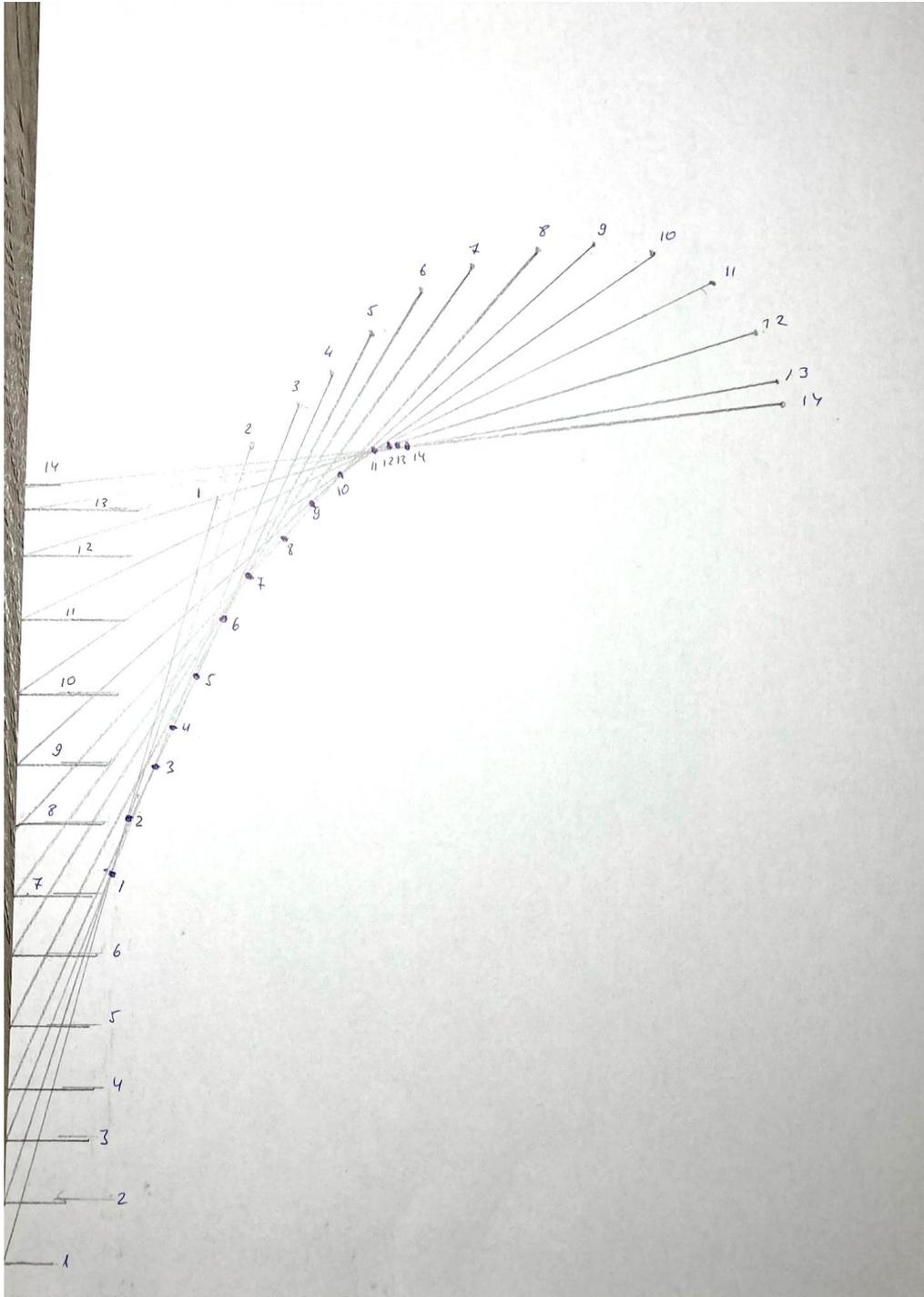
$$y = y_0 \frac{x(2x_0 - x)}{x_0^2}, \quad (5)$$

Где  $x_0 \approx 4,5\text{см}$ ,  $y_0 \approx 14\text{см}$  - координаты вершины параболы.

Экспериментальный тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

2.3 Причина такого поведения заключается в том, что при повороте карандаша увеличивается момент силы трения, закручивающий карандаш. Это приводит к еще более быстрому его повороту.

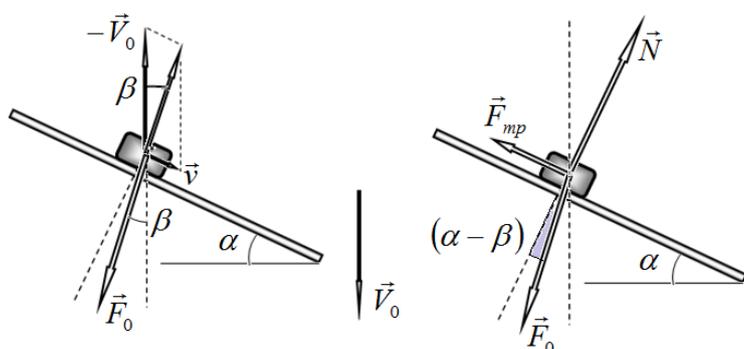
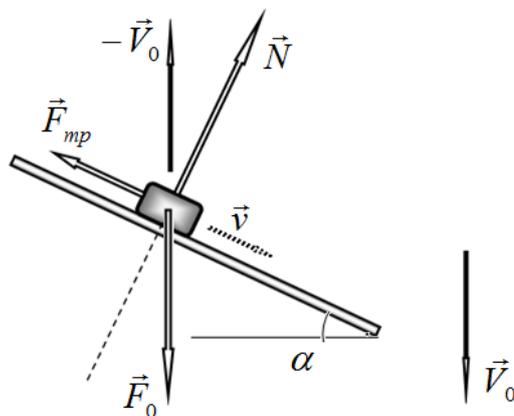


## Теоретическая добавка

### Часть 1. Тянем бумагу.

1.1 Сила трения направлена в сторону противоположную вектору относительной скорости движения тела.

Рассмотрим движение бруска. Когда мы начинаем тянуть бумагу с некоторой скоростью  $\vec{V}_0$  на брусок начинает действовать сила трения со стороны бумаги  $\vec{F}_{mp}$ , направленная в сторону противоположную скорости движения бруска относительно бумаги. Эта сила приводит к появлению силы нормальной реакции  $\vec{N}$  со стороны дощечки. Под действием этих сил брусок начинает смещаться относительно дощечки с некоторой скоростью  $\vec{v}$ , вследствие чего появляется сила трения  $\vec{F}_{mp}$ .



Но (самое важное!) при после начала движения бруска относительно дощечки изменяется направление силы  $\vec{F}_0$ . Вектор относительной скорости движения бруска  $(\vec{v} - \vec{V}_0)$  образует некоторый угол  $\beta$  с направлением движения бумаги. Именно под этим углом и будет смещаться брусок относительно

бумаги, именно этот угол легко поддается измерению. То, что направление силы  $\vec{F}_0$  зависит от скорости движения, является причиной того, что движение бруска становится равномерным! При таком движении сумма сил, действующих на брусок равна нулю, поэтому можно записать:

$$\begin{aligned} F_0 \sin(\alpha - \beta) &= F_{mp} \\ F_0 \cos(\alpha - \beta) &= N \end{aligned} \quad (1)$$

Используя закон для силы трения  $F_{mp} = \mu N$ , получим

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \mu. \quad (2)$$

Окончательно получаем, что

$$\beta = \alpha - \operatorname{arctg} \mu. \quad (3)$$

Качение цилиндра.

Описание движения цилиндра проводится аналогичным образом. На рисунке показаны силы, действующие на катящийся цилиндр. При установившемся движении выполняется уравнение

$$F_0 \sin(\alpha - \beta) = F_{mp}, \quad (1)$$

в котором сила трения есть сила трения покоя, покоя, которая не может быть выражена с помощью какой-либо формулы. Поэтому нужны дополнительные уравнения. Так цилиндр катится с постоянной скоростью (и считаем, что без проскальзывания) то сумма моментов сил, действующих на цилиндр равна нулю. Это условие относительно оси цилиндра имеет вид

$$F_{mp} R = M, \quad (2)$$

Где  $M$  - момент сил трения, действующих на основание цилиндра со стороны бумаги. В этих уравнениях  $M$  и  $F_0$  сложным образом зависят от скоростей поступательного и вращательного движений цилиндра.

К уравнениям динамики (1)-(2) следует добавить геометрическое соотношение между скоростями поступательного и вращательного движений:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega R \cos \alpha}{V_0 - \omega R \sin \alpha} = \frac{\Omega \cos \alpha}{1 - \Omega \sin \alpha}. \quad (3)$$

Эта система позволяет найти связь между углами  $\beta$  и  $\alpha$ , при известной зависимости  $M$  и  $F_0$  от отношения  $\Omega = \frac{\omega R}{V_0}$ . Найти эти зависимости достаточно сложно, но можно предложить

простые модельные соотношения, полученные на основании следующих логических заключений. При отсутствии вращения суммарная сила трения равна

$$F_0 = \mu_0 mg \quad (4)$$

Вращение даст некоторую поправку к этому выражению. Поэтому приближенно можно считать, что эта формула применима и при небольшом вращении.

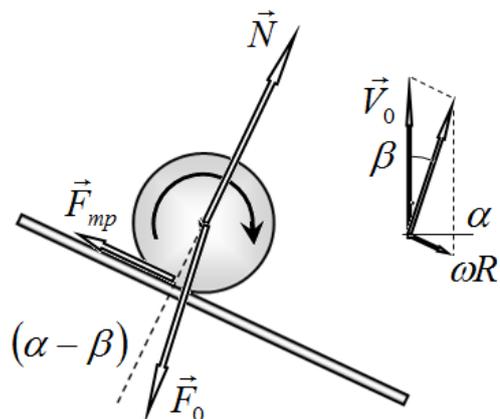
Момент сил трения относительно оси при поступательном движении равен нулю, он появляется при вращении, поэтому приближенно можно считать, что этот момент пропорционален отношению  $\Omega = \frac{\omega R}{V_0}$ , и записать

$$M = C \mu_0 mg R \cdot \Omega. \quad (5)$$

где  $C$  - некоторый безразмерный коэффициент.

Наконец, можно использовать приближение малых углов ( $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \beta$ ,  $\cos \beta \approx 1$ ). В этом случае из записанных уравнений следует, что

$$\beta \approx \frac{\alpha}{1 + C}. \quad (6)$$



## 11 Класс

### Задание 1. Мыльное трение. Решение.

#### Часть 1. Теоретическое введение.

1.1 При движении куска мыла по наклонной плоскости с постоянной скоростью выполняется уравнение, следующее из 2 закона Ньютона:

$$(m + m_0)g \sin \alpha - kv^\gamma m_0 g \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что

$$v = \left( \frac{1}{k} \frac{m + m_0}{m_0} \frac{h}{L} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = C \left( 1 + \frac{m}{m_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} h^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2)$$

1.2 Из полученного выражения следует, что

$$\beta = \frac{1}{\gamma}. \quad (3)$$

1.3 Из формулы (2) находим, что

$$f\left(\frac{m}{m_0}\right) = \left(1 + \frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4)$$

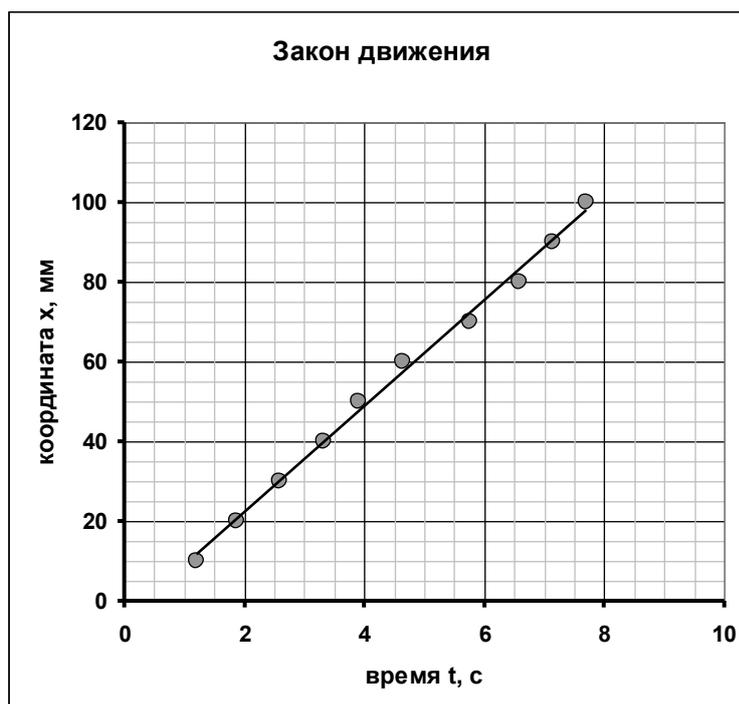
#### Часть 2. Закон движения.

2.1 Предварительные измерения показывают, что движению становится равномерным практически сразу после начала движения, после 2-3 см пройденного пути.

2.2 С помощью секундомера проще засекают времена прохождения мыла через фиксированные отметки координат. Результаты измерений приведены в Таблице 1 и на графике.

Таблица 1.

$x$ , мм	$t$ , с
10	1,21
20	1,88
30	2,58
40	3,33
50	3,90
60	4,65
70	5,76
80	6,58
90	7,14
100	7,71



Полученная зависимость линейна, что подтверждает равномерность движения.

**2.3** Максимальная точность достигается при использовании метода наименьших квадратов (МНК). Расчет по данным, приведенным в Таблице 1, дает результат

$$v = (13,3 \pm 0,6) \frac{\text{мм}}{\text{с}}. \quad (5)$$

**2.4** Расчет «примитивным» способом дает значение

$$v = \frac{S}{t} = \frac{100 \text{ мм}}{7,71 \text{ с}} = 13,0 \frac{\text{мм}}{\text{с}}. \quad (6)$$

Что попадает в доверительный интервал, рассчитанный по МНК.

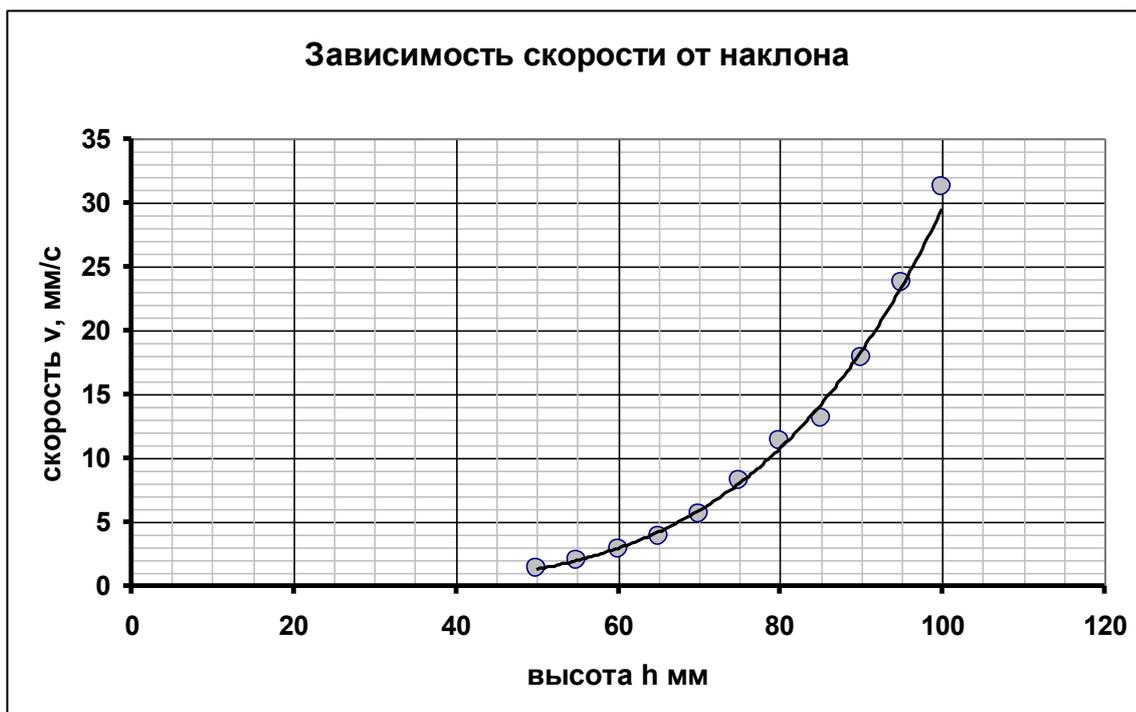
### Часть 3. Зависимость установившейся скорости от наклона плоскости.

**3.1** В Таблице 2 приведены результаты измерения времени движения мыла  $t$  на участке равномерного движения  $s = 50 \text{ мм}$ . В таблице приведены результаты расчета скорости движения, а также расчеты, для построения линеаризованного графика в двойном логарифмическом масштабе.

**Таблица 2.**

$h, \text{ мм}$	$t, \text{ с}$	$v, \text{ мм/с}$		$\ln h$	$\ln v$
50	36,5	1,370		3,912	0,315
55	25,5	1,961		4,007	0,673
60	17,4	2,874		4,094	1,056
65	12,7	3,937		4,174	1,370
70	8,8	5,682		4,248	1,737
75	6,1	8,197		4,317	2,104
80	4,4	11,364		4,382	2,430
85	3,8	13,158		4,443	2,577
90	2,8	17,857		4,500	2,882
95	2,1	23,810		4,554	3,170
100	1,6	31,250		4,605	3,442

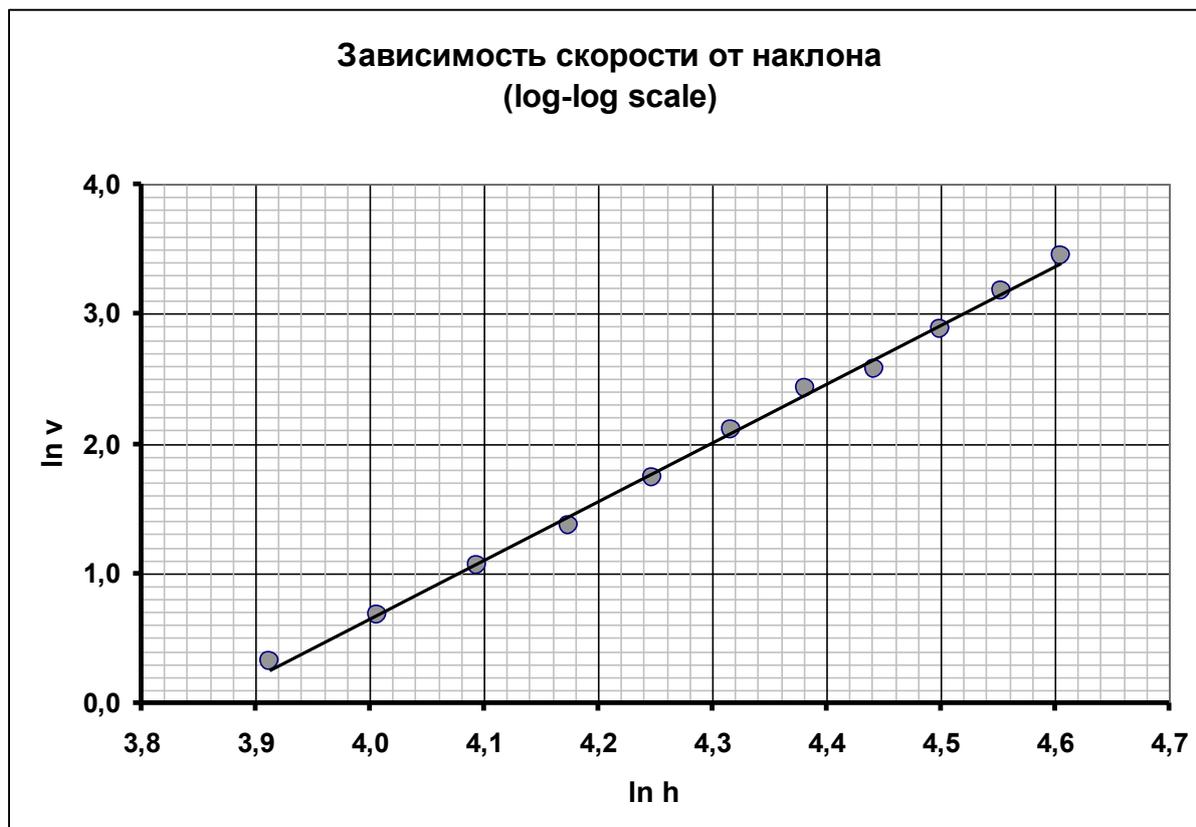
Ниже показан график полученной зависимости.



3.2 Из формулы (2) следует, что зависимость скорости от высоты подъема наклонной плоскости в двойном логарифмическом масштабе линейна

$$\ln v = \beta \ln h + b. \quad (7)$$

График этой зависимости показан на рисунке.



Линейность данного графика подтверждает справедливость формулы (3).

Как следует из формулы (7) коэффициент наклона этой зависимости равен показателю степени  $\beta$ . Расчет по МНК дает значение

Экспериментальный тур.

Решения задач. Бланк для жюри.

$$\beta = 4,53 \pm 0,14. \quad (8)$$

3.3 Значение показателя степени  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\beta} = 0,22$$

$$\Delta\gamma = \gamma \frac{\Delta\beta}{\beta} = 0,01 \quad (9)$$

#### Часть 4. Зависимость скорости от массы цилиндров.

4.1 Эксперимент проводился для куска мыла массой  $m_0 = 75\text{г}$  для разных масс «двигателя». Высота края  $h=80\text{ мм}$ . Путь мыла в каждом опыте  $S = 100\text{ мм}$ .

Результаты измерений скорости установившегося движения мыла от массы цилиндров приведены в таблице 3. В этой же таблице приведены результаты расчётов, для построения линеаризованного графика.

Таблица 3.

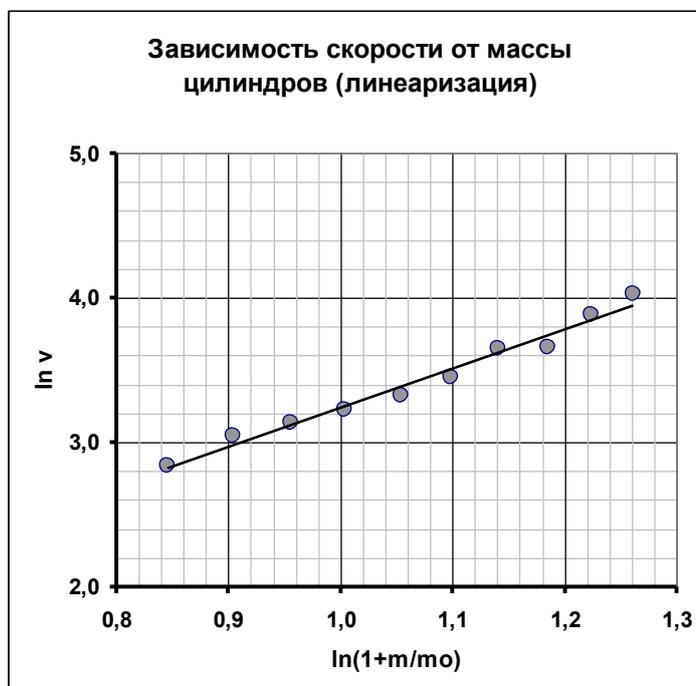
$m, \text{г}$	$t, \text{с}$	$v, \text{мм/с}$		$\ln(1+m/m_0)$	$\ln v$
100	5,87	17,04		0,846	2,835
110	4,77	20,96		0,904	3,043
120	4,36	22,94		0,956	3,133
130	3,98	25,13		1,004	3,224
140	3,60	27,78		1,054	3,324
150	3,18	31,45		1,099	3,448
160	2,61	38,31		1,141	3,646
170	2,58	38,76		1,185	3,657
180	2,06	48,54		1,224	3,882
190	1,79	55,87		1,261	4,023

4.2 Из уравнения (2) при постоянном значении  $h$  следует.

$$\ln v = \frac{1}{\gamma} \ln \left( 1 + \frac{m}{m_0} \right) + b_2. \quad (10)$$

Поэтому зависимость  $\ln v$  от параметра  $\ln \left( 1 + \frac{m}{m_0} \right)$  должна быть

линейной. На рисунке показан график этой линеаризованной зависимости, который действительно близок к линейному. По наклону графика Экспериментальный тур.  
Решения задач. Бланк для жюри.



можно определить показатель степени в формуле для коэффициента трения:

$$\gamma \approx 0,37. \quad (11)$$

Это значение заметно отличается от значения, полученного ранее.

**4.3** Основной причиной этого различия, по-видимому, является пренебрежение силой трения между цилиндрами. Можно сказать, что это трение «эффективно» уменьшает массу цилиндров, толкающих мыло.

## Задание 2. Давление насыщенных паров воды. Решение.

### Часть 1. Измерение внутреннего объема.

1.1 Все измерения проведены при атмосферном давлении

$$P_0 = 735 \text{ мм рт. ст.} \quad (1)$$

1.2 Используя закон Бойля – Мариотта, запишем для газа в приборе

$$P_0(V_0 + \Delta V_{\max}) = (P_0 + \Delta P)(V_0 + \Delta V). \quad (2)$$

Проведем преобразование уравнения (2), полагая изменение объема малым:

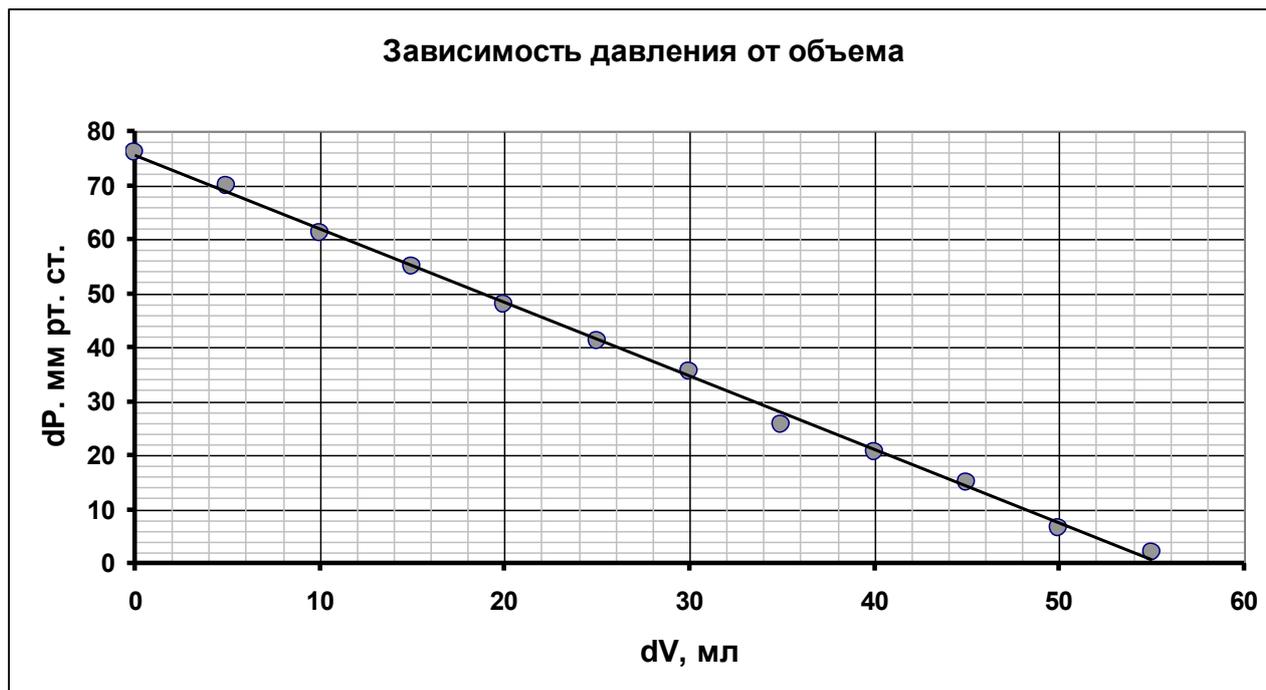
$$P_0 + \Delta P = P_0 \frac{V_0 + \Delta V_{\max}}{V_0 + \Delta V} = P_0 \frac{1 + \frac{\Delta V_{\max}}{V_0}}{1 + \frac{\Delta V}{V_0}} \approx P_0 \left( 1 + \frac{\Delta V_{\max}}{V_0} - \frac{\Delta V}{V_0} \right) \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Delta P = \frac{P_0}{V_0} (\Delta V_{\max} - \Delta V)$$

1.3 В начале измерений поршень находился на отметке  $\Delta V_{\max}$ . После присоединения шприца к колбе изменялся объем воздуха  $\Delta V$ , при этом измерялась разность давлений  $\Delta P$ . Измерения проведены при уменьшении объема и в обратном порядке при его увеличении. В качестве окончательного результата использовано среднее значение. Результаты измерений данной зависимости приведены в таблице 1 и на графике.

**Таблица 1.**

$\Delta V$	$(\Delta P)_{\text{сжатие}}$	$(\Delta P)_{\text{расширение}}$	$(\Delta P)_{\text{среднее}}$
60	0	0	0,0
55	2	2	2,0
50	5	8	6,5
45	16	14	15,0
40	21	20	20,5
35	25	26	25,5
30	37	34	35,5
25	42	40	41,0
20	48	48	48,0
15	56	54	55,0
10	62	60	61,0
5	72	68	70,0
0	76	76	76,0



Полученная зависимость с высокой точностью линейна, поэтому использование приближения (3) оказывается оправданным.

1.4 Из формулы (3) следует, что коэффициент наклона данной зависимости равен  $a = -\frac{P_0}{V_0}$ .

Экспериментальное значение этого коэффициента (рассчитанного по МНК) равно  $a = -1,37 \frac{\text{мм}}{\text{мл}}$ , следовательно, внутренний объем прибора равен

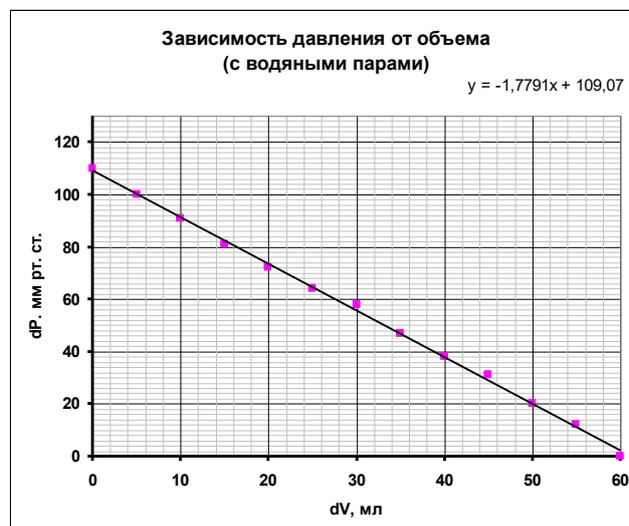
$$V_0 = -\frac{P_0}{a} = 540 \text{ мл}. \quad (4)$$

## Часть 2. Изотермический процесс влажного воздуха.

2.1 Измерения проведены при температуре  $t = 51^\circ\text{C}$ .

2.2 Измерения проводились в том же порядке, что и в п.1.2. Результаты измерений приведены в таблице 2 и на графике.

$\Delta V$	$\Delta P$
60	0
50	19
40	38
30	56
20	76
10	98
0	120



**2.3** Полученная зависимость также оказалась близка к линейной. Потому можно воспользоваться выводом, проведенным в п.1.2. Только необходимо учесть, что:

– объем занимаемый воздухом уменьшился на объем налитой воды  $V'_0 = V_0 - V = 340 \text{ мл}$ ;

– полученное уравнение описывает изменения давление сухого воздуха, которое в данном случае оказывается меньше атмосферного на величину давления водяного пара  $P_s$ , поэтому в итоговом уравнении надо давление атмосферное заменить на  $(P_0 - P_s)$ . В итоге теоретическая зависимость задается формулой

$$\Delta P = \frac{P_0 - P_s}{V'_0} (\Delta V_{\max} - \Delta V). \quad (5)$$

В данном случае коэффициент наклона экспериментальной зависимости оказался равным

$a = -1,78 \frac{\text{мм}}{\text{мл}}$ , поэтому

$$a = -\frac{P_0 - P_s}{V'_0} \Rightarrow P_0 - P_s = -aV'_0 \approx 605 \text{ мм рт. ст.} \quad (6)$$

Окончательно находим, что

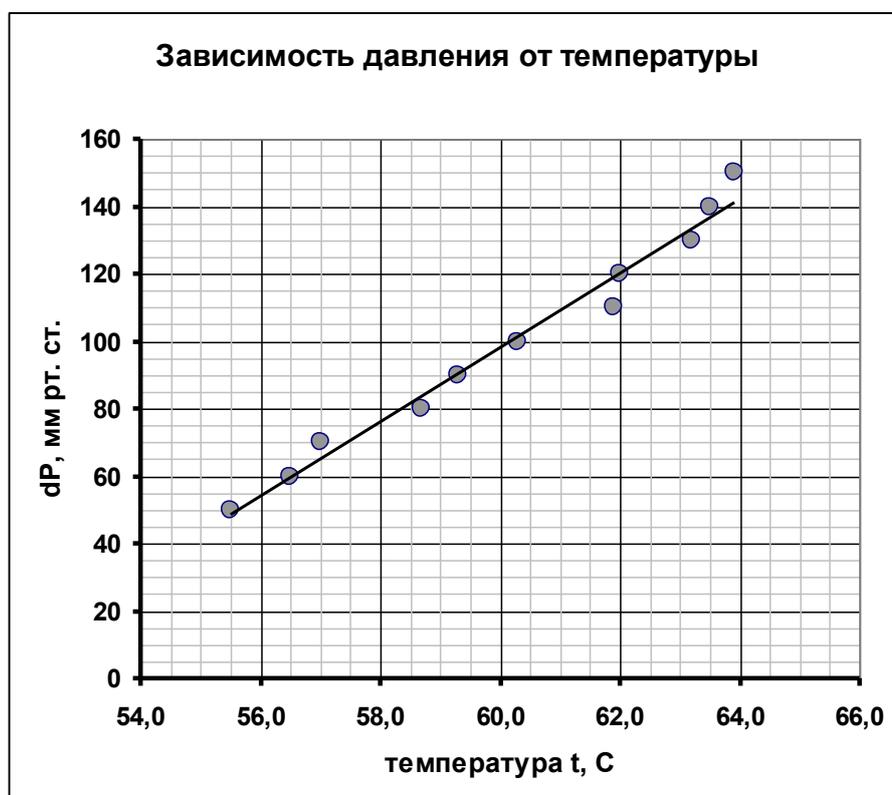
$$P_s \approx 130 \text{ мм рт. ст.} \quad (7)$$

### Часть 3. Зависимость давления насыщенных паров от температуры

**3.1** Результаты измерений зависимости разности давлений от температуры при описанной методике эксперимента приведены в Таблице 3 и на графике.

Таблица 3.

$t, ^\circ\text{C}$	$\Delta P$ , мм рт. ст.
63,9	150
63,5	140
63,2	130
62,0	120
61,9	110
60,3	100
59,3	90
58,7	80
57,0	70
56,5	60
55,5	50



### 3.2 Выразим удельный объем водяного пара из уравнения Менделеева - Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow V' = \frac{V}{m} = \frac{RT}{MP} \quad (8)$$

и подставим его в уравнение Клапейрона – Клаузиуса:

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{L}{TV'} = \frac{LMP_s}{RT^2}. \quad (9)$$

Из этого выражение находим, что удельная теплота испарения выражается формулой:

$$L = \frac{RT^2}{M} \left( \frac{1}{P_s} \frac{dP_s}{dT} \right). \quad (10)$$

Для расчета по этой формуле требуется найти производную от давления насыщенного пара по температуре. Ее можно найти по результатам измерений зависимости разности давлений от температуры.

Для этого запишем уравнение Клапейрона для сухого воздуха, содержащегося в колбе:

$$\frac{P_0 + \Delta P - P_s}{T} = \frac{P_0 + \Delta P_0 - P_{s0}}{T_0}. \quad (11)$$

Здесь  $\Delta P_0$  разность давлений,  $P_{s0}$  давление насыщенного водяного пара при некоторой температуре  $T_0$ , в качестве которой лучше взять температуру, для которой измерено давление насыщенного пара в части 2.

Из уравнения (11) находим

$$P_s = P_0 + \Delta P - \frac{T}{T_0} (P_0 + \Delta P_0 - P_{s0}) \quad (12)$$

Теперь не сложно найти требуемую производную

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{d(\Delta P)}{dT} - \frac{P_0 + \Delta P_0 - P_{s0}}{T_0} \quad (13)$$

Из графика полученной зависимости находим, что коэффициент его наклона равен

$$a = \frac{d(\Delta P)}{dT} \approx 11,0 \frac{\text{мм}}{\text{К}}. \quad (14)$$

При средней температуре диапазона  $T = (60 + 273)\text{К} = 333\text{К}$  давление насыщенного водяного пара равно  $P_{s0} = 130\text{мм рт.}$  поэтому

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{d(\Delta P)}{dT} - \frac{P_0 + \Delta P_0 - P_{s0}}{T_0} = 11,0 - \frac{735 + 100 - 130}{333} = 8,9 \frac{\text{мм}}{\text{К}}. \quad (15)$$

Тогда, окончательно получим для удельной теплоты испарения

$$L = \frac{RT^2}{M} \left( \frac{1}{P_s} \frac{dP_s}{dT} \right) = \frac{8,31 \cdot (333)^2}{18 \cdot 10^{-3}} \frac{8,9}{150} = 3,0 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}. \quad (16)$$

Найденное значение всего на 30% процентов превышает табличное значение.