

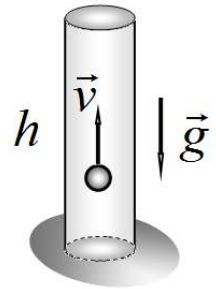
Условие

Задание 2. Знаете ли Вы МКТ?

В данном задании вам необходимо решить несколько взаимосвязанных задач, чтобы продемонстрировать свое понимание основ молекулярно-кинетической теории и умение использовать математический аппарат этой теории.

Часть 1. Всего один шарик.

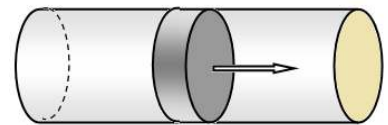
В вертикальном закрытом сосуде высотой h , находится небольшой шарик массы m , движущийся вертикально. Сопротивлением воздуха следует пренебречь, а его удары о дно и крышку сосуда считать абсолютно упругими, ускорение свободного падения равно g . Когда шарик находится у дна сосуда, его скорость равна v_0 . Можно считать, что удары шарика происходят достаточно часто, поэтому следует рассчитывать средние силы давления шарика за промежуток времени, значительно превышающий время между ударами.



- 1.1 Найдите среднюю силу давления шарика на дно сосуда, если $v_0^2 < 2gh$.
1.2 Пусть скорость шарика у дна сосуда $v_0 > \sqrt{2gh}$. Рассчитайте средние силы давления шарика на дно и крышку сосуда, а также разность этих сил.

Часть 2. Очень много молекул.

В закрытом с обеих сторон цилиндрическом сосуде находится легкий подвижный тонкий поршень, который делит сосуд на две равные части. Площадь поршня (она же площадь поперечного сечения сосуда) равна S . По обе стороны от поршня находится по одному молу одноатомного идеального газа, молярная масса которого равна M . Температура газа с обеих сторон поршня одинакова и равна T_0 , давление газа P_0 . Поршень начинает двигаться вдоль сосуда с постоянной скоростью u , которая значительно меньше средней скорости теплового движения молекул газа. Действие силы тяжести не учитывать. Удары молекул о поршень можно считать абсолютно упругими.



- 2.1 Чему равны среднеквадратичная скорость молекул газа $\langle v_{\text{кв.}} \rangle$ и среднеквадратичная проекция скорости газа на произвольное направление (например, на ось x) $\langle v_{\text{кв.}x} \rangle$?
2.2 Оцените силу сопротивления, действующую на поршень со стороны газа в начальный момент его движения. Считайте, что пластина уже имеет скорость u , но ее смещением можно пренебречь.
2.3 Оцените изменение температур газа с обеих сторон от поршня, при смещении поршня на малую величину Δx .

Указание. При строгом решении данной задачи следует использовать различные средние

значения. При проведении оценок везде используйте среднеквадратичные скорости и их проекции.

Решение

Задание 2. Знаете ли Вы МКТ?

Часть 1. Всего один шарик.

При расчете сил давления следует использовать следующую основную идею: средняя сила равна отношению импульса, полученного телом, к промежутку времени, в течение которого этот импульс был получен:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (1)$$

1.1 При выполнении условия $v_0^2 < 2gh$ шарик не будет ударяться о крышку сосуда. В момент каждого удара о дно сосуда он будет передавать дну импульс

$$\Delta p = 2mv_0 \quad (2)$$

При равноускоренном движении в поле тяжести земли зависимость вертикальной координаты шарика имеет вид

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3)$$

Поэтому время между двумя последовательными ударами можно легко найти из выражения (2), полагая $z = 0$. Тогда время между ударами оказывается равным

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}. \quad (4)$$

А средняя сила давления шарика на дно сосуда равна (как ни странно!?):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg. \quad (5)$$

1.2 Если скорость шарика у дна $v_0 > \sqrt{2gh}$, то он будет ударяться и о верхнюю крышку сосуда. Скорость шарика при ударе о крышку рассчитывается по формуле

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (6)$$

Так как движение шарика между ударами является равноускоренным, то время подъема шарика и равное ему время падения оказывается равным

$$\tau = \frac{h}{\frac{1}{2} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh} \right)} = \frac{2h}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}. \quad (7)$$

Тогда средняя сила давления шарика на дно равна

$$F_1 = \frac{2mv_0}{2\tau} = \frac{mv_0}{2h} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh} \right). \quad (8)$$

Сила давления на крышку рассчитывается аналогично:

$$F_2 = \frac{2mv_1}{2\tau} = \frac{m\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{2h} \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh} \right). \quad (9)$$

Разность этих сил опять равна

$$F_2 - F_1 = mg. \quad (10)$$

Часть 2. Очень много молекул.

2.1 Средняя квадратичная скорость молекул рассчитывается по известной формуле

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{3 \frac{RT}{M}} \quad (11)$$

Так как все направления в пространстве равноправны, то

$$\langle v_{\text{кв.}x} \rangle = \langle v_{\text{кв.}y} \rangle = \langle v_{\text{кв.}z} \rangle.$$

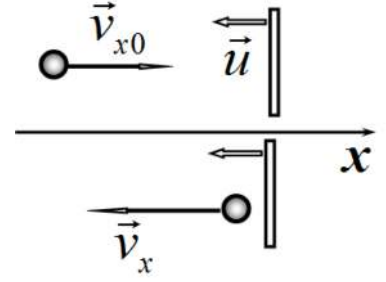
Кроме того,

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

Поэтому

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_{\text{кв.}x} \rangle = \sqrt{\frac{RT}{M}}. \quad (12)$$

2.2 При ударе молекулы о поршень изменяется только та проекция вектора скорости, которая перпендикулярна плоскости поршня. Поэтому направим ось x перпендикулярно поршню, вдоль оси сосуда. Рассмотрим молекулу, которая налетает на поршень, имея компоненту скорости, перпендикулярную пластине v_{x0} . Если скорость поршня равна u и направлена навстречу налетающей молекуле, то после абсолютно упругого удара проекция скорости молекулы станет равной

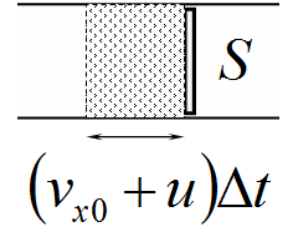


$$v_x = -v_{x0} - 2u \quad (13)$$

Это соотношение легко доказать, рассматривая упругий удар в системе отсчета, связанной с поршнем, а затем вернувшись в систему отсчета, связанную с сосудом. Изменение проекции импульса молекулы при ударе равно (m - масса одной молекулы)

$$\Delta p_x = -m(v_{x0} + 2u) - mv_{x0} = -2m(v_{x0} + u). \quad (14)$$

Такой же по модулю, но противоположно направленный импульс получит поршень. Предположим, что у всех молекул модуль проекции скорости на ось равна v_{x0} . Тогда за малый промежуток времени Δt до поршня долетят те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем, чем $(v_{x0} + u)\Delta t$. Число этих молекул равно



$$\Delta N = \frac{1}{2}nS(v_{x0} + u)\Delta t. \quad (15)$$

Здесь n - концентрация молекул, также учтено, что в направлении стенки летят половина молекул. Эти молекулы предадут стенке импульс, равный

$$\Delta p_\Sigma = \frac{1}{2}nS(v_{x0} + u)\Delta t \cdot 2m(v_{x0} + u) = mn(v_{x0} + u)^2 S \Delta t. \quad (16)$$

Теперь можно провести усреднение по скоростям молекул:

$$\Delta p_\Sigma = \langle mn(v_{x0} + u)^2 \rangle = mn (\langle v_{x0}^2 \rangle + 2 \langle v_{x0} \rangle u + u^2) S \Delta t. \quad (17)$$

В соответствии с общим подходом, средняя сила, действующая на поршень с одной стороны, равна

$$F_1 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn (\langle v_{x0}^2 \rangle + 2 \langle v_{x0} \rangle u + u^2) S. \quad (18)$$

Понятно, что для вычисления силы, действующей на вторую сторону поршня достаточно в формуле (18) заменить знак скорости u :

$$F_2 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn (\langle v_{x0}^2 \rangle - 2 \langle v_{x0} \rangle u + u^2) S. \quad (19)$$

Разность этих сил и есть сила, действующая на поршень со стороны газа:

$$F = F_1 - F_2 = 4mn \langle v_{x0} \rangle uS. \quad (20)$$

Осталось выразить величины, входящие в эту формулу, через величины, заданные в условии задачи:

$$m = \frac{M}{N_A}; \quad n = \frac{P_0}{kT_0}; \quad \langle v_x \rangle = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}. \quad (21)$$

В итоге получаем:

$$F = 4mn \langle v_{x0} \rangle uS = 4 \frac{M}{N_A} \frac{P_0}{kT_0} \sqrt{\frac{RT_0}{M}} Su = 4P_0 \sqrt{\frac{M}{RT_0}} Su. \quad (22)$$

2.3 Используя формулу (13), найдем изменение кинетической энергии молекулы при ударе (слагаемое пропорциональное u^2 можно опустить):

$$\Delta E_1 = \frac{m}{2}(v_{x0} + u)^2 - \frac{m}{2}(v_{x0})^2 = mv_{x0}u \quad (23)$$

Тогда за малый промежуток времени Δt изменение энергии всего газа равно (усреднение проводим сразу):

$$\Delta E_\Sigma = \left\langle \frac{1}{2} n S v_{x0} \Delta t \cdot m v_{x0} u \right\rangle = \frac{1}{2} m n \langle v_{x0}^2 \rangle u S \Delta t = \frac{1}{2} m n \langle v_{x0}^2 \rangle S \Delta x = \frac{1}{2} P_0 \cdot S \Delta x. \quad (24)$$

Это же изменение энергии можно выразить через изменение абсолютной температуры газа:

$$\Delta E = \frac{3}{2} R \Delta T. \quad (25)$$

Приравнявая эти выражения, находим изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{1}{3} \frac{P_0 \cdot S \Delta x}{R}. \quad (26)$$