

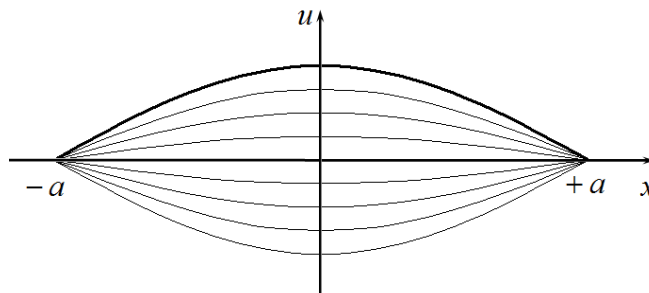
Условие

Задача 2. Гитарная струна.

В данной задаче рассматриваются малые поперечные колебания гитарной струны с закрепленными концами.

Основная мода (тип, форма) колебания этой струны показана на рисунке (жирная линия – форма струны в начальный момент времени, тонкие линии ее форма в другие последовательные моменты времени).

Для описания колебаний струны введем ось x , которая совпадает с положением струны в состоянии равновесия. Координаты точек крепления струны $\pm a$ (длина струны равна $2a$). Колебания струны описываются функцией $u(x, t)$ – зависимостью отклонения точки струны с координатой x от времени.



В состоянии равновесия струна натянута, сила натяжения равна T . При малых колебаниях струны изменением силы натяжения струны можно пренебречь.

Линейная плотность (масса единицы длины) струны равна ρ .

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

В данной части рассмотрим бесконечную струну, сила натяжения которой равна T , а линейная плотность ρ . По струне пробегают гармонические волны с малой амплитудой U_0 . Круговая частота этих волн ω , длина волны λ .

1.1 Запишите функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x , соответственно. 1.2 Покажите, что при наложении этих волн возникает стоячая волна. Получите функцию $u(x, t)$, описывающую эту стоячую волну. 1.3 Выразите скорость распространения бегущих волн через характеристики волны ω и λ .

Часть 2. Колебания закрепленной струны.

Рассмотрим колебания закрепленной струны, показанные на рисунке. Обозначим круговую частоту изображенного типа колебаний ω , в этой части вам необходимо выразить эту частоту через характеристики струны: ее длину $2a$, силу натяжения T и линейную плотность ρ .

2.1 Запишите функцию $u(x, t)$, описывающую рассматриваемый тип колебаний струны.

Обозначим отклонение центральной точки струны от положения равновесия $u_0(t)$, а ее скорость $v_0(t)$.

2.2 Выразите кинетическую энергию $E(t)$ движения всей струны через скорость ее центра $v_0(t)$.

2.3 Выразите потенциальную энергию деформации струны $W(t)$ через координату центра струны $u_0(t)$. 2.4 Выразите круговую частоту рассматриваемых колебаний ω через параметры струны a, ρ, T . 2.5 Получите формулу для скорости распространения бегущих волн по бесконечной струне.

Математические подсказки. 1. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$. 2. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$. 3. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$. 4. Длина изогнутой струны, показанной на рисунке, описывается приближенной формулой

$$l = 2a \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi u_0}{2a} \right)^2 \right),$$

где u_0 - отклонение центра струны.