

Условие

Задание 2. Как измеряли Вселенную.

Данное задание состоит из 4 связанных между собой задач. В задаче используется современная система единиц. Во всех частях задания обязательно сделайте рисунки, поясняющие Ваши расчеты.

Часть 1. Радиус Земли.

Моряк, находящийся на мачте на высоте $h = 10$ м над уровнем моря, увидел свет маяка высотой $h = 10$ м над уровнем моря на расстоянии $L = 22,5$ км

1.1 Рассчитайте по приведенным данным радиус Земли.



Часть 2. Плотность Земли.

Впервые гравитационную постоянную G , входящую в закон всемирного тяготения Ньютона, измерил в 1798 году британский физик-экспериментатор Генри Кавендиш. Он же впервые рассчитал среднюю плотность Земли. По современным данным она равна $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$. Во времена Г. Кавендиша численное значение ускорения свободного падения на поверхности Земли было известно (считайте, что $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$).

2.1 Используя приведенные данные, рассчитайте среднюю плотность Земли.



Часть 3. Расстояние до Луны.

Легко измерить время между двумя последовательными полнолуниями, оно равно 29,5 суток. Длительность Земного года примем равной 365,25 суток. Считайте, что орбиты Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли являются окружностями, лежащими в одной плоскости.

3.1 Рассчитайте среднее расстояние от Земли до Луны.



Часть 4. Масса Солнца.

В настоящее время расстояния до ближайших небесных тел измеряют с высокой точностью с помощью радиолокации. По данным измерений свет распространяется от Земли до Солнца и обратно за время $\tau = 16,7$ мин. Скорость света в вакууме равна $c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

4.1 Рассчитайте по приведенным данным массу Солнца.

Решение

Задание 2. Как измеряли Вселенную. Решение.

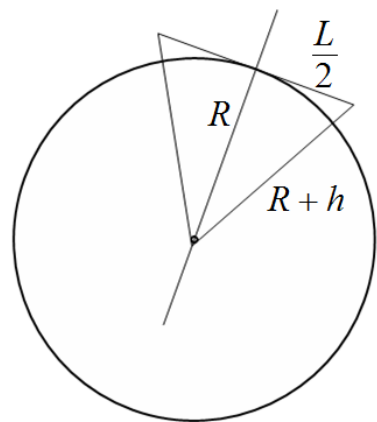
Часть 1. Радиус Земли.

1.1 Элементарные построения условия видимости приводят к уравнению, следующему из теоремы Пифагора

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (R + h)^2 - R^2 \approx 2Rh. \quad (1)$$

Мы пренебрегли малым слагаемым h^2 . Из этой формулы следует, что радиус Земли равен

$$R = \frac{L^2}{8h}. \quad (2)$$



Численный подсчет дает результат

$$R \approx 6,3 \cdot 10^6 \text{ м.} \quad (3)$$

Часть 2. Масса Земли.

2.1 Из закона всемирного тяготения можно записать формулу для ускорения свободного падения

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}. \quad (4)$$

Из этой формулы находим массу Земли $M = \frac{g_0 R^2}{G} = 5,9 \cdot 10^{24}$ кг. Средняя плотность Земли равна

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g_0}{4\pi R G} = 5,55 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (5)$$

Часть 3. Расстояние до Луны.

3.1 Расстояние от Земли до Луны можно найти r , рассматривая движение Луны с точки зрения законов динамики (2 закон Ньютона и закон всемирного тяготения):

$$m\omega^2 r = G \frac{mM}{r^2}. \quad (6)$$

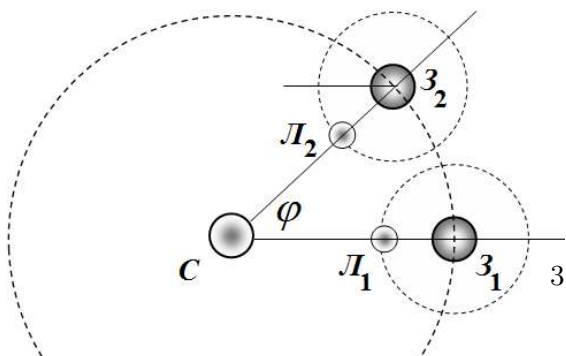
Где m - масса Луны, M - масса Земли, $\omega = \frac{2\pi}{T_L}$ - угловая скорость движения Луны вокруг Земли. Для упрощения расчетов можно использовать формулу (4):

$$\left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 r = \frac{g_0 R^2}{r^2}. \quad (7)$$

Из этой формулы находим радиус лунной орбиты

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2}}. \quad (8)$$

Теперь необходимо учесть, что время между двумя новолуниями не равно периоду обращения Луны вокруг Земли. Обозначим T_3 период обращения Земли вокруг Солнца (1 год). На рисунке показано положение Солнца, Земли и Луны в два последовательных новолуния. Очевидно, что время между полнолуниями (которые легче наблюдать) равно



времени между новолуниями. За время между новолуниями τ Луна по своей орбите повернется на угол $\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_3}\tau\right)$, поэтому можно записать:

$$\tau = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_3}\tau\right)}{\omega_{\text{Л}}} = \frac{\left(2\pi + \frac{2\pi}{T_3}\tau\right)}{2\pi} T_{\text{Л}}. \quad (9)$$

Из этой формулы следует, что период обращения Луны описывается формулой:

$$\frac{1}{T_{\text{Л}}} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_3}. \quad (10)$$

Подставляя это выражение в формулу (8) получим

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_3}\right)\right)^2}}. \quad (11)$$

Для численных расчетов необходимо подставить все значения в системе СИ:

$$r = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\left(2\pi \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{T_3}\right)\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} (6,5 \cdot 10^6 \text{м})^2}{\left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{с}} \left(\frac{1}{29,5} + \frac{1}{365,25}\right)\right)^2}} = 3,9 \cdot 10^8 \text{м}. \quad (12)$$

Часть 4. Масса Солнца.

4.1 Запишем второй закон Ньютона (в совокупности с законом всемирного тяготения) для движения Земли

$$m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G \frac{mM}{R^2}. \quad (13)$$

Где m - масса Земли, M - масса Солнца, R - радиус Земной орбиты, $T = 1$ год - период обращения Земли вокруг Солнца. Из этого уравнения выразим массу Солнца

$$M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R^3}{G}. \quad (14)$$

Радиус орбиты найдем из данных радиолокационных измерений

$$R = c \frac{\tau}{2}. \quad (15)$$

Окончательно для массы Солнца получим

$$M = \frac{1}{G} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left(\frac{c\tau}{2} \right)^3. \quad (16)$$

Подставим численные значения и вычислим

$$M = \frac{1}{G} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left(\frac{c\tau}{2} \right)^3 = \frac{1}{6,67 \cdot 10^{-11}} \left(\frac{2\pi}{365,25 \cdot 24 \cdot 3600} \right)^2 \left(\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 16,7 \cdot 60}{2} \right)^3 = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ кг}.$$