

-1 Разминка Задание состоит из 3 не связанных между собой задач.
Задача 1.1

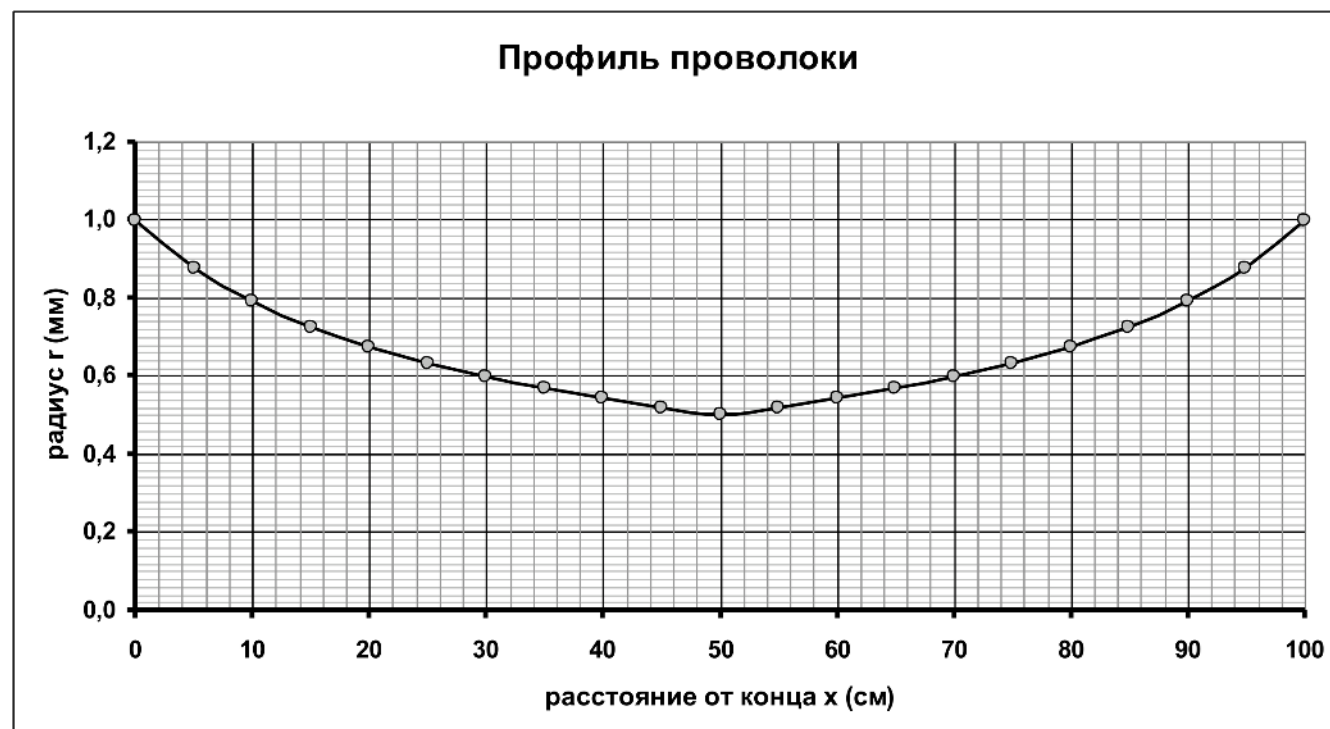
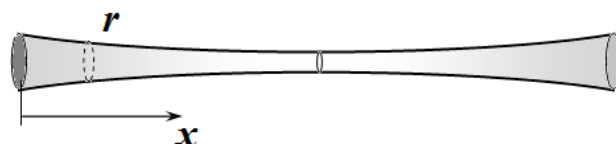
Условие

Задание 10-1 Разминка Задание состоит из 3 не связанных между собой задач.

Задача 1.1 Плотность вещества некоторой планеты, имеющей форму шара, зависит только от расстояния до центра планеты. При бурении глубокой скважины оказалось, что ускорение свободного падения не зависит от глубины погружения под поверхность планеты и равно g_0 . Найдите зависимость плотности вещества планеты от расстояния до ее центра $\rho(r)$.

Задача 1.2

В результате вытягивания оловянной проволоки, радиус ее сечения стал переменным, зависящим от расстояния до ее конца $r(x)$. График этой зависимости показан на рисунке (обратите внимание: радиус в мм, расстояние до конца в см). Найдите электрическое сопротивление этой проволоки, при протекании тока вдоль ее оси. Удельное сопротивление олова $\rho = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.



Задача 1.3 Через трубку с газом протекает электрический ток. Проводимость газа полностью обусловлена облучением газа потоком ионизирующих частиц (т.е. рассматривается

несамостоятельный разряд при малом напряжении) от различных радиоактивных источников. Если к трубке поднесен первый источник частиц, то удельное сопротивление газа оказывается равным ρ_1 , если к трубке поднесен второй источник, то удельное сопротивление становится равным ρ_2 . Чему будет равно удельное сопротивление газа, если к нему поднести оба источника? Считайте, что концентрация ионов, возникающих при ионизации, мала.

Решение

Задание 10-1 Разминка

Задача 1.1

Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра рассчитывается по формуле

$$g = G \frac{m(r)}{r^2}, \quad (1)$$

где $m(r)$ - масса части планеты, находящейся внутри шара радиуса r . Чтобы ускорение свободного падения не зависело от r , необходимо, что бы масса указанной части планеты удовлетворяла условию

$$m(r) = \frac{g_0}{G} r^2. \quad (2)$$

Запишем выражение для массы части планеты для радиуса $(r + \Delta r)$, где $\Delta r \ll r$

$$m(r + \Delta r) = m(r) + 4\pi r^2 \Delta r \rho. \quad (3)$$

Здесь $4\pi r^2 \Delta r \rho$ - масса части планеты, находящейся внутри шарового слоя радиуса r и малой толщины Δr . С другой стороны, из формулы (2) следует, что

$$m(r + \Delta r) = \frac{g_0}{G} (r + \Delta r)^2 \approx \frac{g_0}{G} r^2 + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r = m(r) + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r \quad (4)$$

Приравнявая выражения (3) и (4), получим ответ данной задачи

$$m(r) + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r = m(r) + 4\pi r^2 \Delta r \rho \quad \Rightarrow \quad \rho(r) = \frac{g_0}{2\pi G r} \quad (5)$$

Задача 1.2

Известна формула для сопротивления длинного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1)$$

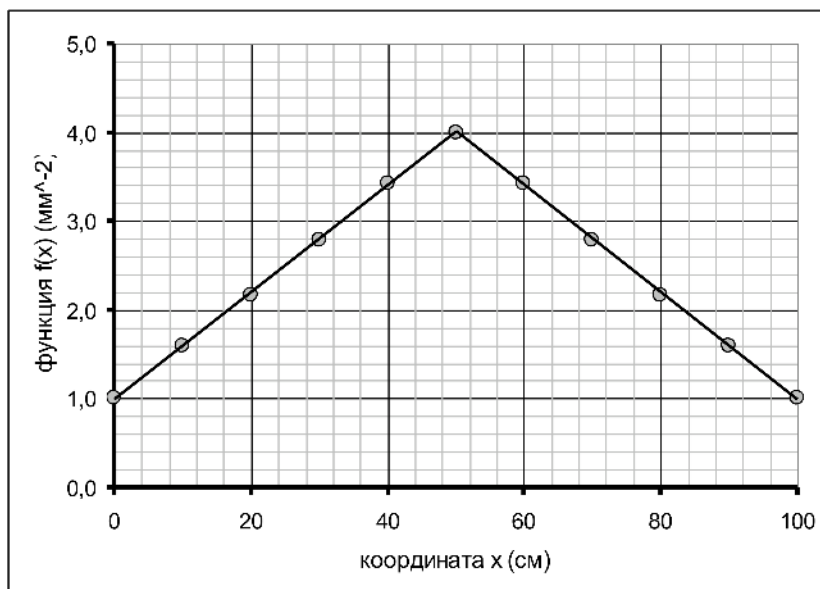
Но она применима к проводнику постоянного поперечного сечения. В данном случае площадь поперечного сечения проволоки переменна, поэтому для расчета ее сопротивления проволоку следует мысленно разбить на малые участки длиной Δx и просуммировать сопротивления этих участков (отметим, что они соединены последовательно). Итак, сопротивление всей проволоки можно представить в виде суммы

$$R = \sum_k \Delta R_k = \sum_k \rho \frac{\Delta x_k}{\pi r_k^2} = \frac{\rho}{\pi} \sum_k \frac{\Delta x_k}{r_k^2} \quad (2)$$

Для вычисления этой суммы можно построить график функции $f(x) = \frac{1}{(r(x))^2}$, тогда площадь под этим графиком численно будет равна сумме, входящей в формулу (4). По заданному графику зависимости $r(x)$ найдем значения радиуса в некоторых точках и построим график функции $f(x)$. Снятые с графика значения $r(x_k)$ и рассчитанные значения $f(x_k)$ приведены в таблице, рядом построен график функции $f(x)$.

Таблица.

x , см	r , мм	r^{-2} , мм ⁻²
0	1,00	1,00
10	0,79	1,60
20	0,68	2,16
30	0,60	2,78
40	0,54	3,43
50	0,50	4,00



Проведенные расчеты показывают, что полученная зависимость $f(x)$ состоит из двух симметричных частей, причем каждая из них является линейной. Поэтому не представляет труда вычислить площадь под графиком построенной функции

$$s = 2 \left(\frac{1+4}{2} \right) \cdot 10^6 \text{ м}^{-2} \cdot 0,50 \text{ м} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} \quad (3)$$

Тогда сопротивление проволоки равно

$$R = \frac{\rho}{\pi} \sum_k \frac{\Delta x_k}{r_k^2} = \frac{\rho}{\pi} s = \frac{1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}}{\pi} 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} = 0,095 \text{ Ом}. \quad (4)$$

Задача 1.3

Проводимость газа пропорциональна концентрации n свободных носителей тока (ионов и электронов), т.е.

$$\frac{1}{\rho} = An, \quad (1)$$

где A - некоторая константа. Ионы в газе появляются вследствие ионизации, т.е. число ионов, появляющихся в единицу времени, пропорционально интенсивности внешнего воздействия (плотности потока ионизирующих частиц)

$$\Delta n_+ = \alpha I \Delta t. \quad (2)$$

Исчезают же ионы вследствие рекомбинации (т.е. встрече двух ионов¹ противоположного знака). Т.к. как концентрации ионов противоположного знака одинаковы, то скорость рекомбинации пропорциональна квадрату концентрации ионов

$$\Delta n_- = \beta n^2 \Delta t. \quad (3)$$

В установившемся режиме скорость ионизации равна скорости рекомбинации. Из этого условия устанавливается связь между интенсивностью потока ионизирующих частиц и концентрацией ионов в газе

$$\alpha I = \beta n^2. \quad (4)$$

При воздействии каждого из источников устанавливаются концентрации, удовлетворяющие условиям

— 1 1

$$\begin{aligned} \alpha I_1 &= \beta n_1^2 \\ \alpha I_2 &= \beta n_2^2 \end{aligned} \quad (5)$$

При воздействии двух источников условие стационарности концентраций имеет вид

$$\alpha(I_1 + I_2) = \beta n_s^2. \quad (6)$$

Из этих соотношений следует, что концентрация ионов при воздействии двух источников определяется по «теореме Пифагора»

$$n_s = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}. \quad (7)$$

Наконец, используя соотношение (1), получим формулу, связывающую удельные сопротивления

$$\frac{1}{\rho_s} = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}. \quad (8)$$

Из которой следует окончательный результат

$$\rho_s = \frac{\rho_1 \rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}. \quad (9)$$

¹ Свободный электрон также будем называть «ионом».