

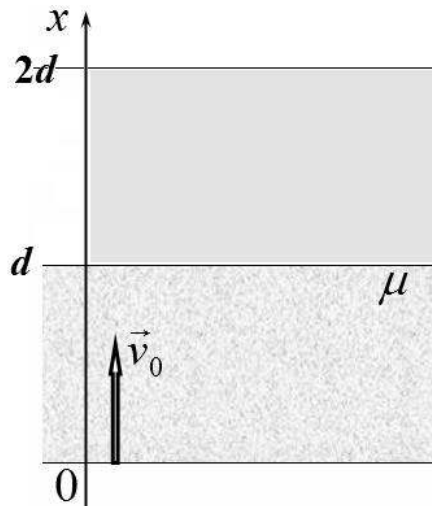
Условие

Задача 2. Полоса препятствий.

На горизонтальной поверхности находится шероховатая полоса шириной $d = 1,5$ м. На эту полосу препятствий наезжает шайба массы $m = 0,25$ кг со скоростью $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно границе полосы. Коэффициент трения шайбы при движении по полосе равен $\mu = 0,65$. За этой полосой находится гладкая полоса такой же ширины $d = 1,5$ м, сила трения при движении шайбы по ней пренебрежимо мала. Во всех частях задачи вам необходимо рассматривать движение шайбы до конца гладкой полосы (т.е. в интервале $x \in [0, 2d]$)

Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Зададим ось X , направленную перпендикулярно полосе, начало отсчета совпадает с началом шероховатой полосы.



Часть 1. Полоса неподвижна.

1.1 При каком минимальном значении модуля начальной скорости шайбы $v_{0\min}$ шайба преодолеет полосу препятствий?

1.2 Запишите закон движения шайбы $x(t)$, считая, что шайба попадает на полосу в момент времени $t = 0$. Рассмотрите два случая – скорость шайбы меньше $v_{0\min}$; скорость шайбы больше $v_{0\min}$.

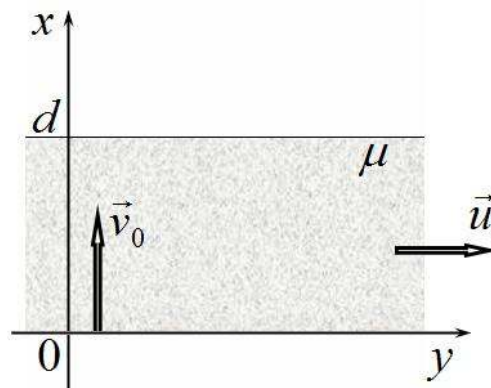
1.3 Постройте графики законов движения шайбы $x(t)$ при $v_0 = 5,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и при $v_0 = 3,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Точно рассчитайте и укажите параметры (координаты x и времена t) всех характерных точек графиков.

Построения выполните на отдельном бланке. Ось времени оцифруйте самостоятельно.

Часть 2. Движущаяся полоса.

В данной части задачи рассмотрим движение шайбы в том случае, когда полоса движется с постоянной скоростью $u = 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, как показано на рисунке. Все остальные параметры «установки» остаются прежними. Введем вторую неподвижную ось координат Y , направленную по краю полосы. Начало отсчета этой оси совпадает с точкой, где шайба въезжает на полосу.

2.1 При какой минимальной начальной скорости $v_{0\min}$ шайба преодолеет полосу в этом случае?



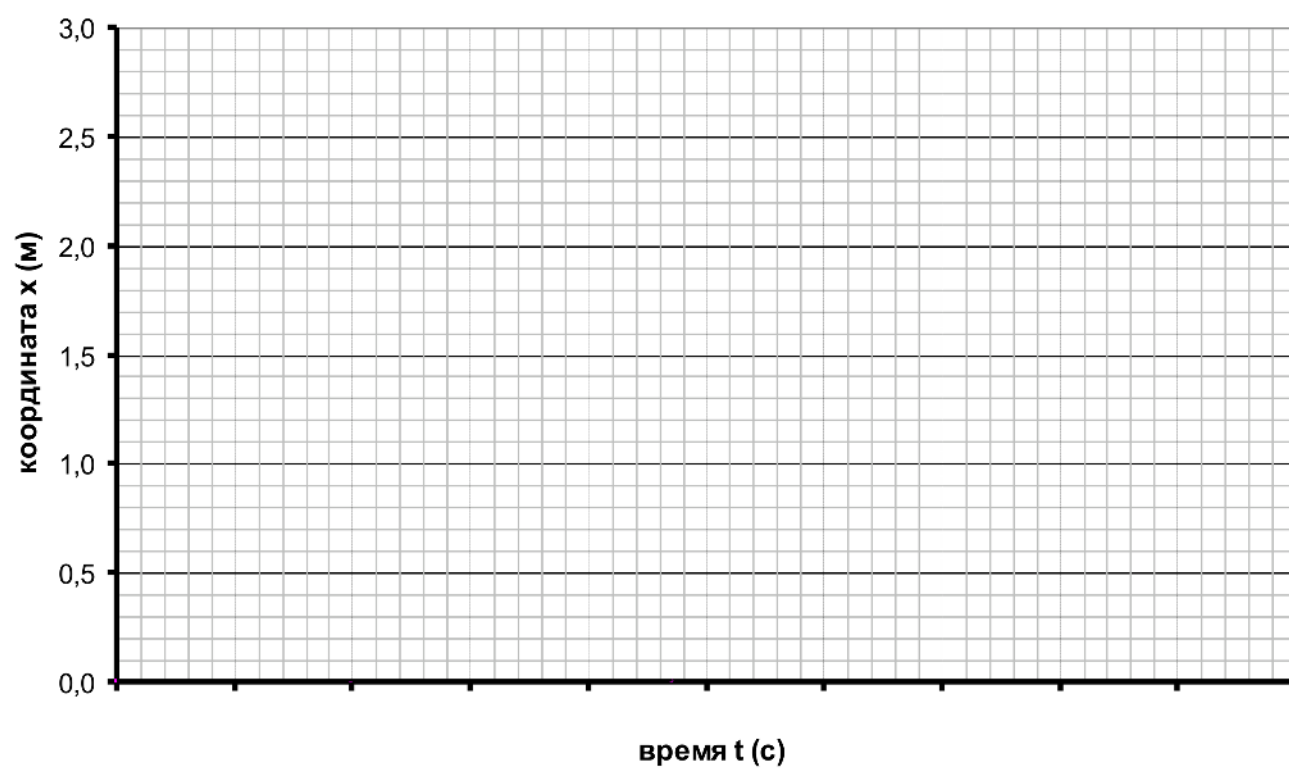
2.2 На отдельном бланке постройте траектории движения шайбы в неподвижной системе отсчета заданной системе координат (x, y) при начальных скоростях шайбы равных $v_0 = 5,0 \frac{m}{c}$ и $v_0 = 3,0 \frac{m}{c}$.

При решении этого пункта задачи можете проводить промежуточные численные расчеты. Запись окончательных формул не требуется.

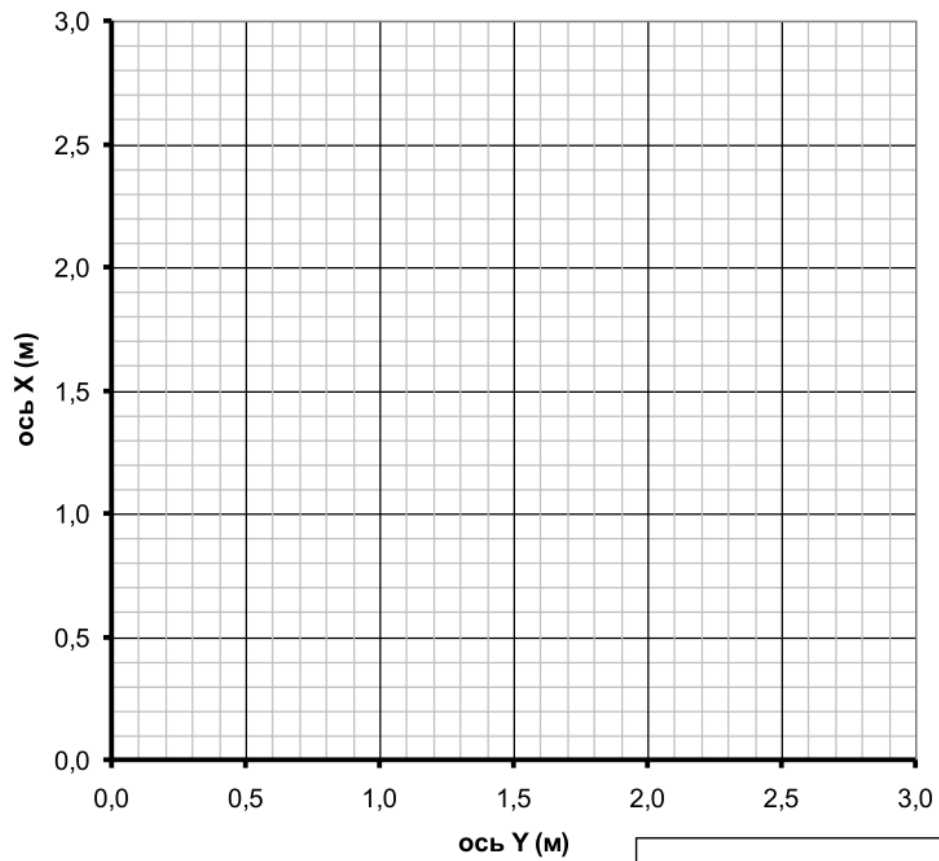
Бланк к задаче 9-2.



Закон движения шайбы по неподвижной полосе
 $V_0 = 3,0 \text{ м/с}$

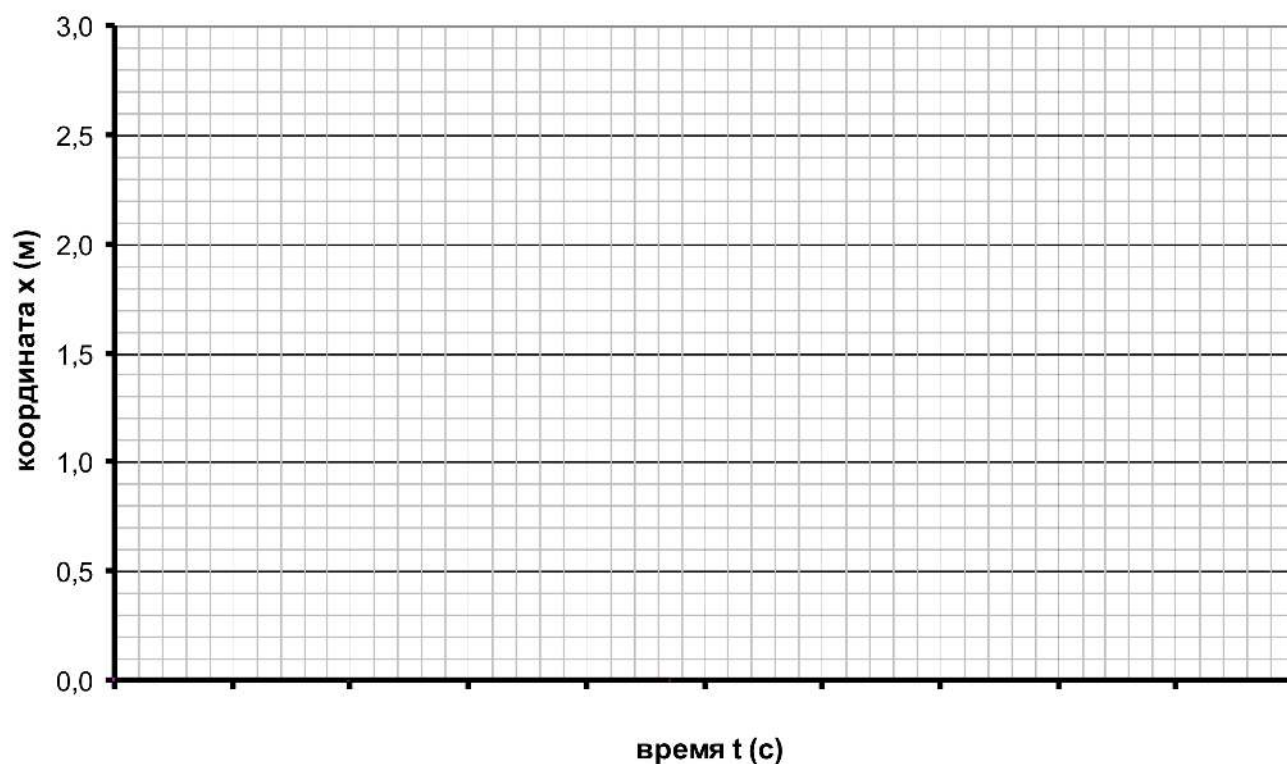


**Траектория движения шайбы
при $V_0=5,0\text{ м/с}$**



Тра.

Закон движения шайбы по неподвижной полосе
 $V_0 = 5,0 \text{ м/с}$



Бланк к задаче 9-2.

Решение

Задача 9-2. Полоса препятствий.

Часть 1. Полоса неподвижна.

1.1 При движении шайбы по шероховатой полосе на нее действует сила трения, модуль которой равен

$$F = \mu mg, \quad (1)$$

и направленная противоположно вектору скорости. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2)$$

Модуль ускорения шайбы постоянен и равен

$$a = \mu g . \quad (3)$$

Так сила трения направлена вдоль той же прямой, что вектор скорости движение шайбы будет прямолинейным, а так как ускорение постоянно, то движение будет равноускоренным. При минимальной начальной скорости, при которой шайба преодолет полосу, шайба остановится на противоположном краю полосы. Для расчета значения этой скорости можно воспользоваться известной кинематической формулой

$$S = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow d = \frac{v_{0\min}^2}{2\mu g} . \quad (4)$$

Из которой находим

$$v_{0\min} = \sqrt{2\mu g d} = 4,4 \frac{\text{м}}{\text{с}} . \quad (5)$$

Этот же результат может быть получен из теоремы о кинетической энергии (изменение энергии равно работе внешних сил):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgd \quad (4^*)$$

1.2 Так как шайба движется прямолинейно и с постоянным ускорением, то при движении по полосе закон ее движения имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2 . \quad (6)$$

Если начальная скорость шайбы меньше найденной скорости $v_{0\min}$, то в некоторый момент времени t_1 шайба остановится. Этот момент времени легко найти с помощью выражения для скорости шайбы при равноускоренном движении

$$v = v_0 - \mu g t \quad (7)$$

Полагая $v = 0$, находим

$$0 = v_0 - \mu g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{\mu g} \quad (8)$$

Координату шайбы в момент остановки можно определить по формуле

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} . \quad (9)$$

Таким образом, в этом случае ($v < v_{0\min}$) закон движения шайбы имеет вид:

$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2, & t < \frac{v_0}{\mu g} \\ x = \frac{v_0^2}{2\mu g}, & t > \frac{v_0}{\mu g} \end{cases} . \quad (10)$$

Если скорость шайбы превышает $v_{0\min}$, то шайба преодолеет шероховатую полосу. На этой полосе закон движения шайбы также будет иметь вид (6). Но в этом случае после преодоления шероховатой полосы шайба будет иметь скорость, определяемую по формуле

$$S = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow d = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2\mu g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} \quad (11)$$

Шайба выедет с полосы в момент времени t_1 , который легко найти из закона изменения скорости шайбы (7):

$$v_1 = v_0 - \mu g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 - v_1}{\mu g} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d}}{\mu g} \quad (12)$$

Эту же формулу можно получить как решение квадратного уравнения, следующего из закона движения шайбы (6), только при таком подходе необходимо правильно выбрать меньший корень.

Далее шайба будет двигаться равномерно со скоростью v_1 .

Полностью закон движения шайбы описывается выражениями

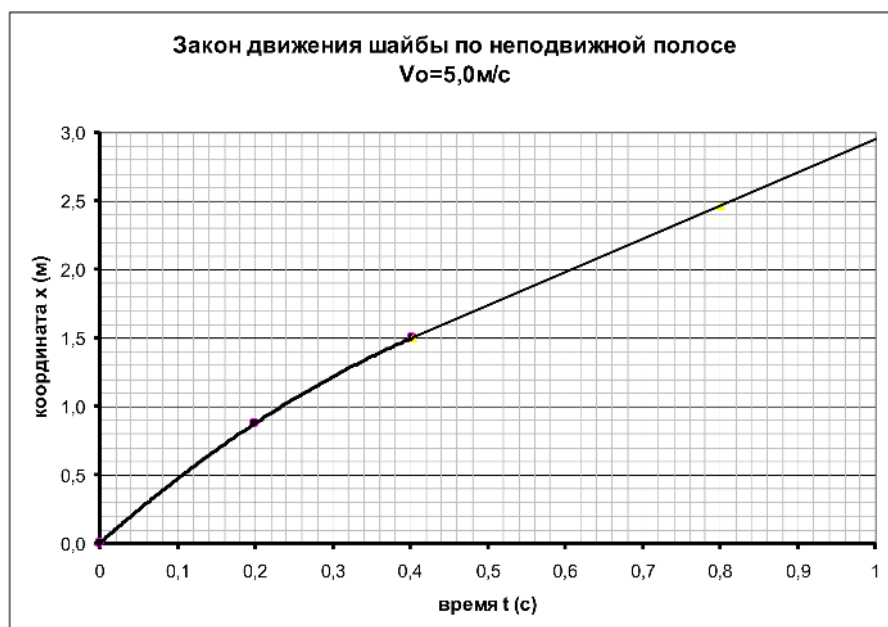
$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2, & t < t_1 \\ x = v_1(t - t_1), & t > t_1 \end{cases} . \quad (13)$$

Где значения величин t_1 и v_1 определяются формулами (11) и (12).

Шайба достигнет края гладкой полосы в момент времени

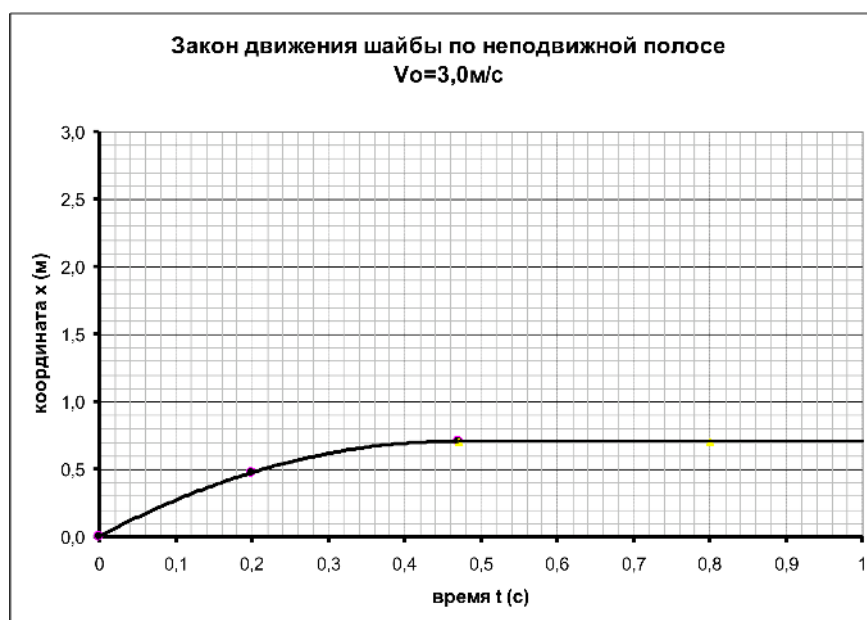
$$t_2 = t_1 + \frac{d}{v_1}. \quad (14)$$

1.3 При начальной скорости $v_0 = 5,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ шайба достигнет края шероховатой полосы, поэтому закон движения шайбы описывается формулами (13).



Численный расчет параметров этой зависимости дает следующие значения: - шайба достигнет края шероховатой полосы в момент времени $t_1 = 0,40 \text{ с}$; - скорость шайбы в этот момент времени $v_1 = 2,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; - достигнет края гладкой полосы в момент времени $t_2 = 1,0 \text{ с}$.

График этой зависимости показан на рисунке.



При начальной скорости $v_0 = 3,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ - шайба остановится на шероховатой полосе в точке с координатой $x_1 = 0,71 \text{ м}$; — это произойдет в момент времени $t_1 = 0,47 \text{ с}$, - далее шайба будет покоиться. График этой зависимости также показан на рисунке.

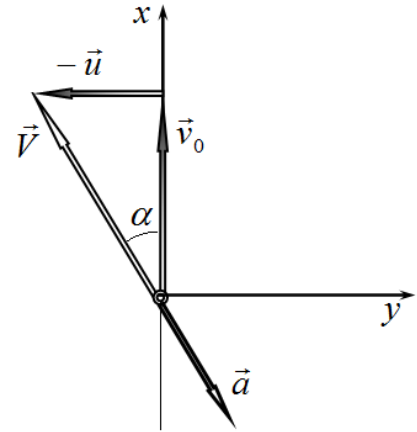
Часть 2. Движущаяся полоса.

2.1 Сила трения направлена в сторону противоположную скорости относительно движущейся полосы. Эта относительная скорость равна

$$\vec{V} = \vec{v}_0 - \vec{u}. \quad (15)$$

Этот вектор направлен под углом α к оси x . Угол α легко находится из очевидного соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{u}. \quad (16)$$



Вектор ускорения направлен противоположно вектору $\vec{V}$, его модуль, как и ранее, равен $a = \mu g$. Проще всего описать движение шайбы в системе отсчета, связанной с лентой. В этой системе отсчета шайба движется по прямой, направленной вдоль вектора $\vec{V}$. Чтобы шайба преодолела шероховатую полосу, для начальной скорости должно выполняться условие

$$\frac{d}{\cos \alpha} = \frac{V^2}{2\mu g} \quad (17)$$

Из этого соотношения следует уравнение для определения минимальной начальной скорости шайбы:

$$\frac{d\sqrt{v_0^2 + u^2}}{v_0} = \frac{v_0^2 + u^2}{2\mu g} \quad (18)$$

Это уравнение приводится к биквадратному уравнению:

$$v_0 \sqrt{v_0^2 + u^2} = 2\mu g d \Rightarrow v_0^4 + v_0^2 u^2 - (2\mu g d)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$v_0^2 = \frac{-u^2 + \sqrt{u^4 + 4(2\mu g d)^2}}{2} \Rightarrow v_{0 \min} = \sqrt{\frac{\sqrt{u^4 + 4(2\mu g d)^2} - u^2}{2}} = 4,0 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (19)$$

2.2 В неподвижной системе отсчета движение шайбы является равноускоренным, закон движения шайбы имеет вид

$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t^2 \\ y = \frac{\mu g \sin \alpha}{2} t^2 \end{cases}$$

При начальной скорости $v_0 = 5,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ шайба преодолет шероховатую полосу.

При этом значении начальной скорости угол $\alpha \approx 27^\circ$. $\sin \alpha = 0,45$ $\cos \alpha = 0,89$

Шайба достигнет края полосы в момент времени t_1 , который можно найти из уравнения

$$d = v_0 t_1 - \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t_1^2 \Rightarrow \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t_1^2 - v_0 t_1 + d = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2d\mu g \cos \alpha}}{\mu g \cos \alpha} = 0,38c$$

Далее шайба будет двигаться прямолинейно.

В этот момент времени координаты шайбы будут равны

$$\begin{cases} x_1 = d = 1,5\text{ м} \\ y_1 = \frac{\mu g \sin \alpha}{2} t_1^2 = 0,21\text{ м} \end{cases}$$

Проекции скорости шайбы на оси координат в момент пересечения полосы будут равны (эти формулы следуют из закона движения (20)):

$$\begin{cases} v_x = v_0 - \mu g \cos \alpha \cdot t_1 = 2,8\text{ м/с} \\ v_y = \mu g \sin \alpha \cdot t_1 = 1,1\text{ м/с} \end{cases}$$



Далее шайба будет двигаться прямолинейно, закон ее движения будет описываться формулами

$$\begin{cases} x = x_1 + v_x(t - t_1) \\ y = y_1 + v_y(t - t_1) \end{cases}$$

Траектория шайбы в этом случае показана на рисунке.

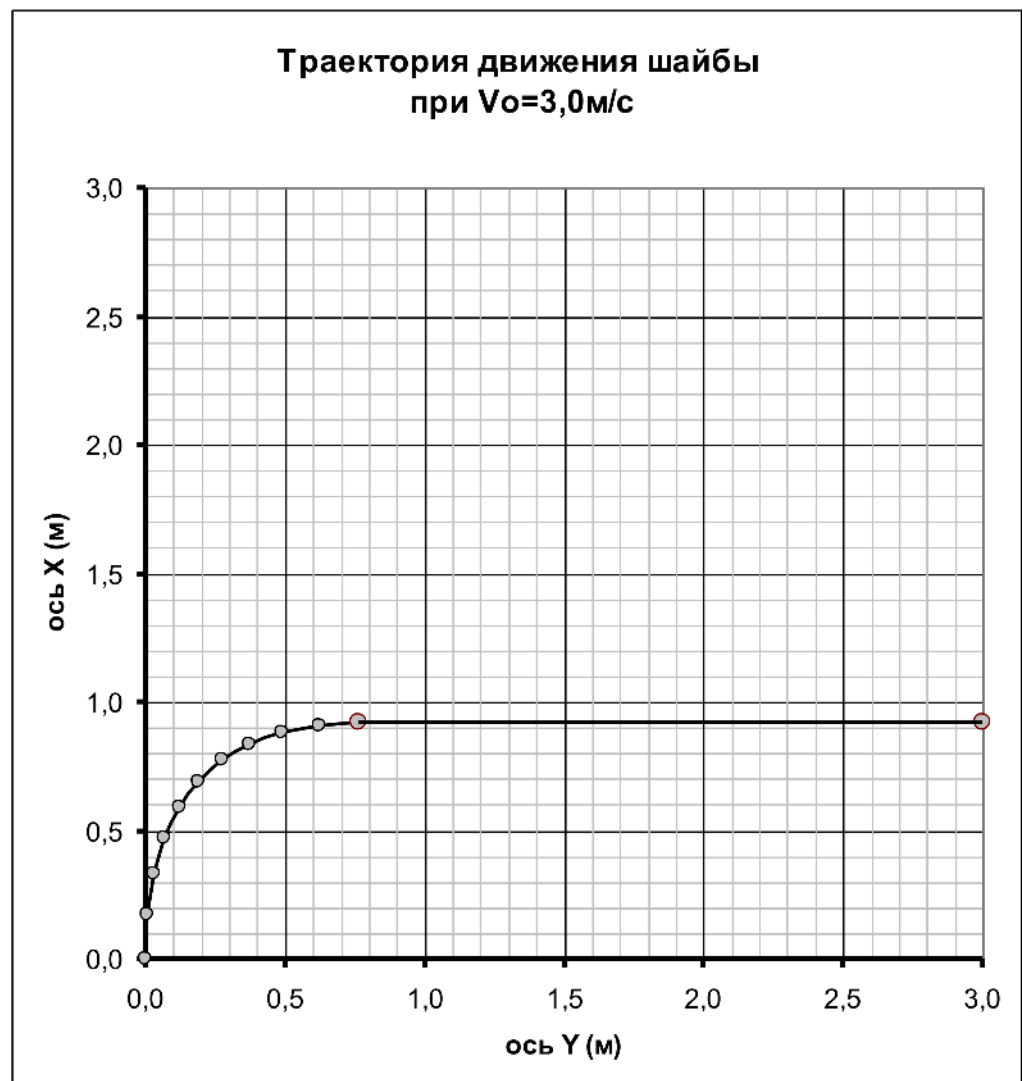
При начальной скорости $v_0 = 3,0 \frac{\text{М}}{\text{с}}$ шайба не пересечет шероховатую полосу.

В этом случае $\alpha \approx 40^\circ$. $\sin \alpha = 0,64$ $\cos \alpha = 0,77$ При движении по полосе ее закон движения также описывается функциями (20). Шайба прекратит скольжение по полосе, когда ее компонента скорости v_x обратится в нуль. Это произойдет в момент времени

$$v_x = v_0 - \mu g \cos \alpha \cdot t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g \cos \alpha} = 0,61 \text{ с.}$$

В этот момент координаты шайбы будут равны

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1 - \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t_1^2 = 0,92 \text{ м} \\ y_1 = \frac{\mu g \sin \alpha}{2} t_1^2 = 0,77 \text{ м} \end{cases}$$



Далее шайба будет двигаться вдоль оси y со скоростью ленты.

Траектория шайбы в этом случае показана на рисунке.