

Условие

Задача 2. Песочные часы.

Из небольшого отверстия в песочных часах высыпается N песчинок в секунду с малой начальной скоростью v_0 ($v_0 \ll \sqrt{2gL}$). Площадь песчаной струйки можно считать постоянной и равной S , общая высота падающей струи равна L . Найдите зависимость концентрации песчинок в струе в зависимости от расстояния до отверстия. Чему равна масса песка, находящегося в воздухе, если масса одной песчинки равна m_0 ? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

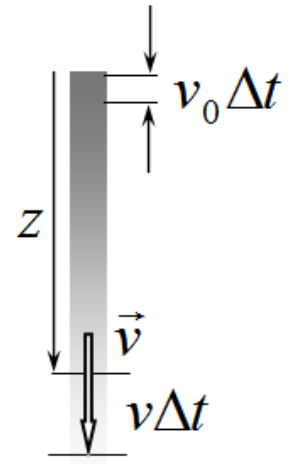


Решение

Задача 2. Песочные часы.

Число песчинок, пересекающих любое поперечное сечение струи (на любой высоте) в единицу времени, остается постоянным.

Рассмотрим малый промежуток времени Δt , настолько малый, что на этом промежутке можно пренебречь изменением скорости песчинок. За это время песчинки, находящиеся на расстоянии $v\Delta t$ выбранного поперечного сечения струи успеют пролететь через это сечение. Это число можно выразить через концентрацию песчинок n на выбранной высоте следующим образом



$$\Delta N = nSv\Delta t \quad (1)$$

С другой стороны это же число равно числу песчинок высыпавшихся из отверстия

$$\Delta N = N\Delta t \quad (2)$$

Из этих выражений следует, что концентрация песчинок на высоте z от отверстия описывается формулой

$$n = \frac{N}{Sv(z)}, \quad (3)$$

Где $v(z)$ - скорость песчинок на расстоянии z от отверстия. Зависимость скорости от координаты может быть найдена различными способами, например, с использованием кинематической формулы

$$z = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gz}. \quad (4)$$

Тогда зависимость концентрации от высоты будет иметь вид

$$n = \frac{N}{S\sqrt{v_0^2 + 2gz}}. \quad (5)$$

Масса песка в воздухе может быть найдена простым способом. Так как время падения песчинок равно

$$L = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad (6)$$

То масса струи равна массе песчинок, выпавших из отверстия за это время

$$m = m_0 N t = m_0 N \sqrt{\frac{2L}{g}}. \quad (7)$$