

*Республиканская физическая олимпиада 2018 год.
(Заключительный этап)*

Теоретический тур. Решения задач.

Решения задач.

Задание 9-1. Разминка

Задача 1. Блоки

1.1 Так как нить и блоки невесомы и трение отсутствует, то сила натяжения нити во всех точках одинакова. Поэтому выигрыш в силе равен числу нитей, которые поднимают груз (создают силу \vec{F}). Поэтому система блоков на рис. 1 дает выигрыш в силе в два раза $k_1 = \frac{F}{F_0} = 2$. Система

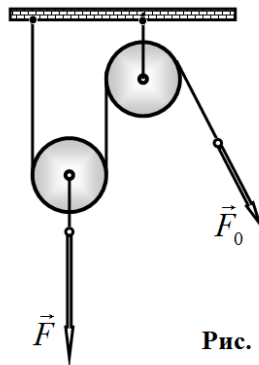


Рис. 1

блоков, изображенная на рис. 2 дает выигрыш в четыре раза $k_2 = \frac{F}{F_0} = 4$.

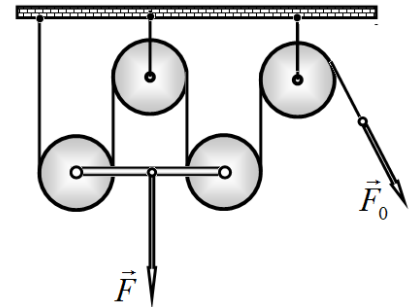
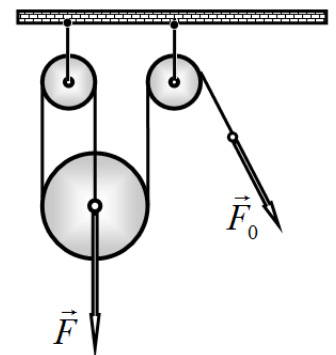


Рис. 2

Примечание. Это же решение можно обосновать ссылкой на закон сохранения энергии («золотой правило механики»).

1.2 Чтобы получить выигрыш в силе в три раза, подвижный блок необходимо подвесить на трех нитях. Например, так, как показано на рисунке.



Задача 2. Песочные часы.

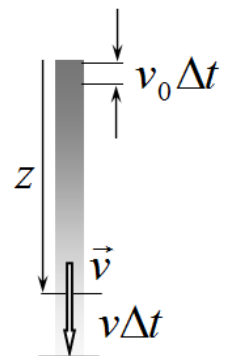
Число песчинок, пересекающих любое поперечное сечение струи (на любой высоте) в единицу времени, остается постоянным.

Рассмотрим малый промежуток времени Δt , настолько малый, что на этом промежутке можно пренебречь изменением скорости песчинок. За это время песчинки, находящиеся на расстоянии $v\Delta t$ выбранного поперечного сечения струи успеют пролететь через это сечение. Это число можно выразить через концентрацию песчинок n на выбранной высоте следующим образом

$$\Delta N = nSv\Delta t \quad (1)$$

С другой стороны это же число равно числу песчинок высыпавшихся из отверстия

$$\Delta N = N\Delta t \quad (2)$$



Из этих выражений следует, что концентрация песчинок на высоте z от отверстия описывается формулой

$$n = \frac{N}{Sv(z)}, \quad (3)$$

Где $v(z)$ - скорость песчинок на расстоянии z от отверстия. Зависимость скорости от координаты может быть найдена различными способами, например, с использованием кинематической формулы

$$z = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gz}. \quad (4)$$

Тогда зависимость концентрации от высоты будет иметь вид

$$n = \frac{N}{S\sqrt{v_0^2 + 2gz}}. \quad (5)$$

Масса песка в воздухе может быть найдена простым способом. Так как время падения песчинок равно

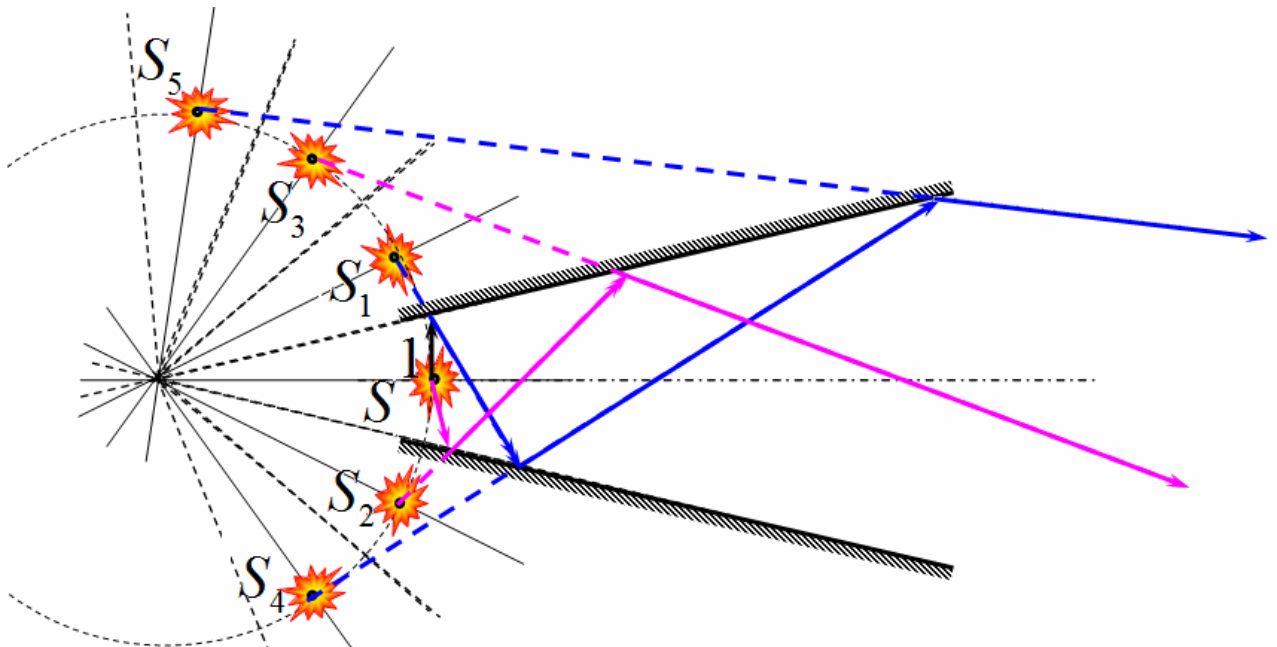
$$L = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad (6)$$

То масса струи равна массе песчинок, выпавших из отверстия за это время

$$m = m_0 N t = m_0 N \sqrt{\frac{2L}{g}}. \quad (7)$$

Задача 3 Зеркала

Построения хода лучей удобно проводить, предварительно построив мнимые изображения источника в зеркалах. Не сложно увидеть, что все эти источники будут находиться на окружности с центром в точке пересечения продолжений зеркал.



Рассмотрим построение хода луча 1. Луч 1 после попадания на верхнее зеркало, отражается так, что продолжение этого луча проходит чрез изображение S_1 (это изображение описывает лучи, отраженные от верхнего зеркала). После попадания на нижнее зеркало луч отражается от него, продолжение луча проходит через изображение S_4 . Наконец

еще одно отражение от верхнего зеркала дает луч, продолжение которого проходит через изображение S_5 . Ход второго луча строится аналогично – он также показан на рисунке.

Задача 9.2 Графен, графит, алмаз.

Часть 1. Графен

1.1 В решетке графена в шести вершинах каждого шестиугольника находится по одному атому. Но каждый атом входит в три соприкасающихся шестиугольника. Следовательно, на площади одного шестиугольника в среднем находится два атома. Поэтому поверхностная плотность графена может быть рассчитана по формуле

$$\sigma = \frac{2m}{S_0}. \quad (1)$$

Здесь $m = \frac{M}{N_A}$ - масса атома углерода,

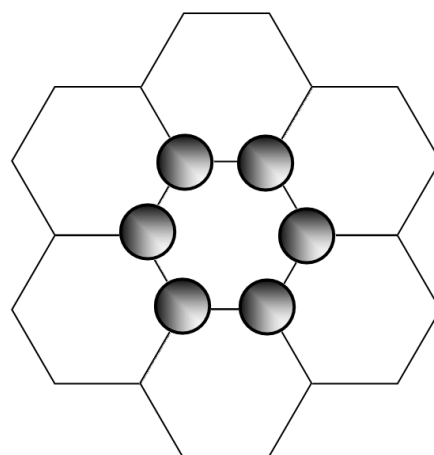
$$S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} a_0^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} a_0^2 \quad (2)$$

площадь шестиугольника. После подстановки этих выражений в формулу (1), получаем

$$\sigma = \frac{2m}{S_0} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{M}{N_A a_0^2}. \quad (3)$$

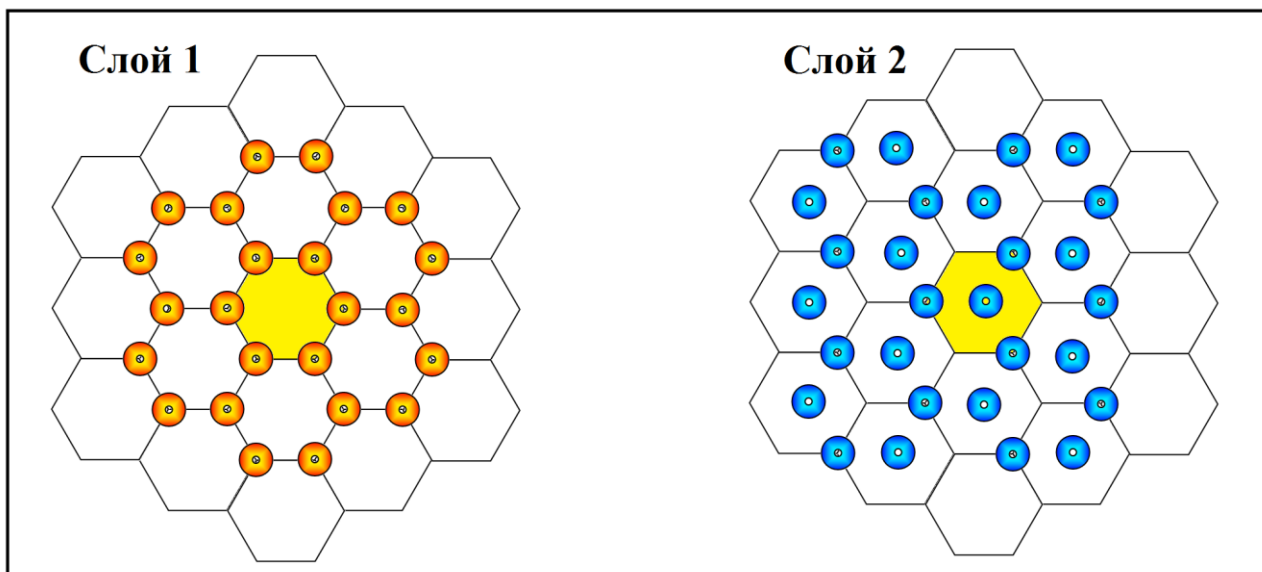
Подстановка численных значений приводит к результату

$$\sigma = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{M}{N_A a_0^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} \cdot (0,142 \cdot 10^{-9})^2 \text{м}^2} = 7,61 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}. \quad (4)$$



Часть 2. Графит

2.1 В условии задачи сказано, что атомы в соседних слоях смещены относительно друг друга, поэтому правильное расположение атомов в соседних слоях показано на следующем рисунке

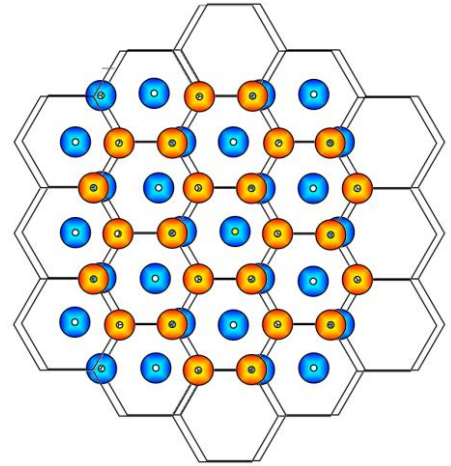


Для наглядности совместим эти слои.

Таким образом, в каждом слое имеется такая же гексагональная плоская решетка, как и в графене. Поэтому поверхностная плотность в каждом слое также будет определяться по формуле (3), только с немного иным значением длины стороны шестиугольника.

Слои находятся на расстоянии h . Иными словами, в «пластинке» толщиной h находится один слой атомов. Поэтому плотность графита рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{\sigma}{h} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{M}{N_A a_0^2 h}. \quad (5)$$



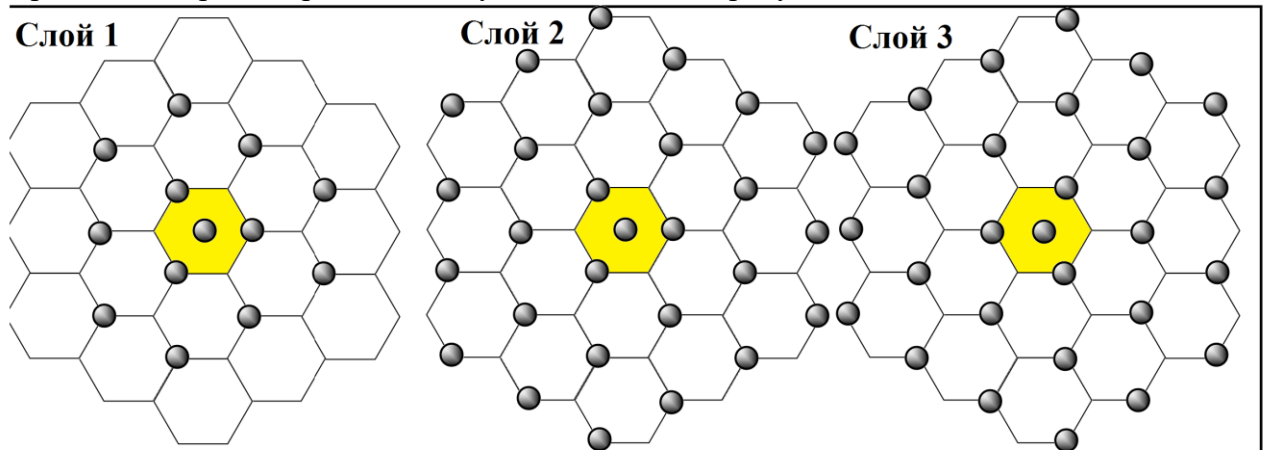
Численное значение

$$\rho = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{M}{N_A a_0^2 h} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} \cdot (0,1415 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 0,3354 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 2,28 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

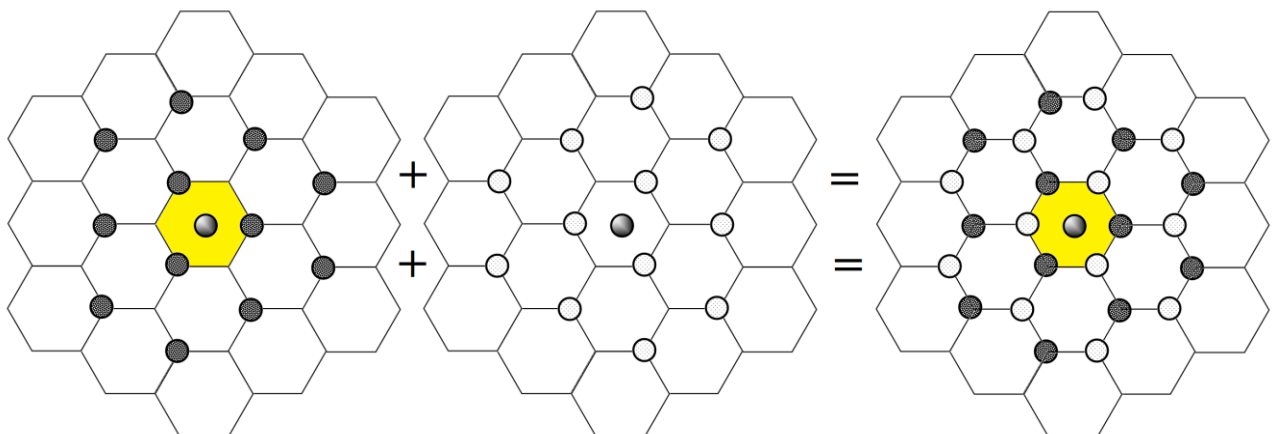
Отметим, что табличное значение плотности графита $2,22,27 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Часть 3. Алмаз

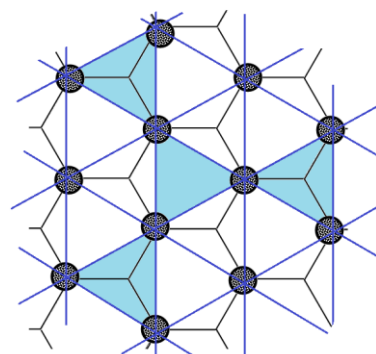
3.1 Располагать атомы в каждом слое удобно последовательно, в соответствии с описанным порядком построения решетки. Результат показан на рисунке.



Понятно, что слои 1 и 2 полностью повторяют друг друга. И в этом случае покажем результат совмещения слоев 2 и 3.

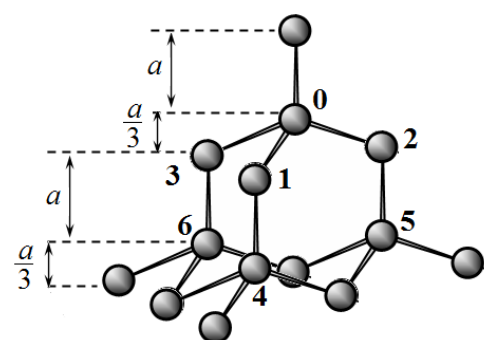


3.2 Плотность графита можно рассчитывать различными способами, но, по-видимому, самый простой способ воспользоваться приведенной математической подсказкой. Как следует из приведенного построения, расположения атомов в каждом слое идентичны. Это расположение можно представить как набор правильных треугольников, покрывающих плоскость. Длина стороны и площадь такого треугольника приведена в подсказке! Понятно, что в среднем на каждый треугольник приходится только половина атома (так как каждый атом входит в шесть стыкующихся треугольников). Следовательно, поверхностная плотность атомов в каждом слое равна



$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \frac{m}{S_3} = \frac{1}{2} \frac{M}{N_A \sqrt{\frac{4}{3}} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M}{N_A a^2}. \quad (6)$$

Теперь обратим внимание, что рассмотренные слои расположены на неодинаковых расстояниях. Опять же, с помощью подсказки можно заметить, что расстояния между слоями чередуются: сначала слои располагаются на расстоянии a , а потом на расстоянии $\frac{a}{3}$.



Следовательно, на толщине $H = \frac{4}{3} a$ располагаются два слоя, поэтому плотность алмаза равна

$$\rho = \frac{2\sigma_2}{H} = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{M}{N_A a^2 \frac{4}{3} a} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{M}{N_A a^3}. \quad (7)$$

Численные расчеты приводят к следующему результату

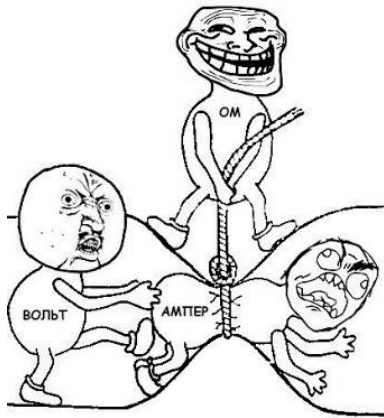
$$\rho = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{M}{N_A a^3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{12,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} \cdot (0,153 \cdot 10^{-9})^3 \text{м}^3} = 3,62 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (8)$$

Часть 4.

4.1 В решетке алмаза все атомы связаны четырьмя ковалентными связями, поэтому свободных электронов нет. В графите атомы связаны в гексагональном слое с тремя соседними, потому одна связь остается свободной. Электроны, обеспечивающие эту связь, оказываются свободными, они и являются носителями электрического тока.

4.2 Свободные электроны легко могут двигаться между слоями кристаллической решетки, но с большим трудом преодолевают слои с густо расположенными атомами. Поэтому электрическое сопротивление поперек слоев намного больше, чем сопротивление при протекании тока вдоль слоев – по литературным данным, более чем в 1000 раз!

4.3 В приведенной модели имеются атомы, имеющие 6 (шесть!) связей. В то время как углерод четырехвалентен, поэтому более 4 связей быть не может!



Задача 9-3 Опыты Георга Ома.

Часть 1. Экспериментальная установка.

Для ответа на поставленные вопросы требуется не только разобраться в принципах действия установки, но высказать некоторые предположения (почти очевидные) о характере исследуемых процессов.

1.1 Так как в этом положении в установке Г. Ома подвес также не закручен, то момент силы со стороны поля Земли равен нулю (так как в этом положении стрелка находится в

равновесии).

1.2 Измерения угла закручивания проводятся при направлении стрелки на север. В этом положении момент силы, действующий на стрелку со стороны поля Земли равен нулю, поэтому нет необходимости учитывать магнитное поле Земли.

1.3 При закручивании подвеса стрелка возвращается в исходное состояние если момент силы упругости уравнивает максимальный момент силы, действующей на стрелку со стороны магнитного поля тока. Так как измерения проводятся при ориентации стрелки строго вдоль направления тока, то момент силы, действующей со стороны тока, зависит только от силы тока. Наконец, момент силы упругости пропорционален углу закручивания. Отсюда следует, что при указанной методике измеряемый угол закручивания пропорционален силе тока.

Отметим, что при измерении угла отклонения стрелки необходимо знать зависимость моментов сил от угла поворота стрелки.

1.4 Ртутные контакты используются для уменьшения и стабилизации их сопротивления.

Часть 2. Теоретическое описание.

2.1 Из закона Ома следует, что сила тока в цепи описывается формулой

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{rx + R_0}. \quad (1)$$

где rx - сопротивление подключенной проволоки

Тогда угол закручивания равен

$$X = cI = \frac{cU_0}{rx + R_0}. \quad (2)$$

2.2 Последнюю формулу можно переписать в форме, совпадающей с формой, предложенной Г. Омом

$$X = \frac{\left(\frac{cU_0}{r}\right)}{x + \frac{R_0}{r}}. \quad (3)$$

Из сравнения этой формулы с формулой Г. Ома $X = \frac{a}{x+b}$, находим формулы для параметров Ома

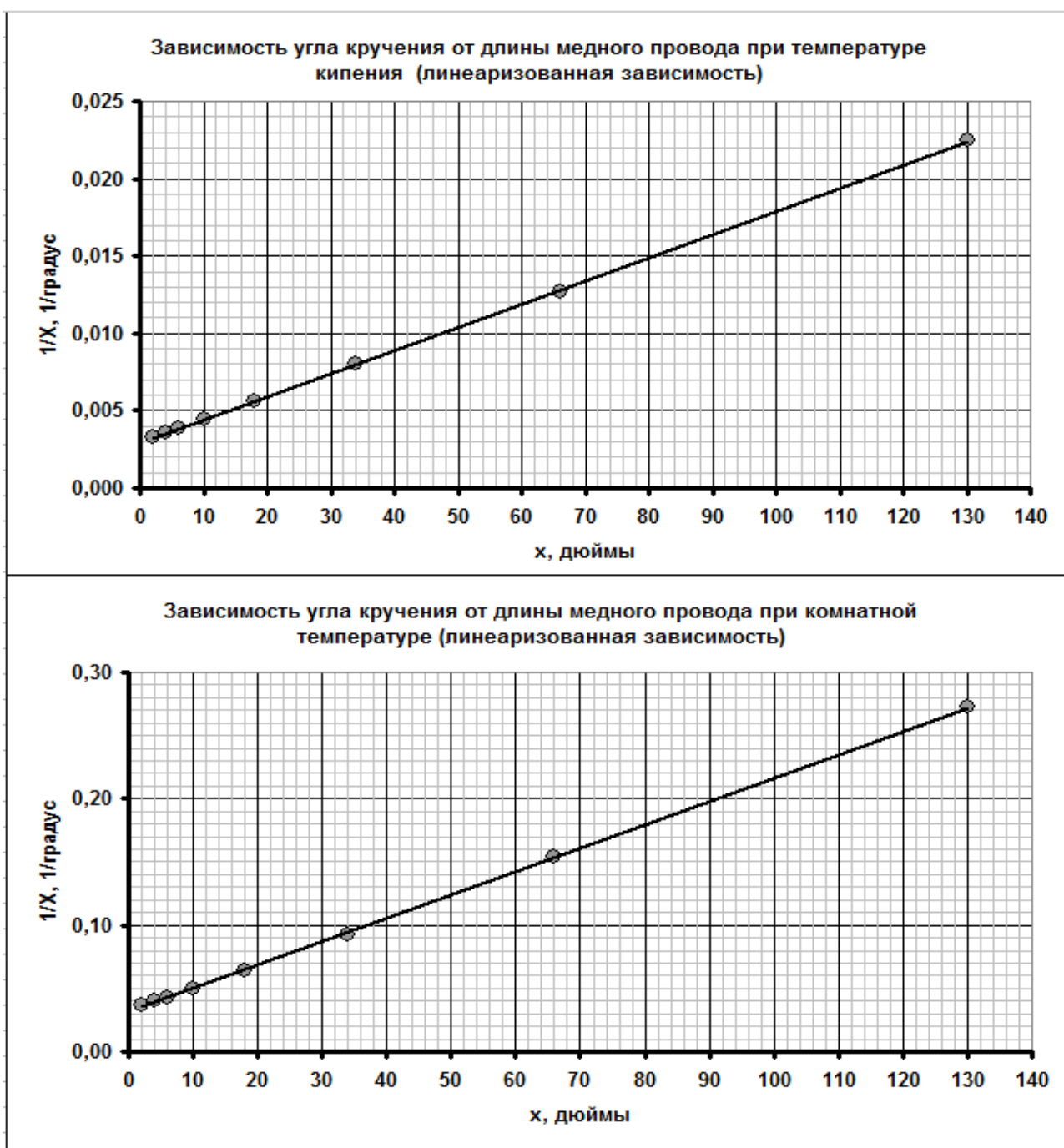
$$a = \frac{cU_0}{r}, \quad b = \frac{R_0}{r}. \quad (4)$$

Часть 3 Результаты измерений и их обработка.

Для того, чтобы получить линейную зависимость, удобно построить график зависимости величины X^{-1} от длины проволоки. Расчеты величин обратных углам закручивания приведены в Таблице 1. Соответствующие графики показаны на рисунках.

Таблица 1 Измерения с медной проволокой.

x , дюйм	2,0	4,0	6,0	10,0	18,0	34,0	66,0	130,0
X° (при $80^\circ R$)	305,25	281,50	259,00	224,00	178,50	124,75	79,00	44,50
X° (при $7,0^\circ R$)	27,00	25,00	23,33	20,00	15,50	10,75	6,50	3,67
X^{-1} (при $80^\circ R$)	0,0033	0,0036	0,0039	0,0045	0,0056	0,0080	0,0127	0,0225
X^{-1} (при $7,0^\circ R$)	0,0370	0,0400	0,0429	0,0500	0,0645	0,0930	0,1538	0,2725



Полученные графики являются линейными с высокой точностью, что подтверждает применимость формулы Ома для описания полученной зависимости.

3.2 Для расчета параметров a, b запишем полученную зависимость в виде

$$\frac{1}{X} = \frac{x+b}{a} = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a} = Ax + B \quad (5)$$

Где A, B - параметры линейных зависимостей, представленных на графиках. Эти параметры могут быть найдены различными традиционными способами (МНК, по графикам, усреднением по всем точкам). Ниже приведены их значения, рассчитанные по методу наименьших квадратов.

Для первой зависимости (при температуре кипения):

$$A_1 = 1,50 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1} \cdot \text{дюйм}^{-1}, \quad B_1 = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}. \quad (6)$$

Для второй зависимости (при комнатной температуре):

$$A_2 = 2,85 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1} \cdot \text{дюйм}^{-1}, \quad B_2 = 3,19 \cdot 10^{-2} \text{ град}^{-1}. \quad (6)$$

Из формул (5) следует, что параметры Ома для указанных зависимостей равны

$$a_1 = \frac{1}{A_1} = 6,68 \cdot 10^3 \text{ град} \cdot \text{дюйм}, \quad b_1 = a_1 B_1 = 19,6 \text{ дюйм}. \quad (7)$$

$$a_2 = \frac{1}{A_2} = 5,41 \cdot 10^2 \text{ град} \cdot \text{дюйм}, \quad b_2 = a_2 B_2 = 17,3 \text{ дюйм}. \quad (8)$$

3.3 Из формул (4) следует, что сопротивление R_0 пропорционально параметру b (в данном случае величина r постоянна)

$$R_0 = br. \quad (9)$$

Поэтому близость этих параметров для обеих зависимостей свидетельствует о близости значений R_0 . Действительно, оказалось, что значения параметров b_1 и b_2 близки, различия между ними составляют порядка 10%. Очевидной причиной их различия являются неизбежные погрешности измерений. Второй возможной причиной является зависимость сопротивления термобатарей от температуры.

3.4 Легко заметить, что параметр $b = \frac{R_0}{r}$ и является искомой величиной - длиной проволоки, которая имеет сопротивление R_0 , поэтому она равна $l = b_1 \approx 20 \text{ дюйм}$.

3.5 Величина параметра $a = \frac{cU_0}{r}$ пропорциональна напряжению термобатарей. Поэтому отношение этих параметров равно отношению напряжений. Используя полученные данные, находим, что

$$\frac{U_{01}}{U_{02}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{6,68 \cdot 10^3}{5,41 \cdot 10^2} \approx 12. \quad (10)$$

С другой стороны отношение разностей температур равно отношению температуры кипения воды к комнатной температуре

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{80}{7,0} \approx 11,4. \quad (11)$$

Близость этих значений позволяет считать, что напряжение термобатарей примерно пропорционально разности температур ее концов.

3.6 Обработаем результаты измерений с латунной проволокой, так же как и ранее. Строим зависимость $X^{-1}(x)$ - расчеты в таблице 2, ниже график зависимости.

Таблица 2. Измерения с латунной проволокой.

x , дюйм	2,0	4,0	8,0	16,0
X° (при $80^\circ R$)	111,50	64,75	37,00	19,75
X^{-1} (при $80^\circ R$)	0,0090	0,0154	0,0270	0,0506



Рассчитываем значения параметров линейной зависимости

$$A_3 = 2,96 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1} \cdot \text{дюйм}^{-1}, \quad B_3 = 3,31 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}. \quad (12)$$

И по ним значения параметров Ома

$$a_3 = \frac{1}{A_3} = 3,38 \cdot 10^2 \text{ град} \cdot \text{дюйм}, \quad b_3 = a_3 B_3 = 1,12 \text{ дюйм}. \quad (13)$$

В рассматриваемых сериях измерений неизменной остается напряжение батареи, но разные значения r . Поэтому для сравнения значений R_0 воспользуемся отношением параметров, которое следует из формул (4)

$$\frac{b}{a} = \frac{R_0}{cU_0}. \quad (14)$$

Как следует из этой формулы это отношение пропорционально R_0 . Рассчитаем эти отношения для двух случаев медной и латунной проволок (при постоянной разности температур)

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{19,6 \text{ дюйм}}{6,68 \cdot 10^3 \text{ град} \cdot \text{дюйм}} \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1} \quad (15)$$

$$\frac{b_3}{a_3} = \frac{1,18 \text{ дюйм}}{3,38 \cdot 10^2 \text{ град} \cdot \text{дюйм}} \approx 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}. \quad (16)$$

По словам самого Г. Ома в данном случае параметры изменяются почти в 20 раз, а при этом их отношение «почти» не изменяется (всего на 12%), поэтому можно считать величину R_0 одинаковой в этих сериях экспериментов.

Отметим, что погрешность определения параметра b_3 по приведенным результатам измерений Г. Ома составляет 15%.

3.7 Требуемая величина может быть найдена как отношение величин r для латунной и медной проволок, которое в свою очередь равно отношению параметров a . Действительно,

$$a = \frac{cU_0}{r} \Rightarrow \frac{r_{\text{Л}}}{r_{\text{М}}} = \frac{a_1}{a_3} \approx 20. \quad (17)$$

Таким образом, сопротивление одного дюйма латунной проволоки примерно равно сопротивлению 20 дюймов медной проволоки.

Заметим, что теоретически это же отношение может быть найдено как отношение параметров b (по приведенным данным оно примерно равно 17). Но отношение параметров a дает более точный результат, так как обычно погрешности определения сдвигов линейных зависимостей (параметров B) заметно превышают погрешности определения коэффициентов наклона (параметров A).

10 Класс

Задание 10-1. Разминка

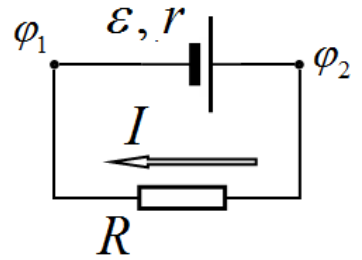
Задача 1. Кольцевая ЭДС

1.1.1 По закону Ома для полной цепи сила тока в этой цепи равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}. \quad (1)$$

Следовательно, искомая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = IR = \varepsilon \frac{R}{R+r}. \quad (2)$$



1.1.2 Полученное выражение можно преобразовать к виду

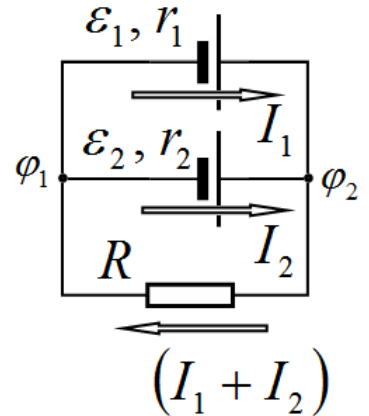
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon \frac{R}{R+r} = \varepsilon \frac{R+r-r}{R+r} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{R+r} r = \varepsilon - Ir. \quad (3)$$

Впрочем, это соотношение можно записать сразу, сославшись на закон для участка цепи с активным элементом.

1.2.1 Используя соотношение (2) и закон Ома для участка цепи, запишем систему уравнений для сил токов в различных ветвях рассматриваемой цепи

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2)R \\ \varepsilon_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2)R \end{cases} \quad (4)$$

Решение этой системы дает искомый результат



$$\begin{cases} \varepsilon_1 - I_1 r_1 = (I_1 + I_2)R \\ \varepsilon_2 - I_2 r_2 = (I_1 + I_2)R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{r_1} - I_1 = (I_1 + I_2) \frac{R}{r_1} \\ \frac{\varepsilon_2}{r_2} - I_2 = (I_1 + I_2) \frac{R}{r_2} \end{cases} \Rightarrow \quad (5)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} - (I_1 + I_2) = (I_1 + I_2) \left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} \right) \Rightarrow I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

1.2.2 Последнее соотношение можно переписать в виде

$$I_R = (I_1 + I_2) = \frac{\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}}{1 + R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1}}{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1} + R}, \quad (6)$$

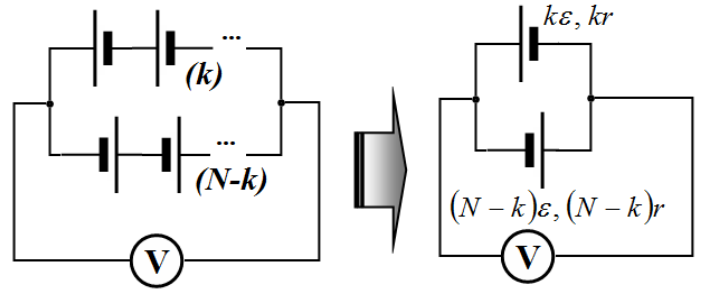
который совпадает с законом Ома для полной цепи $I = \frac{\varepsilon_0}{R + r_0}$. Следовательно, во-первых,

два параллельно соединенных источника можно заменить одним, во-вторых, характеристики этого источника описываются не очевидными формулами:

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2};$$

$$r_0 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad (7)$$

1.3 При подключении вольтметра к нулевой и k - точкой эквивалентная схема выглядит, как показано на рисунке. Здесь учтено, что при последовательном соединении источников их ЭДС и внутренние сопротивления складываются.



Для расчета напряжения можно воспользоваться полученной формулой (6), в которой следует положить

$$\varepsilon_1 = k\varepsilon, \quad \varepsilon_2 = -(N-k)\varepsilon, \quad r_1 = kr, \quad r_2 = (N-k)r.$$

Подстановка этих значений приводит к результату – сила тока через вольтметр, а следовательно и напряжение на нем равно нулю!

Этот же результат следует и из закона (3), так сила тока в цепи равна $I = \frac{N\varepsilon}{Nr} = \frac{\varepsilon}{r}$, поэтому при любом подключении $\Delta\varphi = k\varepsilon - Ikr = 0$.

Задача 2. Шайба

Изменение скорости шайбы обусловлено силой трения о борт. При движении вдоль прямолинейных бортов отсутствует сила, прижимающая шайбу к борту, поэтому в этом случае трение отсутствует, и скорость шайбы остается постоянной. При движении вдоль закругления появляется сила реакции, действующая на шайбу и сообщающая ей центростремительное ускорение. Изменение модуля скорости шайбы описывается уравнением 2 закона Ньютона в проекции на направление скорости шайбы

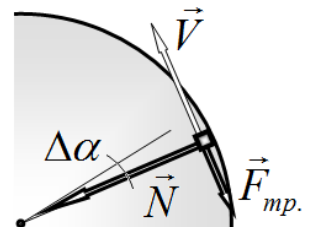
$$m \frac{\Delta V}{\Delta t} = -F_{mp}. \quad (1)$$

Сила трения связана с силой реакции законом Кулона – Амонтона

$$F_{mp.} = \mu N. \quad (2)$$

Наконец, сила реакции может быть выражена через центростремительное ускорение

$$\frac{mV^2}{R} = N. \quad (3)$$



Здесь R - радиус закругления.

Таким образом, изменение модуля скорости описывается уравнением

$$m \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\mu \frac{mV^2}{R}. \quad (4)$$

Так как нас не интересует зависимость скорости от времени, перейдем в этом уравнении к зависимости изменения скорости от угла поворота. Пусть за малый промежуток времени Δt

шайба прошла путь $\Delta S = V\Delta t$ и при этом повернула на малый угол $\Delta\alpha$. Эти величины связаны геометрическим соотношением

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta S}{R} = \frac{V\Delta t}{R}. \quad (5)$$

С учетом этого выражение, уравнение (4) принимает вид

$$\Delta V = -\mu V \frac{V\Delta t}{R} \Rightarrow \Delta V = -\mu V \Delta\alpha. \quad (6)$$

Из этого уравнения следует, что относительное изменение скорости шайбы пропорционально углу поворота

$$\frac{\Delta V}{V} = -\mu \Delta\alpha \quad (7)$$

Следовательно, при повороте на некоторый угол α модуль скорости уменьшается в одно и то же число раз. Так как прохождение каждого закругления соответствует повороту на один и тот же угол 90° , то и уменьшение скорости на каждом закруглении также будет в одно и то же число раз, то есть

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1}. \quad (8)$$

Из этого выражение определяем искомую конечную скорость

$$V_2 = \frac{V_1^2}{V_0}. \quad (9)$$

Дополнение.

1. Проведенные рассуждения можно проиллюстрировать и математическими выкладками. Разобьем угол поворота α на малые интервалы $\Delta\alpha$. Тогда из уравнения (7) следует, что скорости после прохождения k и $(k-1)$ интервалов связаны соотношением

$$V_k = V_{k-1}(1 - \mu\Delta\alpha). \quad (10)$$

То есть последовательность V_k является геометрической прогрессией, поэтому каждый член этой последовательности выражается в явном виде следующим образом

$$V_k = V_0(1 - \mu\Delta\alpha)^k. \quad (11)$$

Если выразить число шагов, как $k = \frac{\alpha}{\Delta\alpha}$, то выражение (11) можно переписать в виде

$$V_k = V_0(1 - \mu\Delta\alpha)^{\frac{\alpha}{\Delta\alpha}} = V_0 \exp(-\mu\alpha). \quad (12)$$

Здесь на последнем шаге использован замечательный предел. Его можно «доказать» следующим образом. Если при малых x справедливо выражение $\exp(x) \approx 1 + x$, то справедливо и обратное $1 + x \approx \exp(x)$. Поэтому $(1 + x)^\beta \approx \exp(\beta x)$, откуда и следует формула (12).

Наконец, можно просто проинтегрировать уравнение (7):

$$\frac{dV}{V} = -\mu d\alpha \Rightarrow \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = -\mu \int_0^\alpha d\alpha \Rightarrow \ln \frac{V}{V_0} = -\mu\alpha \Rightarrow V = V_0 \exp(-\mu\alpha)$$

Обратим внимание, что данная формула совпадает с формулой Эйлера, описывающей изменение силы натяжения нити переброшенной через цилиндр.

Задача 3. Шарики в трубе

Силы взаимодействия между шариками (как электростатические, так и упругие в момент столкновения) являются внутренними для системы двух шариков, поэтому они влияют на движение центра масс шариков. Следовательно, центр масс шариков движется вниз с ускорением свободного падения, независимо от того, до столкновения, после столкновения...

Так как массы шариков одинаковы, то центр масс C находится на середине отрезка их соединяющего.

За время τ центр масс двух шариков опустится на расстояние $\frac{g\tau^2}{2}$ и окажется на высоте

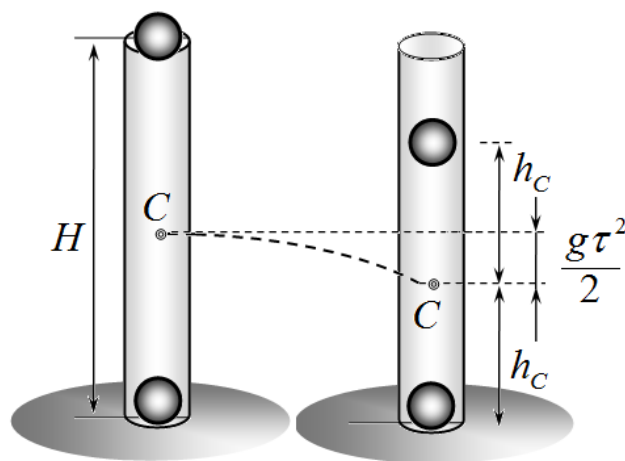
$$h_c = \frac{H}{2} - \frac{g\tau^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь $\frac{H}{2}$ - высота центра масс в начальный момент времени (в момент отпускания).

Так как нижний шарик в это момент оказался на дне сосуда, то второй шарик окажется на высоте в 2 раза большей высоты центра масс, т.е.

$$h_1 = 2h_c = H - g\tau^2. \quad (2)$$

Примечание. Исходные данные позволяют заключить, что в рассматриваемый момент времени второй шарик будет находиться выше.



Задача 2 Теплопроводность

1.1 Для расчетов потоков теплоты надо просто подставить численные значения в заданную формулу и провести расчет

Для серебра

$$q_{Ag} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 8,58 \cdot 10^4 \text{ Вт} \quad (1)$$

Для свинца

$$q_{Zn} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 7,02 \cdot 10^3 \text{ Вт} \quad (2)$$

1.2 Так как коэффициент теплопроводности постоянен в установившемся режиме температуру изменяется по линейному закону. Поэтому при расчетах можно считать, что среднее значение изменения температуры равно $\delta T = \frac{1}{2} \Delta T$. После этого опять считаем

Для серебра

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} cm\Delta t = \frac{1}{2} c\rho Sh\Delta t = 2,47 \cdot 10^6 \text{ Дж} \quad (3)$$

Для свинца

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} c\rho Sh\Delta t = 1,43 \cdot 10^6 \text{ Дж} \quad (4)$$

1.3 Для решения этого пункта воспользуемся упорно навязываемой аналогией с законами постоянного тока. Так для каждой пластины можно ввести и рассчитать тепловое сопротивление

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{h}{S} \quad (5)$$

Так как пластины соединены последовательно (теплота проходит через одну, потом через другую), то общее сопротивление равно сумме сопротивлений. Поэтому поток теплоты через сведенные пластины будет равен

$$q_1 = q_2 = \frac{\Delta T}{\frac{h}{\lambda_{Ag} S} + \frac{h}{\lambda_{Pb} S}} \quad (6)$$

Этой формуле можно придать интересный вид

$$q_1 = q_2 = \left(\frac{1}{q_{Ag}} + \frac{1}{q_{Pb}} \right)^{-1} \quad (7)$$

Расчеты по этой формуле дают значение

$$q_1 = q_2 = 6,49 \cdot 10^3 \text{ Вт} \quad (8)$$

Как видно поток определяется потоком через плохо проводящий слой.

Для расчета количества теплоты, потраченного на нагревание необходимо сначала найти распределение температуры, т.е. решить следующие пункты задачи.

1-4 – 1.6 Распределение температуры в каждом слое, по-прежнему, линейное. Поэтому достаточно найти температуру стыка. Опять воспользуемся аналогией с протеканием электрического тока. Обозначим свойства вещества примыкающего к холодной стороне индексом «х», а к горячей стороне индексом «г». Тогда можно записать (здесь T_z - температура стыка):

$$T_z - T_0 = qR_x = \frac{\Delta T}{\frac{h}{\lambda_{Ag} S} + \frac{h}{\lambda_{Pb} S}} \cdot \frac{h}{\lambda_x S} = \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_z}} \quad (9)$$

Откуда следует, что

$$T_z = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_z}} \quad (10)$$

Проведем расчеты.

В первом случае ($Pb \rightarrow Ag$)

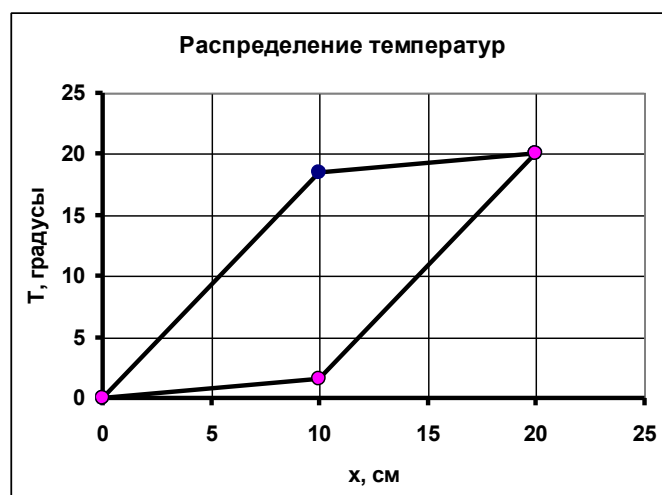
$$T_{z1} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_{Ag}} + \frac{1}{\lambda_{Pb}}} = 18,5^\circ\text{C} \quad (11)$$

Во втором случае ($Ag \rightarrow Pb$)

$$T_{z2} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_{Ag}} + \frac{1}{\lambda_{Pb}}} = 1,5^\circ\text{C} \quad (12)$$

Во втором случае можно было просто вычислить $T_{z2} = \Delta T - T_{z1}$. Графики зависимостей температуры от координаты показаны на рисунке.

Видно, что основное «падение



температуры» происходит на свинцовой пластине. Также по графику видно, что основное различие в количестве теплоты возникает из-за того, что серебряная пластина в первом случае нагревается больше.

Для расчетов теплот учтем, что пластина, примыкающая к холодной стороне, в среднем нагрелась на $\frac{1}{2}T_z$; а вторая - на величину $\frac{1}{2}(T_z + T_1)$.

Поэтому количество теплоты, которой пойдет на нагревания будет равно:

В первом случае ($Pb \rightarrow Ag$):

$$Q_1 = \frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}ShT_z + \frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}Sh(T_z + T_1) = 6,07 \cdot 10^6 \text{ Дж} \quad (13)$$

Во втором случае ($Ag \rightarrow Pb$)

$$Q_1 = \frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}ShT_z + \frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}Sh(T_z + T_1) = 1,73 \cdot 10^6 \text{ Дж} . \quad (14)$$

Часть 2. Воздушная пластина.

В данной части задачи все температуры следует рассчитывать в шкале Кельвина.

2.1 Для определения вида зависимости длины свободного пробега от указанных параметров, заметим, что движущаяся молекула заметает на своем пути площадь равную πd^2 . На длине свободно пробега в цилиндре с указанной площадью поперечного сечения и высотой равной длине свободного пробега в среднем должна находиться одна молекула. Поэтому можно записать

$$\pi d^2 \langle l \rangle n = 1 \Rightarrow \langle l \rangle = \frac{1}{\pi d^2 n} . \quad (15)$$

2.2 Подставляя найденную зависимость в формулу для теплопроводности, получим выражение

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \rho c_v = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 n} \cdot nm \cdot C_v M . \quad (16)$$

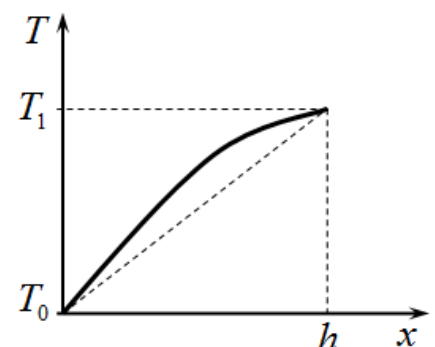
Из которого следует, что коэффициент теплопроводности воздуха пропорционален корню квадратному из абсолютной температуры. Т.е. показатель степени $z = \frac{1}{2}$. Важно также отметить, что теплопроводность не зависит от плотности (концентрации).

Экспериментальные данные показывают, что при температурах близких к комнатным показатель степени ближе к единице. Поэтому выбранная модель также имеет право на существование.

2.3 Используя формулу для потока теплоты, получаем, что поток теплоты через воздушную прослойку (в приближении постоянства теплопроводности) равен

$$\tilde{q}_a = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 4,80 \text{ Вт} \quad (17)$$

2.4 Так как теплопроводность воздуха возрастает с ростом температуры, то график температурного профиля будет выгнут вверх. Действительно, в тех местах, где теплопроводность больше, градиент температуры меньше.



2.5 Так как теплопроводность воздуха зависит от температуры, то она изменяется и при переходе от одной точки к другой. Поэтому закон теплопроводности Фурье следует записывать только для тонких слоев (т.е. в дифференциальной форме). Выразим зависимость теплопроводности от температуры посредством формулы

$$\lambda = \lambda_0 \frac{T}{T_0}. \quad (18)$$

И запишем уравнение Фурье для тонкого слоя воздуха Δx :

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0} \frac{\Delta T}{\Delta x} S. \quad (19)$$

Воспользуемся очевидной подсказкой и запишем

$$q\Delta x = \frac{\lambda_0 S}{2T_0} \Delta(T^2) \quad (20)$$

Теперь легко просуммировать по всем слоям:

$$ql = \frac{\lambda_0 S}{2T_0} (T_1^2 - T_0^2) \quad (21)$$

Откуда получаем окончательно для потока теплоты

$$q = \frac{\lambda_0 S}{2T_0 l} (T_1^2 - T_0^2). \quad (22)$$

Расчет дает следующее численное значение: $q_a = 4,98 \text{ Вт}$, что несколько больше, чем получено ранее в приближенном расчете.

2.6 Так как объем воздуха не изменяется, то все полученная теплота пойдет на увеличение внутренней энергии воздуха. В установившемся режиме теплопередачи температура будет изменяться от точки к точке, постоянным будет оставаться давление! Поэтому выразим внутреннюю энергию воздуха через его давление:

$$U = \frac{5}{2} R \nu T = \frac{5}{2} PV. \quad (23)$$

Следовательно, изменение внутренней энергии воздуха (и равное ему количество полученной теплоты) выражается через изменение давления

$$Q = \Delta U = \frac{5}{3} V \Delta P. \quad (24)$$

Таким образом, нам необходимо рассчитать установившееся давление. Для этого воспользуемся условием постоянства числа молекул воздуха. Для этого разобьем воздушную пластину на тонкие слои Δx_i . Концентрацию частиц в каждом слое можно выразить из уравнения состояния газа

$$n_i = \frac{P}{kT_i}. \quad (25)$$

Тогда общее число молекул можно получить, если просуммировать числа частиц во всех слоях

$$N = \sum_i \frac{PS}{kT_i} \Delta x_i. \quad (26)$$

Это же число можно выразить через начальные условия

$$N = \frac{P_0 S l}{kT_0}. \quad (27)$$

Таким образом, для определения давления получаем уравнение

$$P \sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0 l}{T_0}. \quad (28)$$

Прямое вычисление суммы требует расчета распределения температуры и последующего интегрирования. Можно поступить проще: выразим Δx_i из уравнения теплопроводности (19):

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0} \frac{\Delta T}{\Delta x} S \Rightarrow \Delta x_i = \lambda_0 \frac{T_i}{T_0} \frac{\Delta T_i}{q} S \quad (29)$$

И после подстановки получим

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \sum_i \frac{1}{T_i} \lambda_0 \frac{T_i}{T_0} \frac{\Delta T_i}{q} S = \frac{\lambda_0 S}{q T_0} \sum_i \Delta T_i = \frac{\lambda_0 S}{q T_0} (T_1 - T_0). \quad (30)$$

Подставим найденное выражение для потока теплоты (22)

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{\lambda_0 S}{q T_0} (T_1 - T_0) = \frac{\lambda_0 S}{\frac{\lambda_0 S}{2T_0 l} (T_1^2 - T_0^2) T_0} (T_1 - T_0) = \frac{2l}{(T_1 + T_0)}. \quad (31)$$

Теперь из уравнения (28) находим

$$P \sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0}{T_0} \Rightarrow P = P_0 \frac{T_1 + T_0}{2T_0} \quad (32)$$

Наконец, подставляем в формула для количества теплоты

$$Q = \frac{5}{2} V \Delta P = \frac{5}{2} P_0 V \left(\frac{T_1 + T_0}{2T_0} - 1 \right) = \frac{5}{4} P_0 V \frac{\Delta T}{T_0} \quad (33)$$

Численное значение поглощенной теплоты равно $Q = 915 \text{ Дж}$.

Задача 3 Опыты Ш. Кулона (Решение)

1. Свойства нити подвеса.

1.1 В описании Ш. Кулона приведена масса нити m , она легко выражается через объем и плотность серебра

$$m = \rho_{Ag} L \frac{\pi d^2}{4}. \quad (1)$$

Из этой формулы легко выразить диаметр нити:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}}. \quad (2)$$

При численных расчетах следует все параметры выразить в единицах системы СИ:

$$d = \sqrt{\frac{4m}{\pi \rho_{Ag} L}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 64,8 \cdot 10^{-6} \text{ кг}}{\pi \cdot 10,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 28 \cdot 2,707 \cdot 10^{-2} \text{ м}}} = 2,55 \cdot 10^{-5} \text{ м} \quad (3)$$

Менее трех сотых миллиметра!

1.2 Модуль кручения определяется по формуле

$$G = \frac{M}{\varphi} = \frac{Fr}{\varphi}. \quad (4)$$

Подстановка численных значений с переводом в систему СИ дает следующее значение

$$G = \frac{Fr}{\varphi} = \frac{1}{340} \cdot 64,8 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81 \text{ Н} \cdot 4 \cdot 2,707 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 8,055 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м} = 8,1 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (5)$$

2. Фундаментальный закон электричества.

2.1 Решение этой части задачи начнем с цитаты из использованного мемуара: «Расстояние между двумя шариками, когда они удалены друг от друга действием взаимного отталкивания, измеряется в точности не углом, который они образуют, а хордой дуги, которая соединяет их центры. Так же и плечо в крайнем положении, где проявляется действие, измеряется не половиной длины дуги, или радиусом, а косинусом половины угла...»

Вспользуемся подсказкой самого Шарля Кулона, рассмотрим условия равновесия коромысла крутильных весов. На рисунке показана геометрия опыта и направление силы взаимодействия между шариками \vec{F} . Из рисунка следует, что расстояние между шариками равно

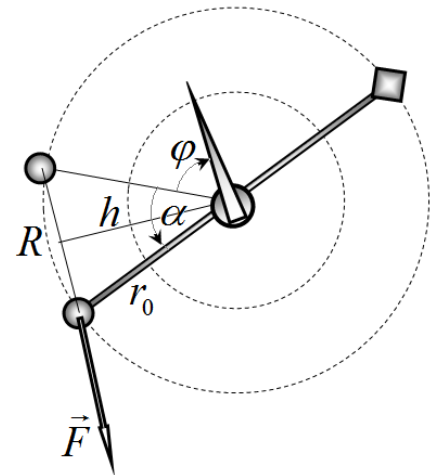
$$R = 2r_0 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Плечо силы взаимодействия

$$h = r_0 \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Угол закручивания нити

$$\varphi_{\Sigma} = \alpha + \varphi. \quad (8)$$



Условие равновесия коромысла весов имеет вид

$$G(\alpha + \varphi) = Fr_0 \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (9)$$

Следовательно, сила взаимодействия может быть рассчитана по формуле

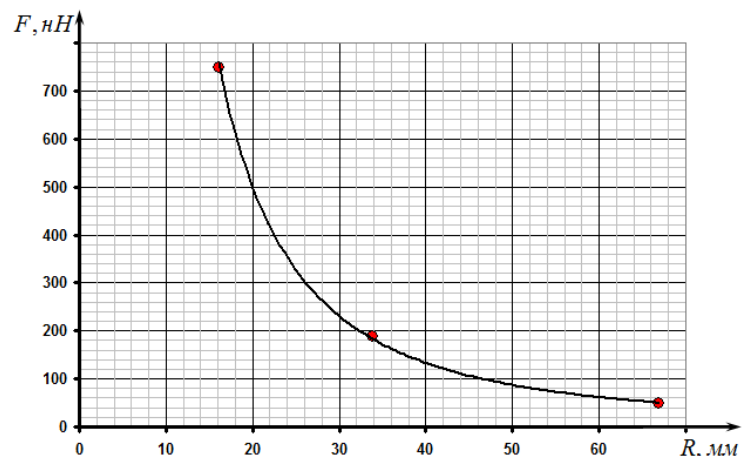
$$F = \frac{G(\alpha + \varphi)}{r_0 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (10)$$

Расстояние между шариками рассчитывается по формуле (6).

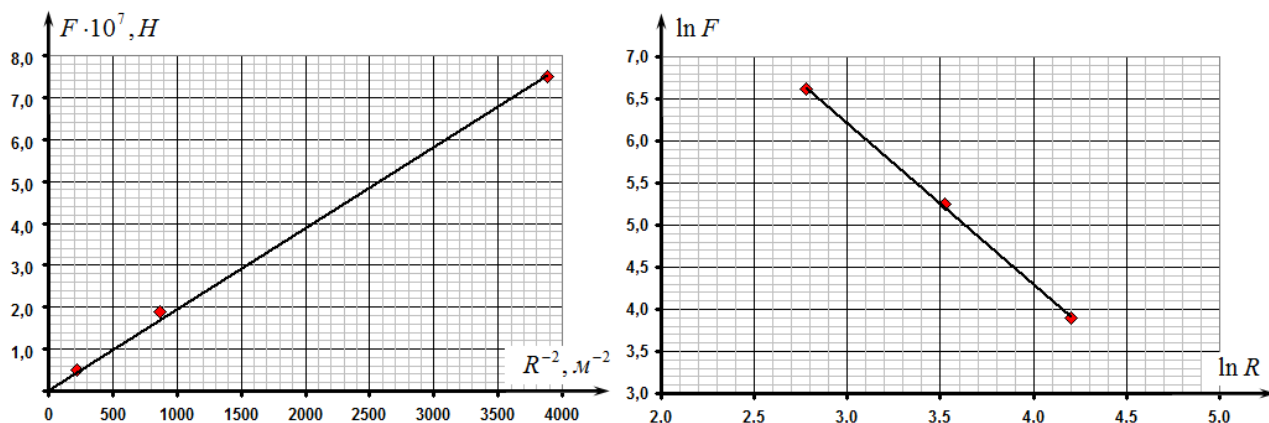
Результаты расчетов по этим формулам приведены в Таблице (1). График этой функции показан на рисунке.

Таблица 1. Расчет сил и расстояний.

N	α°	φ°	F , нН	R , мм
1	36	0	49,1	66,9
2	18	126	189,3	33,9
3	8,5	567	749,3	16,0



2.2 Для доказательства закона Кулона ($F = \frac{A}{R^2}$) следует провести линеаризацию зависимости силы от расстояния. Эту линеаризацию можно провести различными способами. например, построить зависимость $F(R^{-2})$. Наиболее предпочтительной линеаризацией является построение графика в логарифмическом масштабе $\ln F (\ln R)$. В этом случае коэффициент наклона будет равен показателю степени в зависимости $F = AR^n$. На рисунке приведены графики обеих линеаризованных зависимостей.



Действительно, коэффициент наклона в логарифмической зависимости примерно равен -1,9, что с учетом неизбежных погрешностей измерений можно принять равным -2.

Также видно, что зависимость $F(R^{-2})$ близка к линейной, поэтому эта зависимость также подтверждает закон Кулона.

2.3 В системе СИ закон Кулона имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2}.$$

С помощью этой формулы можно вычислить заряды шариков. Для повышения точности следует провести усреднение по трем результатам измерений. Один из возможных вариантов такого усреднения – использование зависимости $F(R^{-2})$. В этой зависимости коэффициент наклона равен

$$a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 1,94 \cdot 10^{-10} H \cdot m^2, \quad (11)$$

Откуда следует, что

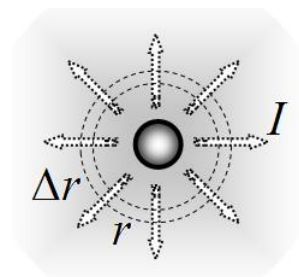
$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 a} = \sqrt{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,94 \cdot 10^{-10}} = 1,5 \cdot 10^{-10} Кл. \quad (12)$$

3. Утечка заряда.

Понятно, что уменьшение угла отклонения связано с утечкой зарядов с шариков. Поэтому в данной части задачи необходимо найти ответы на два вопроса: первый, как зависит заряд шарика от времени; второй – как связано изменение угла отклонения с изменением заряда.

Можно считать, что шарик находится в однородной слабопроводящей среде, а электрический ток протекает от шарика до бесконечности.

В этом случае разность потенциалов равна потенциалу шарика



$$\Delta\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \quad (13)$$

Здесь обозначено b - радиус шарика (чтобы не путать с R - так мы обозначим сопротивление среды).

Для расчета сопротивления среды ее следует разделить на тонкие сферические слои. Сопротивление отдельного слоя радиуса r и толщины Δr равно

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta r}{4\pi r^2}. \quad (14)$$

Так как радиально растекающийся ток протекает последовательно через слои, то общее сопротивление равно сумме сопротивлений всех слоев

$$R = \sum_i \rho \frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2}. \quad (15)$$

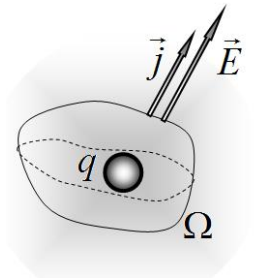
Для выполнения суммирования (точнее интегрирования) можно сослаться на традиционный способ вычисления потенциала поля, создаваемого точечным источником – здесь сумма имеет тот же вид, поэтому

$$R = \sum_i \rho \frac{\Delta r_i}{4\pi r_i^2} = \frac{\rho}{4\pi b}. \quad (16)$$

Таким образом, находим, что сила тока утечки равна

$$I = \frac{\Delta\phi}{R} = \frac{q}{\rho\epsilon_0}. \quad (17)$$

Примечание. Этот же результат можно получить более изящным способом, используя теорему Гаусса. Мысленно окружим один из шариков произвольной замкнутой поверхностью Ω . Сила тока, стекающего с шарика равна потоку вектора плотности тока \vec{j} через эту поверхность $I = \Phi_j$. По закону Ома в дифференциальной форме плотность тока связана с напряженностью электрического поля соотношением $\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$. Поэтому поток вектора



плотности тока связан с потоком вектора напряженности таким же соотношением: $\Phi_j = \frac{1}{\rho}\Phi_E$.

Поток вектора напряженности поля определяется теоремой Гаусса $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$. Окончательно

получаем $I = \Phi_j = \frac{1}{\rho}\Phi_E = \frac{q}{\rho\epsilon_0}$. Полученное соотношение перепишем в виде

$$I = \frac{q}{\rho\epsilon_0} = -\frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta q}{q} = -\frac{1}{\rho\epsilon_0}\Delta t. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь, как связано угла смещения шарика с изменением зарядов на шариках. Сила взаимодействия выражается через угол смещения α посредством соотношения (10). Используя закон Кулона, можем записать

$$F = \frac{G(\alpha + \varphi)}{r_0 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\left(2r_0 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} \Rightarrow q^2 = B \frac{(\alpha + \varphi) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (19)$$

где B - некоторая постоянная величина. Эта формула выражает связь между углом смещения

и зарядами шариков. Обозначим функцию $f(\alpha) = \frac{(\alpha + \varphi) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. Изменение заряда

определяется изменением этой функции. По-видимому, в данном случае проще провести численные расчеты изменения этой функции $\Delta f = f(\alpha - \Delta\alpha) - f(\alpha)$, хотя можно воспользоваться и приближенными формулами (вычислением производных). Учитывая, что изменения заряда мало, запишем

$$\begin{aligned} q^2 &= Bf(\alpha) \Rightarrow \\ 2q\Delta q &= B\Delta f \Rightarrow \frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f(\alpha)} \end{aligned} \quad (20)$$

Численный расчет относительного изменения заряда (при $\alpha = 30^\circ$, $\Delta\alpha = -1^\circ$, $\varphi = 50^\circ$) дает значение:

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f(\alpha)} = -0,039, \quad (21)$$

Примечание. Для оценки можно приближенно считать, что расстояние между шариками равно длине дуги между ними $r_0\alpha$, а плечо силы равно r_0 . Тогда условие равновесия примет вид

$$G(\alpha + \varphi) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2 \alpha^2} r_0 \alpha.$$

Тогда проводя аналогичные (20) преобразования, получим

$$\begin{aligned} q^2 &= B_1\alpha(\alpha + \varphi) \Rightarrow \\ 2q\Delta q &= B_1(2\alpha + \varphi)\Delta\alpha \Rightarrow \frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2} \frac{2\alpha + \varphi}{\alpha(\alpha + \varphi)} \Delta\alpha = -0,023. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь вернемся к формуле (18), из которой можно выразить искомое удельное сопротивление воздуха

$$\rho = -\frac{\Delta t}{\epsilon_0 \left(\frac{\Delta q}{q} \right)} = \frac{3 \cdot 60}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,039} \approx 5,2 \cdot 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{м}. \quad (23)$$

Задание 11-1. Шарик на спице.

Задача 1. 1 шарик.

1.1 Проще всего найти зависимость скорости шарика от угла отклонения с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl \sin \alpha \Rightarrow v = \sqrt{2gl \sin \alpha}. \quad (1)$$

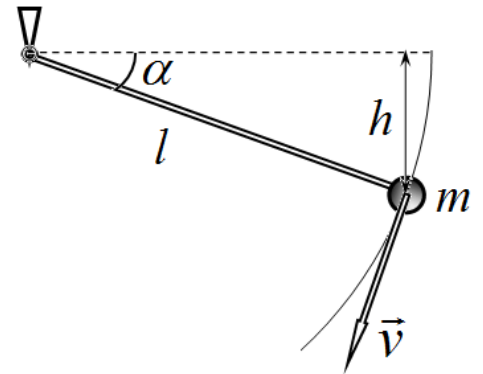


Рис. 1

1.2 Так как стержень жесткий, то в нем возможны силы, направленные перпендикулярно стержню. Поэтому, прежде всего, следует рассмотреть наличие такой нормальной силы \vec{N} действующей на шарик. Для нахождения неизвестных сил можно использовать 2 закон Ньютона. Так как мы нашли зависимость скорости от угла поворота, то не составляет труда найти тангенциальное ускорение шарика (т.е. проекцию этого ускорения на вектор скорости). Для этого достаточно вычислить производную от вектора скорости

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{dv}{d\alpha} = \frac{v}{l} \frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{2l} \frac{d(v^2)}{d\alpha}$$

При выводе этого соотношения использовано правило вычисления производной от сложной функции. Так как $v^2 = 2gl \sin \alpha$, то

$$a_\tau = \frac{1}{2l} \frac{d(v^2)}{d\alpha} = g \cos \alpha \quad (2)$$

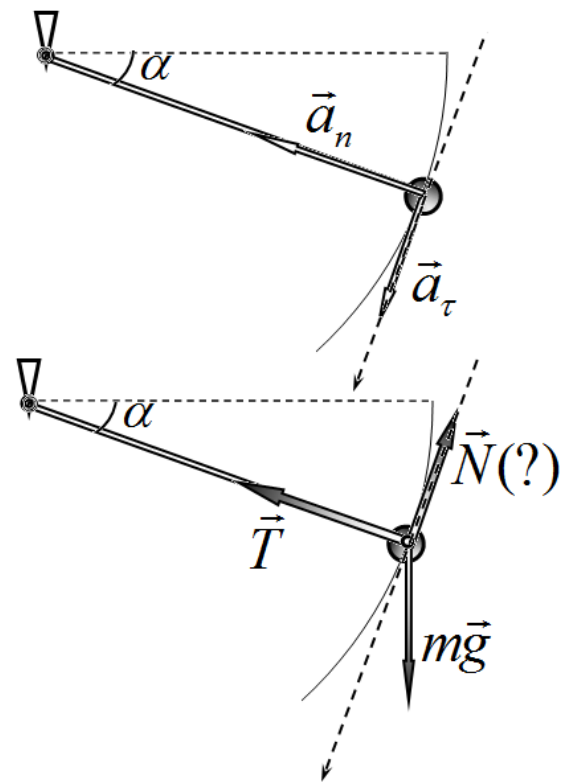


Рис.2

Примечание. Величину тангенциального ускорения можно найти и из простого кинематического соотношения

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \quad (3)$$

Рассматривая малое смещение шарика на угол $\Delta\alpha$, и пренебрегая изменением ускорения на этом участке можно считать, что путь, пройденный шариком, равен $S = l\Delta\alpha$. Тогда из формулы (3) следует, что $a_\tau = \frac{\Delta(v^2)}{2l\Delta\alpha}$.

Запишем уравнение 2 закона Ньютона для шарика в проекции на вектор скорости

$$ma_\tau = mg \cos \alpha - N \quad (4)$$

Из этого уравнения с учетом найденного ускорения (2) следует, что в данном случае нормальная составляющая силы реакции отсутствует $N = 0$.

Таким образом, мы показали, что сила, действующая на шарик со стороны стержня, направлена вдоль стержня. Для ее определения запишем уравнение 2 закона Ньютона для шарика в проекции на направление стержня:

$$ma_n = T - mg \sin \alpha \quad (5)$$

В данном уравнении проекция ускорения перпендикулярна вектору скорости, поэтому это есть нормальное ускорения, которое, как известно, определяется по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{l} = 2g \sin \alpha \quad (6)$$

Здесь опять использовано выражение для величины модуля скорости (1).

Из формул (5)-(6) следует, что

$$T = 3mg \sin \alpha . \quad (7)$$

1.3 Проекция ускорения можно найти различными способами. Мы используем разложение вектора ускорения на тангенциальную и нормальную составляющие, которые уже найдены. Из рис. 3 следует, что проекции ускорения на указанные оси координат равны

$$\begin{aligned} a_x &= -a_n \cos \alpha - a_\tau \sin \alpha \\ a_y &= -a_n \sin \alpha + a_\tau \cos \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

Используя найденные значения тангенциального (2) и нормального (6) ускорений, получим

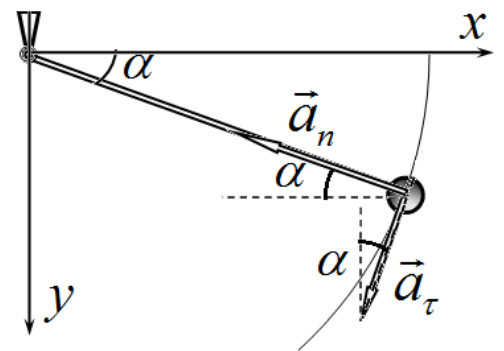


Рис. 3

$$a_x = -a_n \cos \alpha - a_\tau \sin \alpha = -2g \sin \alpha \cos \alpha - g \cos \alpha \sin \alpha = -3g \sin \alpha \cos \alpha \quad (8)$$

$$a_y = -a_n \sin \alpha + a_\tau \cos \alpha = -2g \sin \alpha \sin \alpha + g \cos \alpha \cos \alpha = -2g \sin^2 \alpha + g \cos^2 \alpha$$

Эти же выражения можно получить из уравнений 2 закона Ньютона в проекциях на оси координат.

1.4 Фактически функции (8) определяют уравнение годографа вектора ускорения в параметрической форме. Однако, предадим этим функциям несколько иной вид, используя тригонометрические формулы двойного угла:

$$a_x = -3g \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2} g \sin 2\alpha . \quad (9)$$

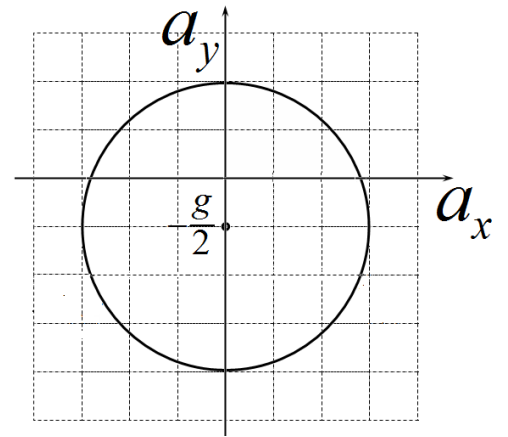
$$a_y = -2g \sin^2 \alpha + g \cos^2 \alpha = g - 3g \sin^2 \alpha = g - 3g \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{3}{2} g \cos 2\alpha - \frac{1}{2} g . \quad (10)$$

Теперь не сложно заметить, что эти уравнения задают окружность:

$$a_x^2 + \left(a_y + \frac{1}{2} g \right)^2 = \left(\frac{3}{2} g \right)^2 \quad (11)$$

Эта окружность показана и является годографом вектора ускорения.

Она показана на рис. 4. Отметим, что угол α изменяется в пределах от 0 до π , поэтому конец вектора ускорения описывает полную окружность.



1.5 Центр окружности смещен вдоль оси a_y на величину $\frac{g}{2}$, радиус окружности равен $\frac{3}{2}g$.

Следовательно, в системе отсчета, движущейся вниз с постоянным ускорением $\frac{g}{2}$, модуль ускорения будет постоянным и равным $\frac{3}{2}g$.

Задача 2. 2 шарика

2.1 Так как стержень жесткий, то шарики будут двигаться с одинаковыми угловыми скоростями ω . Поэтому скорости шариков будут равны

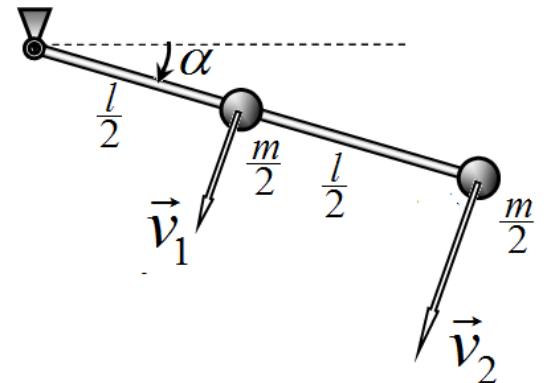
$$v_1 = \omega \frac{l}{2}, \quad v_2 = \omega l. \quad (12)$$

Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемой системы

$$\frac{1}{2} \frac{m}{2} \omega^2 l^2 \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{m}{2} gl \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \sin \alpha \quad (13)$$

Из этого уравнения следует, что угловая скорость вращения стержня зависит от угла отклонения по закону

$$\omega = \sqrt{\frac{12g}{5l} \sin \alpha}. \quad (14)$$



2.2 Для расчета ускорения воспользуемся кинематическим соотношением (3), которое применим для малого начального смещения на малый угол α . Для крайнего шарика запишем

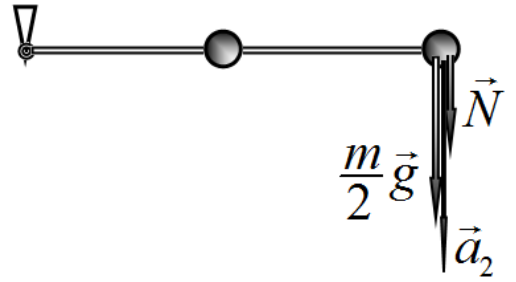
$$l\alpha = \frac{v^2(\alpha)}{2a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{\frac{12g}{5l} \sin \alpha \cdot l^2}{2l\alpha} = \frac{6}{5}g \quad (15)$$

Аналогично для первого шарика

$$\frac{l}{2}\alpha = \frac{v^2(\alpha)}{2a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{12g}{5l} \sin \alpha \cdot \frac{l^2}{4}}{2 \cdot \frac{l}{2} \alpha} = \frac{3}{5}g \quad (16)$$

Впрочем, очевидно, что ускорение первого шарика в два раза меньше. Отметим, что эти выражения могут быть получены прямым дифференцированием функции (14) с последующим переходом от углового ускорения стержня к линейным ускорениям шариков.

2.3 Обратим внимание, что в начальный момент времени ускорение крайнего шарика превышает ускорение свободного падения! Следовательно, со стороны стержня на шарик действует сила, направленная вертикально вниз. Силы реакции направленной вдоль стержня в данном положении нет, так как скорость шарика равна нулю. Записывая уравнение 2 закона Ньютона для крайнего шарика, получим



$$\frac{m}{2}a_2 = \frac{m}{2}g + N \Rightarrow N = \frac{m}{2}(a_2 - g) = \frac{mg}{10}. \quad (17)$$

Таким образом, в данной конфигурации внутри стержня возникают силы упругости, направленные перпендикулярно стержню.

Задача n . n шариков.

Решение этой задачи полностью аналогично решению предыдущей. Поэтому можно сократить комментарии к решению.

3.1 Записываем закон сохранения энергии

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{m}{n} l^2 \omega^2 \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left(\frac{3}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right) &= \frac{m}{n} gl \left(\left(\frac{1}{n} \right) + \left(\frac{2}{n} \right) + \left(\frac{3}{n} \right) + \dots + \left(\frac{n}{n} \right) \right) \sin \alpha \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{l^2 \omega^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{gl}{n} \sin \alpha \sum_{k=1}^n k \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{l^2 \omega^2}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{gl}{n} \sin \alpha \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

Так как по условию $n \gg 1$, то в формулах для сумм можно оставить только высшие степени, поэтому получим

$$\frac{1}{2} \frac{l^2 \omega^2}{n^2} \frac{n^3}{3} = \frac{gl}{n} \frac{n^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{3 \frac{g}{l} \sin \alpha} \quad (19)$$

Это же выражение можно получить гораздо проще из уравнения динамики вращательного движения.

3.2 Ускорение k – того шарика рассчитываем по прежней методике

$$\left(\frac{l}{n} k \right) \alpha = \frac{v_k^2(\alpha)}{2a_k} \Rightarrow a_k = \frac{3 \frac{g}{l} \sin \alpha \cdot \left(\frac{l}{n} k \right)^2}{2 \left(\frac{l}{n} k \right) \alpha} = \frac{3}{2} g \frac{k}{n}. \quad (20)$$

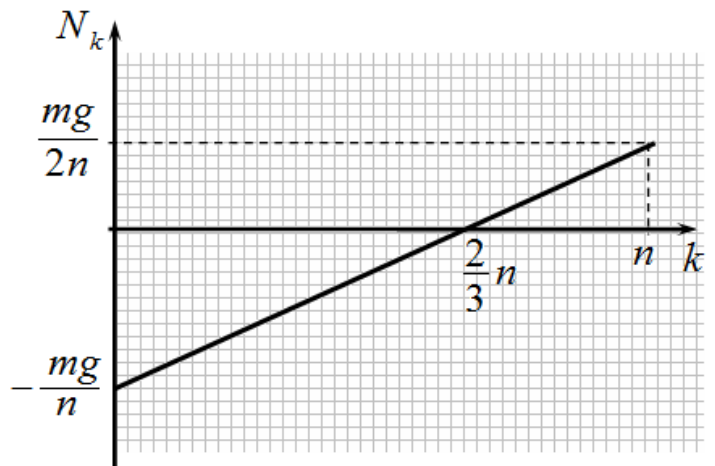
3.3 Так как ускорения шариков в начальный момент времени отличаются от ускорения свободного падения, то на эти шарик со стороны стержня действуют силы реакции направленные вертикально (положительное направление – вниз). Их величины также находим из уравнения 2 закона Ньютона

$$\frac{m}{n} a_k = \frac{m}{n} g + N_k \Rightarrow N_k = \frac{m}{n} g \left(\frac{3}{2} \frac{k}{n} - 1 \right) \quad (21)$$

Как следует из полученной формулы при $\frac{k}{n} < \frac{2}{3}$ эти силы направлены вверх, далее – вниз.

На рисунке показана зависимость этих сил от номера шарика.

3.4 Природа этих сил – силы упругости, возникающие при малой деформации стержня.



3.5 Как было показано в этой задаче, при ускоренном вращательном движении массивного стержня в нем возникают силы упругости, направленные поперек стержня. Следовательно, такие же силы возникают и при падении трубы. Они-то ее и ломают!

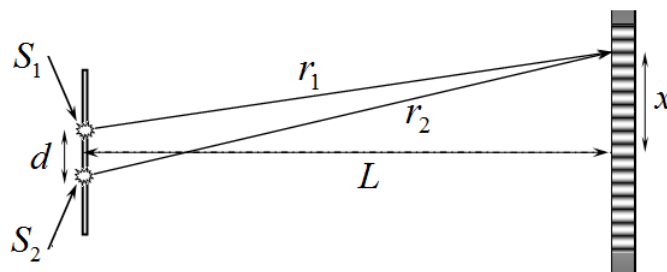
В последней части задачи показано, что направление поперечных сил меняется на противоположное на одной трети длины стержня, поэтому, скорее всего на этом же расстоянии и происходит разлом.

Задача 11- 2. Опыт Физо

Часть 1. Воспоминание об интерференции

Решение этой части задачи традиционное, оно изложено практически во всех учебниках физики. Поэтому ограничимся кратким изложением этого решения, с выделением деталей, существенных при описании экспериментов И. Физо.

1.1 В схеме Юнга интерферируют волны, идущие от двух источников S_1 и S_2 . В точке экрана с координатой x (измеренной от оси симметрии системы) интенсивность будет максимальной, если разность хода от источников до точки наблюдения равна целому числу длин волн, т.е.



$$r_2 - r_1 = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (1)$$

Для расчета этой разности запишем на основании теоремы Пифагора

$$r_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \quad (2)$$

$$r_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Вычтем второе равенство из первого

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2xd \quad (3)$$

Так как значения r_2, r_1 мало отличаются от расстояния L , которое значительно больше как расстояния между отверстиями d , так и длины волны λ , можно положить $(r_2 + r_1) \approx 2L$. Поэтому разность расстояний описывается формулой

$$(r_2 - r_1) = \frac{xd}{L} \quad (3)$$

Использование условия максимумов интерференции (1) позволят найти координаты точек максимальной интенсивности:

$$\frac{x_m d}{L} = m\lambda \Rightarrow x_m = m \frac{\lambda L}{d}. \quad (4)$$

Расстояние между соседними максимумами (т.е. ширина полосы) равно

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda L}{d}. \quad (5)$$

Подстановка численных значений дает результат

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = \frac{0,55 \cdot 10^{-6} \cdot 2,0}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,1 \text{ мм} \quad (6)$$

1.2 Самый простой способ решения этой части задачи можно найти, используя следующие простые (но общие для любой интерференционной схемы) рассуждения. Переход от одной интерференционной полосы к следующей соответствует увеличению разности хода на одну длину волны! Поэтому если оптическая длина пути в одном из каналов увеличивается на одну длину волны, то интерференционная картина смещается на одну полосу!

Сделаем еще одно замечание, касающееся понятия оптической длины пути. В теории интерференции основную роль играет разность фаз между интерферирующими волнами. Эта разность фаз зависит от длины волны, а именно изменение расстояния на одну длину волны приводит к изменению фазы на 2π . Поэтому для изменения фазы можно записать соотношение

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda}. \quad (7)$$

Если свет распространяется в среде с показателем преломления n , то длина волны уменьшается в n раз, поэтому изменение фазы при распространении света в среде будет равно

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{(\lambda_0/n)} = 2\pi \frac{n\Delta r}{\lambda_0}. \quad (8)$$

где λ_0 - длина волны в вакууме.

При подобных расчетах удобно считать, что длина волны остается неизменной и равной λ_0 , а увеличивается длина пути. Именно в этом смысл введения такого понятия, как оптическая длина пути $l = n\Delta r$.

Теперь совсем просто найти смещение интерференционной картины при наличии стеклянной пластинки. Пластинка увеличивает оптическую длину пути для волн от верхнего источника на величину

$$\Delta l = (n-1)h. \quad (9)$$

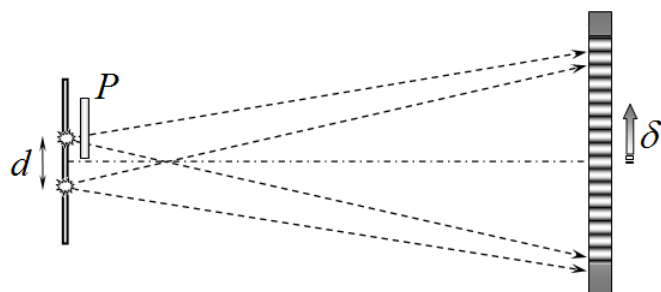
Если это увеличение разделить на длину волны (в вакууме!), то получим величину смещения интерференционной картины в единицах ширины полосы, т.е.

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{\delta}{\Delta x} = \Delta m \quad (9)$$

В рассматриваемой задаче это смещение равно

$$\Delta m = \frac{(n-1)h}{\lambda} = \frac{(1,6-1) \cdot 5,0 \cdot 10^{-6}}{0,55 \cdot 10^{-6}} \approx 5,5. \quad (10)$$

Таким образом, интерференционная картина сместится на пять с половиной полос вверх.



Часть 2. Эксперимент И. Физо – скорость света в движущейся воде.

2.1 Скорость света в неподвижной воде в n раз меньше скорости света в вакууме

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1,33} = 2,26 \cdot 10^8 \frac{м}{с}. \quad (11)$$

2.2 В рамках гипотезы неподвижного эфира движение воды не влияет на скорость света, поэтому

$$v = \frac{c}{n}. \quad (12)$$

2.3 Если справедлива гипотеза полного увлечения эфира, то

$$v = \frac{c}{n} + V. \quad (13)$$

2.4 В общем случае следует записать

$$v = \frac{c}{n} + \gamma V. \quad (14)$$

При неподвижном эфире $\gamma = 0$, при полном увлечении $\gamma = 1$.

2.5 В данном эксперименте сдвиг интерференционных полос обусловлен изменением скорости света при изменении скорости течения воды, в результате чего изменяется длина волны света. Рассчитаем изменение длины волны в общем случае частичного увлечения эфира. Так как частота и период колебаний остаются неизменными, можно записать:

Для длины волны ($\lambda_{(\pm)}$ - длины волн при движении «по и против» течения воды):

$$\frac{\lambda_0}{c} = \frac{\lambda_{(\pm)}}{\frac{c}{n} \pm \gamma V} \Rightarrow \lambda_{(\pm)} = \lambda_0 \frac{\frac{c}{n} \pm \gamma V}{c} \quad (15)$$

Для изменения разности хода в каждой трубе в единицах длин волн получим

$$\frac{L}{\lambda_{(\pm)}} = \frac{L}{\frac{c}{n} \pm \gamma V} = \frac{L}{\lambda_0} \cdot \frac{c}{\frac{c}{n} \pm \gamma V} = \frac{L}{\lambda_0} \frac{n}{1 \pm n\gamma \frac{V}{c}} \quad (16)$$

Теперь учтем, что $V \ll c$, поэтому можно это выражение упростить:

$$\frac{L}{\lambda_{(\pm)}} = \frac{L}{\lambda_0} \frac{n}{1 \pm n\gamma \frac{V}{c}} = \frac{Ln}{\lambda_0} \left(1 \mp n\gamma \frac{V}{c} \right) \quad (17)$$

Итак, при движении воды между волнами, распространяющимися в противоположных направлениях, возникает разность хода (и равный ей сдвиг полос)

$$\Delta m_1 = \frac{L}{\lambda_{(-)}} - \frac{L}{\lambda_{(+)}} = 2 \frac{Ln^2}{\lambda_0} \gamma \frac{V}{c}. \quad (18)$$

Так как свет проходит две трубы, то окончательное значение сдвига будет еще в два раза больше

$$\Delta m = 4 \frac{Ln^2}{\lambda_0} \gamma \frac{V}{c}. \quad (19)$$

Подставим численные значения и рассчитаем

$$\Delta m = 4 \frac{Ln^2}{\lambda_0} \gamma \frac{V}{c} = 4 \frac{1,49 \cdot 1,33^2}{526 \cdot 10^{-9}} \cdot \frac{7,06}{3,00 \cdot 10^8} \gamma = 0,472 \gamma. \quad (20)$$

Таким образом, при полном увлечении эфира сдвиг полос должен составить 0,478 ширины интерференционной полосы.

В результате измерений И. Физо получил значение сдвига

$$\Delta m_{\text{exp}} = \frac{1,2}{5} \approx 0,24, \quad (21)$$

что почти в 2 раза меньше теоретического сдвига.

2.6 Для объяснение наблюдаемого сдвига следует предположить, что коэффициент увлечения эфира водой равен

$$\gamma = \frac{0,24}{0,47} \approx 0,51 \quad (22)$$

Часть 3. Но эфира то нет!

3.1 Используя формулу для сложения скоростей в СТО для скорости света в движущейся среде получим

$$v = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{n}{c^2} \cdot V} = \frac{c}{n} \frac{1 + n \frac{V}{c}}{1 + \frac{1}{n} \frac{V}{c}} \approx \frac{c}{n} \left(1 + n \frac{V}{c} - \frac{1}{n} \frac{V}{c} \right) = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) V. \quad (23)$$

3.2 Из формулы (23) следует, что коэффициент увлечения связан с показателем преломления соотношением

$$\gamma = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (24)$$

Его численное значение для воды равно

$$\gamma = 1 - \frac{1}{1,33^2} = 0,435. \quad (25)$$

Это значение близко к значению, найденному экспериментально.

3.3 При рассчитанном значении коэффициента увлечения сдвиг полос должен быть равен $\Delta m = 0,472 \gamma \approx 0,205$, что несколько меньше полученного экспериментально. Основной причиной такого расхождения является метод измерения скорости жидкости. Использованное значение скорости является средней скоростью по площади поперечного сечения труб. В действительности свет проходил вблизи оси трубы, где скорость течения больше, чем среднее по сечению значение. В результате чего реальный сдвиг оказался немного больше рассчитанного. Это повлияло и на значение коэффициента увлечения.

Задача 11-3. Давление света. (Решение)

1. Свойства электромагнитных волн.

1.1 В условии задачи подсказано, что средние плотности энергии электрического и магнитного полей волны равны. Поэтому вычислим усредненные значения плотностей этих энергий. Мгновенное значение плотности энергии электрического поля описывается функцией

$$w_E(t) = \frac{\epsilon_0}{2} (E(t))^2 = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2 \omega t \quad (1)$$

Усреднение по промежутку времени, значительно превышающему период световых колебаний, дает

$$\langle w_E \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}. \quad (2)$$

При выводе учтено, что среднее значение квадрата косинуса равно $\langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{2}$.

Аналогичные рассуждения дают аналогичный результат:

$$\langle w_B \rangle = \left\langle \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{B_0^2}{4\mu_0}. \quad (3)$$

Из равенства этих величин следует очень простое и красиво соотношение между амплитудами полей

$$\frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} B_0 = c B_0. \quad (4)$$

1.2 Рассмотрим небольшую прямоугольную площадку площади ΔS на которую нормально падает электромагнитная волна. На этой площадке, как на основании построим параллелепипед длиной $c\Delta t$. Вся энергия волны, заключенная в этом параллелепипеде за время Δt успеет проскочить через выделенную площадку. Поэтому за время Δt через площадку пройдет энергия равная

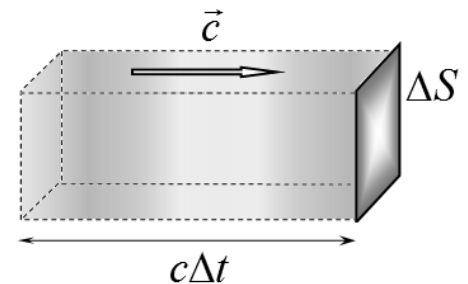
$$\Delta W = (w_E + w_B) \Delta S \cdot c \Delta t. \quad (5)$$

Усредняя по времени, получим $\Delta W = \langle w_E + w_B \rangle \Delta S \cdot c \Delta t$. Тогда интенсивность волны (по определению) будет равна

$$I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = c \langle w_E + w_B \rangle. \quad (6)$$

Принимая во внимание полученные выражения для средних плотностей энергии электрического и магнитного полей, получим выражение для интенсивности волны:

$$I = c \langle w_E + w_B \rangle = 2c \langle w_E \rangle = c \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (7)$$



2. Движение электронов в металле и их электрическое сопротивление.

2.1 Считайте, что каждый атом меди отдает один электрон в облако свободных электронов.

Молярная масса меди $M_{Cu} = 63,5 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, плотность меди $\rho_{Cu} = 8,92 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, постоянная

Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

2.1 Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов в меди, которая рассчитывается элементарно:

$$n = \frac{\rho_{Cu}}{m_{Cu}} = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}} N_A = \frac{8,92 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{63,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} = 8,46 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}. \quad (8)$$

2.2 Напряженность электрического поля внутри металла равна нулю, так как внешнее поле компенсируется полем индуцированных зарядов. В данном случае индуцированные заряды локализуются на поверхности пластинки, поэтому поверхностная плотность индуцированных зарядов связана с напряженностью создаваемого поля следующим соотношением

$$\sigma = \varepsilon_0 E \quad (9)$$

Здесь E - напряженность внешнего поля и она же напряженность поля индуцированных зарядов. Если площадь части пластинки равна S , то число электронов, находящихся на этой площадке равно $N' = \frac{\sigma S}{e}$ (e - заряд электрона), в то время как общее число свободных электронов в пластинке $N = nSh$. Таким образом, доля электронов, которые под действием внешнего поля переместились на поверхность, равна

$$\eta = \frac{N'}{N} = \frac{\sigma}{enh} = \frac{\varepsilon_0 E}{enh}. \quad (10)$$

Подставляя численные значения параметров этой формулы (заметим, что $E = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}} = 3,0 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$), получим

$$\eta = \frac{\varepsilon_0 E}{enh} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,0 \cdot 10^6}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 8,46 \cdot 10^{28} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} = 2,0 \cdot 10^{-13}. \quad (10)$$

Очень маленькая доля!

2.3 При установившемся значении силы тока электроны движутся с постоянной скоростью (конечно, в среднем), в этом случае сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, уравновешивается силой сопротивления

$$eE = \beta v. \quad (11)$$

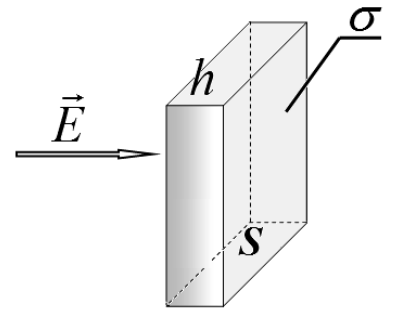
Отсюда следует, что средняя скорость движения электронов равна

$$v = \frac{eE}{\beta}. \quad (12)$$

Тогда плотность тока равна

$$j = env = \frac{e^2 n}{\beta} E. \quad (13)$$

Эта формула выражает закон Ома в дифференциальной форме, который традиционно записывается в виде



$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (14)$$

Сравнивая эти выражения, находим, что искомый и не совсем понятный коэффициент может быть рассчитан по вполне измеряемым параметрам

$$\beta = \frac{\rho}{ne^2}. \quad (15)$$

3. Давление света на поверхность металла.

3.1 Уравнение движение свободного электрона по второму закону Ньютона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t. \quad (16)$$

m - масса электрона, a - его ускорение.

Из этого уравнения следует, что скорость электрона зависит от времени по закону

$$v(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \quad (17)$$

Вектор скорости лежит в той же плоскости, что и вектор напряженности электрического поля.

3.2 Так как вектор скорости электрона и вектор индукции магнитного поля взаимно перпендикулярны, сила Лоренца равна произведению модулей этих векторов, т.е.

$$F_{\text{Л}} = evB = e \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t \cdot B_0 \cos \omega t. \quad (18)$$

Среднее по времени значение этой силы равно нулю, так как $\langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$

Итак, в этом случае

$$\langle F_{\text{Л}} \rangle = 0. \quad (19)$$

3.3 При наличии силы сопротивления уравнение движение электрона имеет вид

$$ma = eE_0 \cos \omega t - \beta v. \quad (20)$$

Используя подсказку, запишем

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (21)$$

Ускорение электрона находим, вычисляя производную от этой функции

$$a = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (22)$$

Подставим эти функции в уравнение (20)

$$-C_1 m \omega \sin \omega t + C_2 m \omega \cos \omega t = eE_0 \cos \omega t - C_1 \beta \cos \omega t - C_2 \beta \sin \omega t. \quad (23)$$

Так как это выражение должно быть справедливым в любой момент времени, можно приравнять коэффициенты, стоящие «при синусах и косинусах», в результате чего получаем систему уравнений для определения коэффициентов функции (21)

$$\begin{cases} -C_1 m \omega = -C_2 \beta \\ C_2 m \omega = eE_0 - C_1 \beta \end{cases}. \quad (24)$$

Решение этой системы элементарно:

$$C_2 = eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2}; \quad C_1 = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (25)$$

Подставляя эти выражение в функцию (21), получим искомую функцию

$$v(t) = eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t. \quad (26)$$

3.4 Так как в выражении для скорости присутствует слагаемое изменяющееся по закону косинуса, среднее значение силы Лоренца, действующее на один электрон, оказывается отличным от нуля. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle F_{\perp}^{(1)} \rangle &= \langle evB \rangle = \left\langle e \left(eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t \right) B_0 \cos \omega t \right\rangle = \\ &= e^2 \frac{E_0 B_0}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} = e^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Легко показать, что эта сила направлена по направлению распространения волны.

3.5 Так как в пластинке содержится $N = nhS$ электронов, то суммарная средняя сила, действующая на пластинку оказывается равной

$$\langle F_{\perp} \rangle = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (28)$$

3.6 Поглощение волны происходит только потому, что на электроны действует тормозящая сила (равносильно – потому, что есть электрическое сопротивление). Мощность поглощенной одним электроном энергии есть мощность силы сопротивления

$$p^{(1)} = F_{\text{сопр.}} v = \beta v^2 \quad (29)$$

Проводя усреднение по времени, получим

$$\begin{aligned} \langle p_1 \rangle &= \langle \beta v^2 \rangle = \left\langle \beta \left(eE_0 \frac{m\omega}{(m\omega)^2 + \beta^2} \cos \omega t + eE_0 \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \sin \omega t \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (28)$$

При выводе учтено, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \cos \omega t \cdot \sin \omega t \rangle = 0$

Мощность энергии, поглощенной всеми электронами равна

$$P_{\text{ногл}} = N \langle p_1 \rangle = nhS \frac{(eE_0)^2}{2} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (29)$$

Мощность энергии падающей на пластинку равна

$$P_{\text{пад.}} = IS = I = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S. \quad (30)$$

Следовательно, коэффициент поглощения волны равен

$$K = \frac{P_{\text{ногл}}}{P_{\text{пад.}}} = \frac{nh e^2}{c \varepsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (31)$$

3.7 Давление света равно отношению силы (28) к площади пластинки

$$p = \frac{\langle F_{\perp}^{(1)} \rangle}{S} = nhe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2}. \quad (32)$$

Поэтому осталось выразить эту формулу через интенсивность падающей волны и коэффициент поглощения, что делается достаточно просто: просто переставим слагаемые в формуле (28)

$$p = \frac{\langle F_{\perp}^{(1)} \rangle}{S} = nhSe^2 \frac{E_0^2}{2c} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} = \left(\frac{nhSe^2}{c \varepsilon_0} \frac{\beta}{(m\omega)^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c \right) \frac{1}{c} = K \frac{I}{c}. \quad (33)$$

Заметим, что в точности такое же выражение для давления света следует и из квантовой теории.