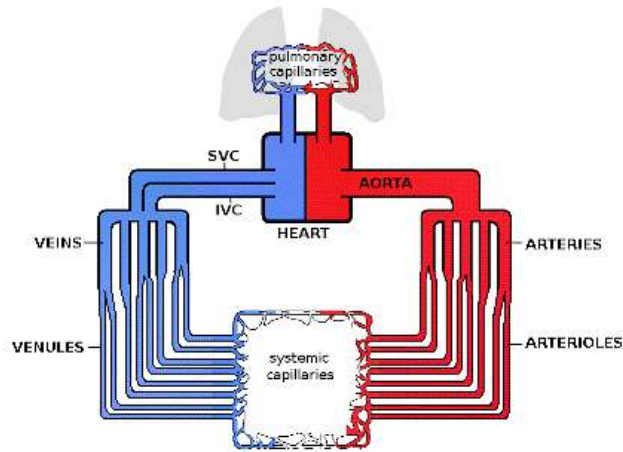


# Гемодинамика - артериальная система

## Условие



## Задание 3. Гемодинамика - артериальная система.

**Гемодинамика** — движение крови по сосудам, возникающее вследствие разности гидростатического давления в различных участках кровеносной системы.

При расчете характеристик движения крови по сосудам будем использовать следующие упрощения: - все сосуды являются цилиндрическими, их форма остается неизменной при изменении давления крови; стенки сосудов не проницаемы для крови; - распределение давлений внутри кровеносной системы стационарно, т.е. не зависит от времени, иными словами вме-

сто регулярных пульсаций, обусловленных сжатием сердца, рассматриваем усредненное по времени распределение давлений, давление, создаваемое сердцем, также считаем постоянным; - объем крови, протекающий в единицу времени через поперечное сечение (эта величина часто называется расход жидкости -  $q$ ) цилиндрической трубы радиуса  $R$  и длины  $L$ , описывается формулой Пуазейля:

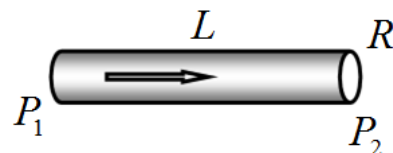
$$q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P, \quad (1)$$

где  $\Delta P$  - разность давлений на концах трубы,  $\eta$  - коэффициент вязкости протекающей жидкости, если жидкость идеальная (в которой силами вязкого трения пренебрегают), то  $\eta = 0$ ; можно считать, что формула (1) применима и для изогнутых труб; - кровь является несжимаемой вязкой жидкостью, плотность которой  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ; вязкость крови  $\eta = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ; - суммарный расход крови в большом круге кровообращения равен  $q_0 = 6,0 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$ ; - давление в 1 мм рт. ст. равно 133 Па.

Артериальная система человека (по которой кровь поступает от сердца к мышцам и другим органам) состоит из системы разветвляющихся сосудов: аорта, крупные артерии, мелкие артерии, капилляры. Будем считать, что геометрические размеры всех сосудов в этих группах одинаковы; каждый более крупный сосуд разветвляется в одном месте на более мелкие сосуды (см. рисунок на заставке к задаче). Характеристики сосудов артериальной системы приведены в Таблице 1 Листов ответов. В этой таблице:  $d_i$  - диаметр сосуда,  $l_i$  - длина сосуда;  $n_i$  - число сосудов данной группы.

## Часть 1. Предварительные расчеты.

Жидкость вязкости  $\eta$  протекает по цилиндрической трубе радиуса  $R$  и длины  $L$ , расход жидкости равен  $q$ .

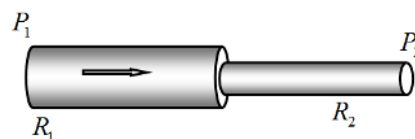


1.1 Получите формулы, описывающие следующие характеристики движения жидкости: 1.1.1 Среднюю по поперечному сечению скорость течения жидкости. 1.1.2 Среднее время движение порции жидкости по трубе. 1.1.3 Разность давлений жидкости на концах трубы  $\Delta P = P_1 - P_2$ .

Жидкость протекает по трубе, состоящей из двух сочлененных труб, радиусы которых равны  $R_1$  и  $R_2$ , длины этих труб равны  $l_1$  и  $l_2$ . Плотность жидкости  $\rho$ , вязкостью жидкости можно пренебречь  $\eta \approx 0$ . Расход жидкости равен  $q$ .

1.2 Найдите, чему равна разность давлений  $\delta P = P_1 - P_2$  на концах трубы. Укажите область, в которой происходит этот скачок давлений.

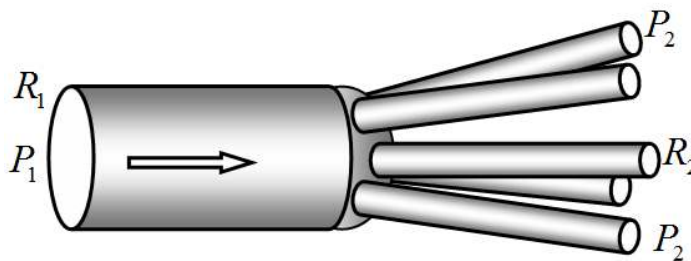
Далее можете считать, что полученная формула для скачка давления применима и для вязких жидкостей.



По описанной выше сочлененной трубе протекает жидкость, вязкость которой равна  $\eta$ . На концах трубы поддерживается постоянная разность давлений  $\Delta P = P_1 - P_2$ .

1.3 Рассчитайте расход жидкости по этой трубе. Ответ выразите, через разность давлений, вязкость жидкости и геометрические размеры трубы.

Жидкость, вязкостью которой можно пренебречь, протекает по системе труб, состоящей из одной трубы радиуса  $R_1$  и  $n$  одинаковых труб меньшего радиуса  $R_2$ . Расход жидкости через эту систему (равный расходу в первой трубе) равен  $q$ .



1.4 Найдите, чему равен скачок давлений на стыке труб  $\delta P = P_1 - P_2$ .

Полученную формулу также можно применять для вязкой жидкости.

## Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.

Будем считать, что артериальная система заканчивается на середине капилляров (далее начинается венозная система).

2.1 Используя приведенные в условии данные, рассчитайте для каждой группы сосудов следующие характеристики (численные результаты занесите в соответствующие графы Таблицы 2 в Листах ответов): 2.1.1 Среднюю скорость течения крови по сосудам этой группы. 2.1.2 Среднее время движения крови по артериальной системе. 2.1.3 Разность давлений на концах сосудов каждой группы (для капилляров – между началом капилляра и его серединой). 2.1.4 Скачки давлений при переходе от одной группы сосудов к следующей. 2.1.5 Общую разность давлений в артериальной системе человека, от входа аорты до середины капилляра.

2.2 Сравните полученное значение разности давлений со средним сердечным давлением  $p \approx 100$  мм рт. ст. Кратко объясните возникшее противоречие – выскажите предположение о том, как все-таки работает кровеносная система?

### Решение



### Задание 10-2. Гемодинамика - артериальная система. Решение.

#### Часть 1. Предварительные расчеты.

#### 1.1 Формулы:

##### 1.1.1 Расход жидкости может быть выражен формулой

$$q = vS, \quad (1)$$

где  $S = \pi R^2$  - площадь поперечного сечения трубы,  $v$  - средняя по поперечному сечению скорость течения, которая может быть выражена через расход жидкости, как

$$v = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}. \quad (2)$$

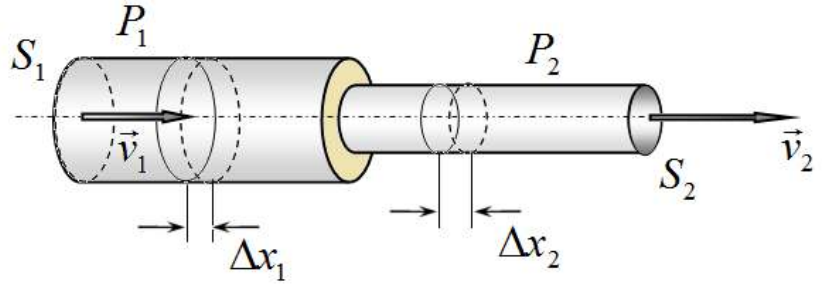
##### 1.1.2 Очевидно, что время движения жидкости по трубе равно

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\pi R^2 L}{q}. \quad (3)$$

Это же выражение может быть представлено, как объем трубы, деленный на расход жидкости  $t = \frac{V}{q}$ .

##### 1.1.3 Из формулы Пуазейля легко выразить разность давлений через расход жидкости

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} q. \quad (4)$$



**1.2** Обозначим скорость течения жидкости в первой трубе  $v_1$ , во второй -  $v_2$ ; площади поперечных сечений -  $S_1, S_2$ , давления в трубах  $P_1, P_2$ . Так как жидкость является идеальной, то давление изменяется скачком только в области стыка двух труб. Рассмотрим порцию жидкости, находящуюся между двумя произвольно выбранными сечениями (одно в широкой части трубы, второе в узкой части). Пусть за малый промежуток времени первое сечение сместилось на расстояние  $\Delta x_1$ , тогда второе сечение сместится на расстояние  $\Delta x_2$ . Так как жидкость несжимаема, то выполняется соотношение

$$\Delta V = S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2. \quad (5)$$

Эта величина имеет смысл объема, протекшего через поперечное сечение трубы за рассматриваемый промежуток времени. Скорость этой порции жидкости изменилась от  $v_1$  до  $v_2$ . Следовательно, возросла и кинетическая энергия этой порции жидкости. Изменение кинетической энергии обусловлено работой внешних сил (т.е. сил давления жидкости на выделенную порцию), поэтому можно записать:

$$P_1 S_1 \Delta x_1 - P_2 S_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2} \rho S_1 \Delta x_1 (v_2^2 - v_1^2) \quad (6)$$

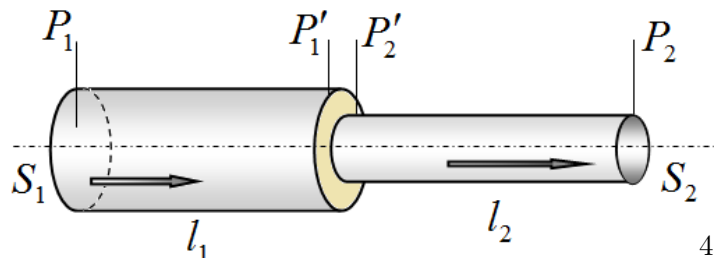
Учитывая соотношение (5), получим уравнение (которое фактически является уравнением Бернулли):

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad (7)$$

Скорости течения жидкости выразим через расход жидкости  $v = \frac{q}{S}$  и подставим в уравнение (7):

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) \quad (8)$$

**1.3** При течении вязкой жидкости давление изменяется и в пределах трубы постоянного течения. Обозначим давления в различных сечениях, как показано на рисунке.



Запишем уравнения для изменения давлений на всех участках составной трубы (используя формулы (4) и (8)):

$$\begin{aligned} P_1 - P'_1 &= \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q \\ P'_1 - P'_2 &= \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) \\ P'_2 - P_2 &= \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q \end{aligned} \quad (9)$$

И просуммируем эти выражения:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) + \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4} q + \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4} q \quad (10)$$

В результате чего получаем квадратное уравнение, правда с громоздкими коэффициентами:

$$\frac{1}{2\pi^2} \rho \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right) q^2 + \frac{8\eta l}{\pi} \left( \frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} \right) q - \Delta P = 0 \quad (11)$$

При решении этого уравнения следует выбрать положительный корень:

$$q = \frac{\sqrt{b^2 + a\Delta P} - b}{a} \quad (12)$$

где

$$a = \frac{1}{2\pi^2} \rho \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right); \quad b = \frac{4\eta l}{\pi} \left( \frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4} \right)$$

**1.4** При решении этой задачи можно повторить все рассуждения п.1.2, а в окончательной формуле (8) под  $S_2$  следует понимать суммарную площадь всех присоединенных труб, поэтому

$$\delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \rho q^2 \left( \frac{1}{n^2 R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right). \quad (13)$$

Заметим, что эта разность давлений может быть отрицательной.

## **Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.**

**2.1.1 – 2.1.5** Для расчета требуемых характеристик следует воспользоваться уже полученными формулами, которые следует слегка модернизировать с учетом числа сосудов в каждой группе. Приведем эти формулы, необходимые для расчетов: Расход крови через один сосуд в группе:

$$q_i = \frac{q_0}{n_i}, \quad (14)$$

Где  $q_0 = 6,0 \frac{\text{л}}{\text{мин}} = 6,0 \frac{10^{-3} \text{ м}^3}{60 \text{ с}} = 1,0 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$  - суммарный расход крови.

Площадь поперечного сечения сосуда в группе

$$S_i = \frac{\pi d_i^2}{4} \quad (15)$$

Средняя скорость течения крови в сосудах:

$$v_i = \frac{q_i}{S_i}. \quad (16)$$

Время движения через сосуд

$$t_i = \frac{l_i}{v_i}. \quad (17)$$

Разность давлений на концах сосуда

$$\Delta P_i = \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4} q_i = \frac{8\pi\eta l_i}{(\pi R_i^2)^2} q_i = 8\pi\eta \frac{l_i}{S_i^2} q_i. \quad (18)$$

Скачок давлений на стыке сосудов

$$\delta P_i = \frac{1}{2\pi^2} \rho q_i^2 \left( \frac{1}{\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)^2 R_{i+2}^4} - \frac{1}{R_i^4} \right) = \frac{\rho q_0^2}{2} \left( \frac{1}{(n_{i+1} S_{i+1})^2} - \frac{1}{(n_i S_i)^2} \right). \quad (19)$$

Интересно отметить, что при замкнутом круге обращения (когда суммарные площади сечений в начале и конце цикла равны) сумма этих скачков давлений равна нулю. Суммарные характеристики рассчитываются очевидным способом, как суммы соответствующих характеристик в каждой группе.

Результаты расчетов по приведенным формулам приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Расчетные характеристики артериальной системы человека

| Группа сосудов  | Средняя скорость течения крови, $v_i$ , м/с | Время движения $t_i$ , с | Разность давлений на концах сосуда $\Delta P_i$ , Па | Скачок давления скорость $t$ , с давлений на при переходе в следующую группу $\delta P_i$ , Па |
|-----------------|---------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Аорта           | 0,54                                        | 1,10                     | 180                                                  | -36                                                                                            |
| Крупные артерии | 0,47                                        | 0,99                     | 4560                                                 | -83                                                                                            |
| Мелкие артерии  | 0,24                                        | 0,25                     | 7450                                                 | -29                                                                                            |
| Капилляры       | 0,0012                                      | 0,51                     | 1400                                                 | -                                                                                              |

Общее время движения крови по артериальной системе равно 2,0 с. Разность давлений на входе и выходе из артериальной системы (сумма двух последних столбцов) равно 13 кПа, что примерно равно 100 мм рт. ст. Следует отметить, что скачки давлений в местах разветвления сосудов, во-первых, отрицательны (т.к. общая площадь поперечных сечений сосудов в каждой группе увеличивается); во-вторых, не слишком значительны.

**2.2** Разумно считать, что разность давлений в венозной системе также примерно равна 100 мм рт. ст. Поэтому суммарное давление, которое должно создавать сердце, примерно в два раза превышает реальное сердечное давление. Основная причина такого существенного расхождения заключается в том, что сосуды функционируют гораздо сложнее, чем жесткие трубки. Они проходят через различные мышцы тела, которые могут способствовать лучшему протеканию крови, т.е. работают как своеобразные «микронасосы».