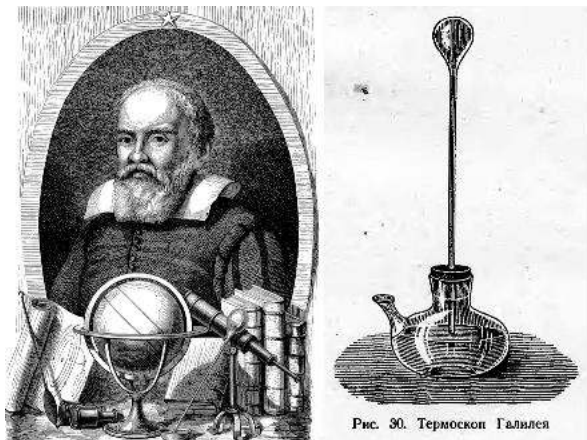


ТЕПЛО

Условие



Задание 1. Термоскоп Галилея.

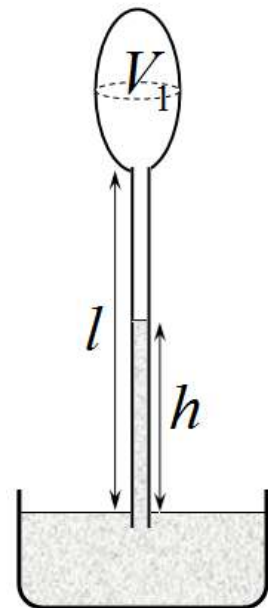
Первый термоскоп сконструировал итальянский физик Галилео Галилей примерно в 1592—1600 годах.

Термоскоп (греч. $\Theta\acute{\epsilon}\rho\mu\eta$ [термо] «тепло» + $\sigma\kappa\omicron\pi\acute{\epsilon}\omega$ [скопео] «смотрю») — устройство, которое показывает изменения температуры, родоначальник современных термометров. Типичная конструкция термоскопа представляет собой трубку, в которой жидкость поднимается и опускается при изменении температуры.

Молодой, но талантливый белорусский физик Федор, прочитав это сообщение, решил превзойти знаменитого итальянского ученого: не только самостоятельно сконструировать и изготовить подобный прибор, но и снабдить его точно рассчитанной температурной шкалой. Тем, более, что Федор только что изучил газовый законы, еще не известные во времена Г.Галилея.

Часть 1. Конструирование и градуировка в идеальном случае.

Федор нашел стеклянную трубку, измерил ее размеры: Длина трубки $l = 50$ см; внутренний диаметр $d = 0,50$ см. Федор закрепил трубку вертикально, нижний конец трубки опустил в широкий сосуд с водой. Погруженной в воду частью трубки можно пренебречь, также можно считать, что уровень воды в нижнем сосуде постоянен. К верхней части трубки прикрепил сосуд, объем которого V_1 Федор тщательно рассчитал. Рядом с трубкой располагается шкала, по которой можно измерять высоту h , на которую поднимается вода в трубке. Для расчетов используйте следующие параметры: Плотность воды $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и не зависит от температуры; Атмосферное давление постоянно и равно $P_0 = 1,00 \cdot 10^5$ Па; Ускорение свободного падения $g = 10,0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; Абсолютный нуль температуры $\tau = -273^\circ\text{C}$. Федор решил, что с помощью данного прибора необходимо измерять температуру в диапазоне от $t_{\min} = 10^\circ\text{C}$ до $t_{\max} = 40^\circ\text{C}$ (по его мнению, именно в таком диапазоне изменяется температура в квартирах). Федор рассудил, **что давлением насыщенных паров воды внутри термоскопа можно пренебречь** так, как в выбранном диапазоне температур оно значительно (более, чем в 10 раз) меньше атмосферного давления. Настройку термоскопа Федор проводил следующим образом. Трубку с сосудом сверху вертикально опускают в воду в ниж-



нем сосуде, так, она незначительно погружается в воду. Погруженной в воду частью трубки можно пренебречь, также можно считать, что уровень воды в нижнем сосуде постоянен. После этого воду нагревают до температуры $t_{\max} = 40^\circ\text{C}$, воздух в трубке также нагревается до этой же температуры. Воздух частично выходит из трубки, тем самым оказывается, что при этой температуре высота уровня воды в трубке равна

$h = 0$. При остывании уровень воды в трубке повышается, тем самым данный прибор можно использовать в качестве комнатного термометра.

1.1 Рассчитайте, при каком объеме верхнего сосуда V_1 вода полностью заполнит трубку (т.е. высота уровня воды в трубке станет равной $h = l$), если температура опустится до значения $t_{\min} = 10^\circ\text{C}$.

Для дальнейших расчетов удобно использовать следующие параметры:

$\alpha = \frac{\rho g l}{P_0}$ — отношение гидростатического давления воды в полностью заполненной трубке;

$\beta = \frac{lS}{V_1 + lS}$ — отношение объема трубки к полному объему термоскопа (верхнего сосуда и трубки);

$z = \frac{h}{l}$ — относительная высота уровня воды в трубке (отношение высоты уровня к длине трубки).

1.2 Рассчитайте численные значения параметров установки α и β .

1.3 Получите уравнение, позволяющее рассчитать зависимость относительной высоты уровня воды в трубке от температуры в комнате $z(t)$. В качестве параметров этого уравнения должны входить только безразмерные параметры α, β и минимальная температура $t_{\min}$.

1.4 Постройте градуировочный график зависимости $z(t)$. Результаты расчетов (в том числе и промежуточные) приведите в Таблице 1 Листов ответов. График постройте на приведённом бланке Листов ответов.

Часть 2. Реальные измерения.

В ходе экспериментальной проверки изготовленного термоскопа Федор обнаружил, что показания прибора заметно отличаются от рассчитанных значений. Федор понял, что **давлением водяных паров внутри термоскопа пренебрегать нельзя**. Найти зависимость давления насыщенных водяных паров от температуры не представляет труда. Эта зависимость в используемом диапазоне температур приведена в Таблице 2 Листов ответов. Там же для наглядности приведен график этой зависимости. В этой части вы должны провести расчет зависимости высоты поднятия воды в трубке от температуры с учетом влияния водяных паров. Все параметры прибора остались прежними.

2.1 Получите уравнение, позволяющее рассчитать зависимость относительной высоты уровня воды в трубке от температуры в комнате $z(t)$. В качестве параметров этого уравнения должны входить только безразмерные параметры α, β , минимальная температура $t_{\min}$, а также отношение давления насыщенных паров воды к атмосферному давлению $\gamma = \frac{P_{\text{нас}}}{P_0}$.

2.2 Рассчитайте значения относительной высоты уровня воды в трубке от температуры $z(t)$, для температур, приведенных в Таблице 2. Постройте график полученной зависимости.

Решение

Задание 1. Термоскоп Галилея. Решение.

Часть 1. Конструирование и градуировка в идеальном случае.

1.1 – 1.2 Масса воздуха в термоскопе остается постоянной, поэтому для этого воздуха справедливо уравнение состояния Клапейрона (для состояний при максимальной и минимальной температурах):

$$\frac{P_0(V_1 + Sl)}{T_{\max}} = \frac{(P_0 - \rho gl)V_1}{T_{\min}}, \quad (1)$$

Где $Sl = \frac{\pi d^2}{4}l$ - внутренний объем трубки.

Из уравнения (1) находим:

$$\begin{aligned} \frac{(V_1 + Sl)}{V_1} &= \frac{(P_0 - \rho gl)}{P_0} \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \Rightarrow 1 + \frac{Sl}{V_1} = (1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \Rightarrow \\ \frac{Sl}{V_1} &= (1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1 \Rightarrow V_1 = \frac{Sl}{(1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Численные расчеты приводят к результатам

$$\begin{aligned} Sl &= \frac{\pi d^2}{4}l = \frac{\pi \cdot 0,5^2}{4}50 = 9,82 \text{ см}^3 \\ \alpha &= \frac{\rho gl}{P_0} = \frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,50}{1,0 \cdot 10^5} = 5,0 \cdot 10^{-3} \\ V_1 &= \frac{Sl}{(1 - \alpha) \frac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1} = \frac{9,82 \text{ см}^3}{(1 - 0,050) \frac{40+273}{10+273} - 1} = 194 \text{ см}^3. \\ \beta &= \frac{Sl}{V_1 + Sl} = 0,048 \end{aligned} \quad (3)$$

1.3 Запишем уравнение Клапейрона для воздуха в трубке, используя начальное и промежуточное состояния

$$\frac{P_0(V_1 + Sl)}{T_{\max}} = \frac{(P_0 - \rho gh)(V_1 + Sl - Sh)}{T}. \quad (4)$$

Перепишем его в «безразмерной» форме

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{\max}} &= \left(1 - \frac{\rho gl}{P_0} \cdot \frac{h}{l}\right) \left(1 - \frac{Sl}{(V_1 + Sl)} \cdot \frac{h}{l}\right) \Rightarrow \\ \frac{T}{T_{\max}} &= (1 - \alpha z)(1 - \beta z) \end{aligned} \quad (5)$$

Это уравнение является квадратным относительно величины z :

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = \alpha\beta; \quad b = -(\alpha + \beta); \quad c = 1 - \frac{T}{T_{\max}} = 1 - \frac{t + 273}{313}, \quad (5)$$

которое может быть решено по известной формуле

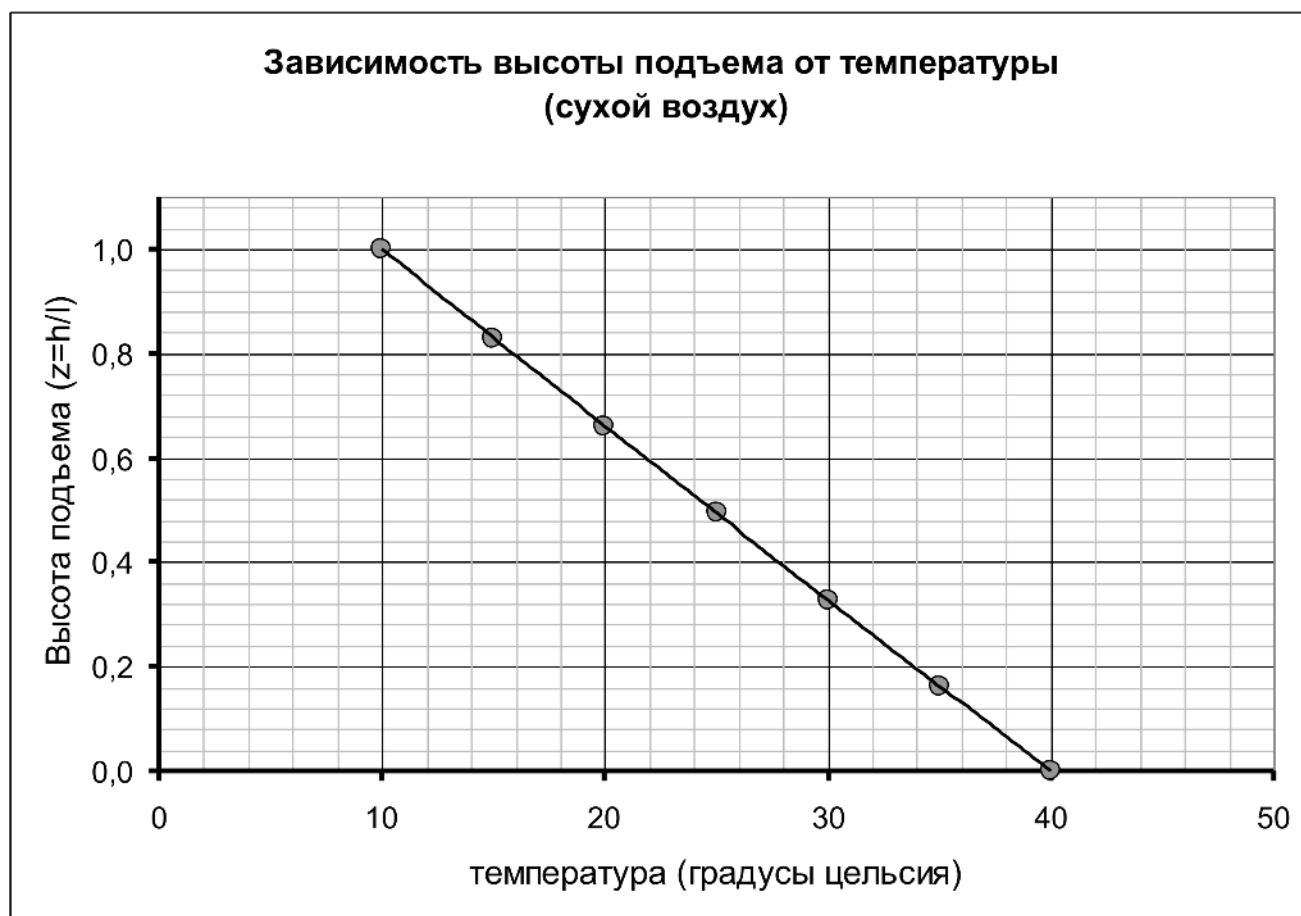
$$z = \frac{(\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta \left(\frac{40-t}{313}\right)}}{2\alpha\beta}. \quad (6)$$

Отметим, что необходимо выбрать знак «минус» перед корнем.

1.4 Результаты расчетов приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1. Зависимость высоты подъема от температуры без учета влажности воздуха.

$t^{\circ}C$	**a**	**b**	**c**	**z**
10,00	0,00241	-0,09826	0,09585	1,000
15,00	0,00241	-0,09826	0,07987	0,830
20,00	0,00241	-0,09826	0,06390	0,661
25,00	0,00241	-0,09826	0,04792	0,494
30,00	0,00241	-0,09826	0,03195	0,328
35,00	0,00241	-0,09826	0,01597	0,163
40,00	0,00241	-0,09826	0,00000	0,000



Замечания. 1. В данном случае можно рассчитать (что заметно проще) обратную зависимость $t(z)$ непосредственно по формуле (5). 2. Квадратное уравнение (5) можно решить приближенно, пренебрегая произведением $\alpha\beta$. В этом приближении получается практически та же зависимость.

Часть 2. Реальные измерения.

2.1 В этом случае суммарное давление газов в термостате равно сумме давлений сухого воздуха и давления водяного пара. Давление сухого воздуха подчиняется уравнению состояния, т.к. масса сухого воздуха остается неизменной. А давление водяного пара есть давление насыщенного водяного пара, зависящее только от температуры (и не зависящее от занимаемого объема). Поэтому при высоте уровня воды в сосуде h , связь между различными давлениями определяется уравнением равновесия столба воды

$$P_0 = P + P_{\text{нас.}} + \rho gh, \quad (7)$$

Откуда следует, что давление сухого воздуха равно

$$P = P_0 - P_{\text{нас.}} - \rho gh, \quad (8)$$

Уравнение Клапейрона для сухого воздуха в этом случае имеет вид:

$$\frac{(P_0 - P_{\text{нас.}}(t_{\text{max}})) \cdot (V_1 + Sl)}{T_{\text{max}}} = \frac{(P_0 - P_{\text{нас.}}(t) - \rho gh)(V_1 + Sl - Sh)}{T}. \quad (9)$$

Или в безразмерных параметрах:

$$\frac{\left(1 - \frac{P_{\text{нас.}}(t_{\text{max}})}{P_0}\right)}{T_{\text{max}}} = \frac{\left(1 - \frac{P_{\text{нас.}}(t)}{P_0} - \frac{\rho g l}{P_0} \frac{h}{l}\right) \left(1 - \frac{Sl}{V_1 + Sl} \frac{h}{l}\right)}{T} \Rightarrow . \quad (10)$$

$$(1 - \gamma_{\text{max}}) \frac{T}{T_{\text{max}}} = (1 - \gamma - \alpha z)(1 - \beta z)$$

Это уравнение также приводится к квадратному уравнению типа (5) с параметрами

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$a = \alpha\beta; \quad b = -(\alpha + \beta(1 - \gamma)); \quad c = (1 - \gamma) - (1 - \gamma_{\text{max}}) \frac{T}{T_{\text{max}}}. \quad (11)$$

Результаты расчетов всех параметров уравнения (11) и его решение представлены в Таблице 2.

$t^{\circ}C$	$P, \kappa\Pa$	γ	a	b	c	z
10,00	1,228	0,01228	0,00241	-0,09767	0,15030	1,602
15,00	1,706	0,01706	0,00241	-0,09744	0,13073	1,390
20,00	2,339	0,02339	0,00241	-0,09713	0,10961	1,162
25,00	3,169	0,03169	0,00241	-0,09673	0,08651	0,915
30,00	4,246	0,04246	0,00241	-0,09621	0,06095	0,644
35,00	5,627	0,05627	0,00241	-0,09554	0,03234	0,341
40,00	7,381	0,07381	0,00241	-0,09470	0,00000	0,000



Для наглядности на графике оставлена зависимость, рассчитанная без учета давления водяных паров. Естественно, что полученная зависимость имеет смысл только при $z \leq 1$.