

Задание 11-1. Разминка

Задача 1.1

Уравнение 2 закона Ньютона для поршня имеет вид

$$ma = mg + \Delta PS \quad (1)$$

Здесь ΔP разность давления воздуха под поршнем и атмосферным давлением. Если поршень смещается на малую величину x , то давление также будет изменяться на малую величину. Для изотермического процесса справедливо уравнение

$$PV = const. \quad (2)$$

Из которого найдем изменение давления: $P = \frac{P_0 h}{h+x}$ здесь P_0 - давление газа в сосуде, когда поршень находится в равновесии на высоте h . При малых x можно записать

$$P = \frac{P_0 h}{h+x} \approx P_0 \left(1 - \frac{x}{h}\right). \quad (3)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (1) приводит к уравнению гармонических колебаний:

$$ma = -P_0 S \frac{x}{h} \quad (4)$$

Период этих колебаний

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{P_0 S}{mh}}. \quad (5)$$

Для адиабатического процесса изменение давления определяется уравнением адиабаты:

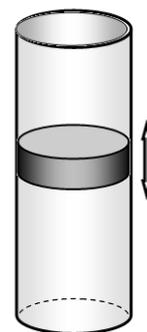
$$P = P_0 \left(\frac{h}{h+x}\right)^\gamma \approx P_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{h}\right) \quad (6)$$

Тогда уравнение второго закона Ньютона примет вид

$$ma = -\gamma P_0 S \frac{x}{h}. \quad (7)$$

Период этих колебаний

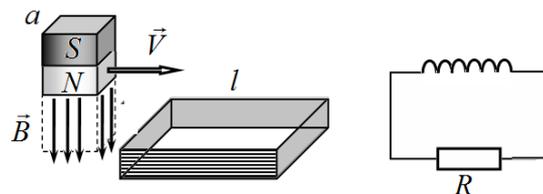
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\gamma \frac{P_0 S}{mh}} = T_0 \sqrt{\gamma}. \quad (8)$$



Задача 1.2

Магнитный поток через рамку описывается функцией

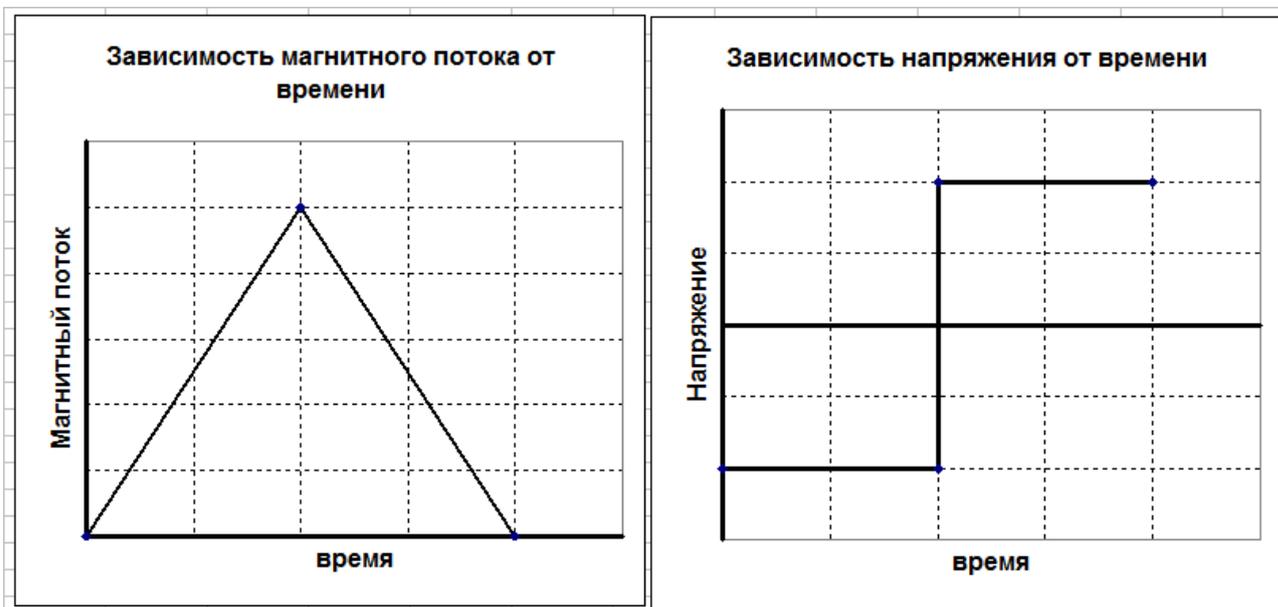
$$\Phi = \begin{cases} B \frac{l}{2} Vt, & \text{при } 0 < t < \frac{l}{2V} \\ B \frac{l}{2} (l - Vt) & \text{при } \frac{l}{2V} < t < \frac{l}{V} \end{cases} \quad (1)$$



Тогда по закону Фарадея ЭДС индукции и напряжение на резисторе равно

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \begin{cases} -B\frac{l}{2}V, & \text{при } 0 < t < \frac{l}{2V} \\ B\frac{l}{2}V & \text{при } \frac{l}{2V} < t < \frac{l}{V} \end{cases} \quad (2)$$

Графики этих функций показаны на рисунке.



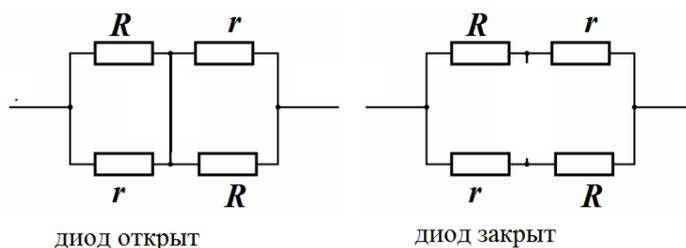
Задача 1.3

При открытом диоде (см. рис.)
Сопротивление схемы равно

$$R_1 = 2 \frac{Rr}{R+r}. \quad (1)$$

При закрытом диоде –

$$R_2 = \frac{R+r}{2}. \quad (2)$$



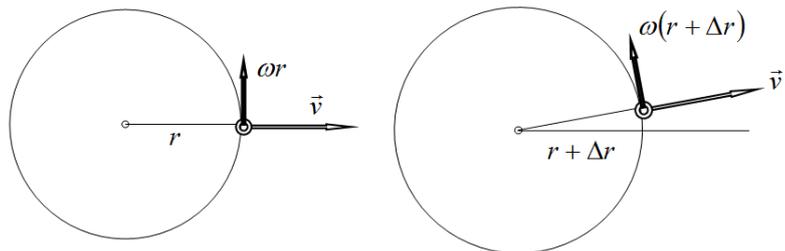
Из этой системы уравнений следует, что возможные значения сопротивлений равны 18,0 Ом и 6,0 Ом, причем общее сопротивление равно 9,0 Ом при закрытом диоде. Следовательно, при полярности, указанной на рисунке в условии задачи, диод открыт. Поэтому сопротивления связаны соотношением $R < r$. Отсюда окончательно следует, что

$$\begin{aligned} R &= 6,0 \text{ Ом} \\ r &= 18,0 \text{ Ом} \end{aligned} \quad (3)$$

Задание 11-2. «А все-таки она вертится!»

Часть 1. Введение в понимание.

На рисунке показаны необходимые построения векторов скорости жука и их разложения на составляющие. Из рисунка следует, что возросла компонента скорости, перпендикулярная радиальному направлению. Причем это возрастание обусловлено двум причинами:



Первое: увеличилось расстояние от оси вращения диска, поэтому скорость возросла на величину

$$\Delta v = \omega \Delta r \quad (1)$$

Второе: повернулся вектор относительной скорости, поэтому изменение скорости равно:

$$\Delta v = v \Delta \varphi . \quad (2)$$

Следовательно, ускорение жука направлено перпендикулярно радиусу, а его модуль равен

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} + v \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = 2\omega v . \quad (3)$$

Такое ускорение жуку может сообщить, например, сила трения.

Часть 2. Какой берег реки круче?

Днепр течет на юг, поэтому днепровская вода удаляется от оси вращения. Следовательно, вода получает ускорение, направленное по вращению Земли, то есть на восток. Это ускорение может сообщить только сила, действующая со стороны правого (или западного берега).

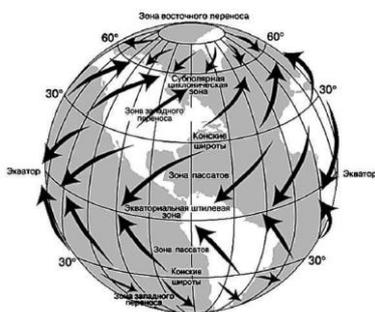
Величина ускорения определяется формулой (3), в которой в качестве скорости следует взять проекцию скорости течения на плоскость экватора, так именно эта компонента определяет изменение расстояния до оси вращения. Поэтому модуль ускорения равен

$$a = 2\omega v \sin \varphi \quad (4)$$

Это ускорение сообщает сила, действующая на воду со стороны правого берега. Тогда разность давлений со стороны берегов реки оказывается равной:

$$\Delta P = 2\rho h \omega v \sin \varphi \approx 11 \text{ Па} \quad (5)$$

Аналогичный результат получается и для Немана, только эта сила направлена на запад, поэтому более крутой берег у Немана тоже правый.



Часть 3. Почему в Беларуси преобладает западный перенос воздушных масс

Скорость ветра в рамках сформулированной гипотезы равна скорости движения поверхности Земли, которая в белорусских широтах равна

$$v = \omega R \cos \varphi \approx 300 \frac{M}{c} \quad (6)$$

Что соответствует урагану неслыханной силы. И самое важное...

этот ветер должен дуть на запад! Таким образом, высказанная банальная гипотеза полностью отвергается.

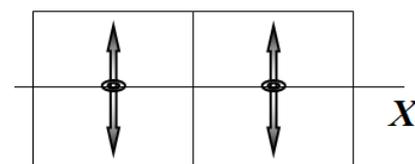
Правильное объяснение, связанное с глобальной циркуляцией атмосферы указывает правильное направление ветра с запада на восток, но величина скорости этого ветра также дает явно завышенное значение

$$v = \omega R(1 - \cos \varphi) \approx 160 \frac{M}{c}. \quad (7)$$

Задание 11-3. Фазированная антенная решетка – глаза радиолокационной системы

Часть 1. Два излучателя.

Решение данной части задачи практически полностью совпадает с описанием традиционной интерференционной схемы Юнга.



Для двух источников распределение интенсивности в зависимости от разности фаз имеет вид

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta \varphi) \quad (1)$$

Формула для разности фаз приведена в условии, поэтому зависимость интенсивности от направления описывается функцией

$$I = 2I_0(1 + \cos(d \sin \theta)) \quad (2)$$

Условия максимума интерференции (разность хода равна целому числу длин волн) в данном случае приводит к формуле

$$d \sin \theta = m \lambda. \quad (3)$$

Излучение двух дипольных излучателей будет иметь только один (нулевой) максимум, если расстояние между источниками будет меньше длины волны излучения

$$d < \lambda. \quad (4)$$

1.4 Для двух излучателей, ориентированных вдоль оси диполя распределение интенсивности будет иметь практически тот же вид, что и (2), только его необходимо умножить на функцию описывающую индикатрису излучения отдельного диполя:

$$I = 2I_0(1 + \cos(d \sin \theta)) \cos^2 \theta. \quad (5)$$

Часть 2. Цепочка излучателей.

2.1 При указанном значении расстоянии между излучателями формируется только один луч, соответствующий нулевому максимуму. Поэтому основная энергия излучения будет направлена перпендикулярно цепочке.

2.2 Угловая ширина определяется условием: разность фаз между крайними излучателями должна стать равной 2π , откуда следует:

$$(N - 1)\Delta \varphi = 2\pi \Rightarrow (N - 1)d \sin \delta \theta = 2\pi \Rightarrow \delta \theta = \frac{2\pi}{(N - 1)d}. \quad (6)$$

2.3 При наличии разности фаз направление излучения меняется и задается уравнением

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta - \Delta \varphi = 0 \quad (7)$$

2.5 Из уравнения (5) следует закон, по которому должна изменяться разность фаз колебаний

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \omega t . \quad (8)$$

2.6 Интенсивность излучения возрастает пропорционально квадрату числа когерентных источников, поэтому суммарная интенсивность излучения квадратной антенны будет равна

$$I = N^4 I_0 . \quad (9)$$