

Неоднородная разминка. Задание состоит из 3 не связанных между собой задач

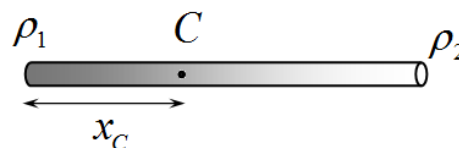
Условие

Задание 1. Неоднородная разминка.

Задание состоит из 3 не связанных между собой задач.

Развитие технологий (в том числе нанотехнологий) привело к созданию материалов с необычными свойствами, часто их называют метаматериалы. Описанию некоторых таких материалов и посвящено данное задание.

Задача 1.1

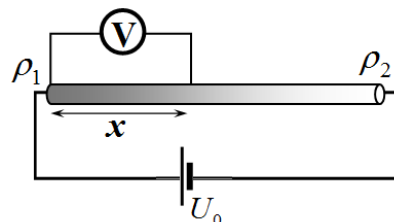


Тонкий стержень длины l изготовлен из материала, плотность которого изменяется по линейному закону от значения ρ_1 на одном конце до ρ_2 на другом.

1.1 Определите координату центра масс такого стержня.

Задача 1.2

Тонкий проводящий стержень длины l изготовлен из материала, удельное сопротивление которого изменяется по линейному закону от значения $\rho_1 = 0$ на одном конце до $\rho_2 = \rho_0$ на другом. Стержень подключен к источнику постоянного напряжения U_0 . Одна клемма вольтметра подключена к концу стержня, вторая к точке на стержне, находящейся на расстоянии x .



1.2 Найдите зависимость показаний вольтметра от координаты точки подключения второй клеммы вольтметра $U(x)$.

Задача 1.3

Два одинаковых бруска изготовлены из материала, удельная теплоемкость которого линейно зависит от температуры. При температуре $t_1 = 10,0^\circ\text{C}$ удельная теплоемкость равна c_0 ,

а при температуре $t_2 = 20,0^\circ\text{C}$ она становится равной $2c_0$. Первый брусок находится при температуре t_1 , а второй при температуре t_2 . Бруски приводят в тепловой контакт.

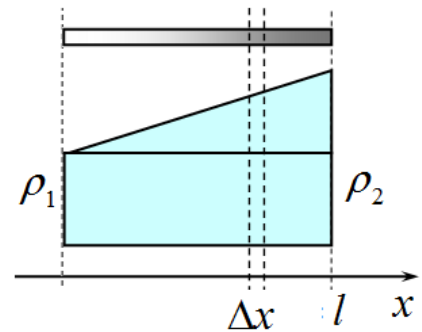
1.3 Пренебрегая потерями теплоты в окружающую среду, рассчитайте температуру брусков после установления теплового равновесия между ними.

Решение

Задание 9-1. Неоднородная разминка.

Задача 1.1

Для определения центра масс неоднородного стержня рассмотрим однородную трапецию с длинами оснований численно равными $C\rho_1$ и $C\rho_2$ и высотой l . Если мы выделим малый участок (полоску) шириной Δx , то масса этой полоски будет равна (точнее, пропорциональна) массе такого же отрезка рассматриваемого неоднородного стержня. Поэтому координаты x_C центров масс стержня и трапециевидной пластинки будут одинаковы. Рассчитать координату центра масс пластинки можно традиционным способом. Разобьем трапецию на прямоугольник и треугольник. Масса прямоугольника равна $m_1 = C\rho_1 l$, координата его центра масс $x_1 = \frac{l}{2}$. Масса треугольника $m_2 = \frac{C}{2}(\rho_2 - \rho_1)l$, координата его центра масс $x_2 = \frac{l}{3}$. Тогда координата центра масс трапеции задается формулой

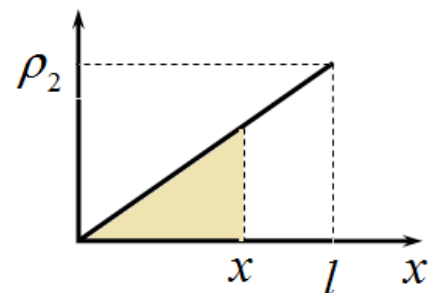


$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_2 + 2\rho_1}{3(\rho_2 + \rho_1)} l.$$

Задача 1.2

На рисунке показана зависимость удельного сопротивления стержня от координаты x . Эта зависимость описывается функцией:

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{l}. \quad (1)$$



Понятно, что площадь под графиком этой зависимости пропорциональна электрическому сопротивлению участка стержня. Поэтому сопротивление участка стержня от нуля до некоторой точки с координатой x будет равно:

$$R(x) = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{x^2}{lS}. \quad (2)$$

Где S - постоянная площадь поперечного сечения стержня. Сопротивление всего стержня равно

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 l}{S}. \quad (3)$$

Поэтому сила тока, протекающего по стержню равна

$$I = \frac{U_0}{R_0} = \frac{2S}{\rho_0 l} U_0. \quad (4)$$

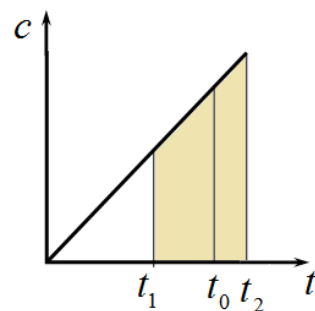
Следовательно, искомое напряжение будет описываться формулой:

$$U(x) = I_0 R(x) = U_0 \frac{x^2}{l^2}. \quad (5)$$

Задача 1.3

Построим график зависимости удельной теплоемкости стержня от координаты.

Площадь под этим графиком в интервале температур Δt пропорциональна количеству теплоты, которое требуется, что бы нагреть брусок на величину Δt в том же диапазоне температур. Так как теплообмен между брусками происходит без потерь, то для нахождения установившейся температуры необходимо трапецию между значениями t_1 и t_2 разбить на две равновеликие части. Легко заметить, что площадь треугольника под данным графиком в диапазоне от нуля до произвольного значения t пропорциональна t^2 . Это позволяет сразу найти значение t_0 , разбивающее трапецию на две части равных площадей:



$$t_0^2 - t_1^2 = t_2^2 - t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}} = 15,8^\circ\text{C}.$$