

Условие

Задача 2. Шайба

Хоккеист бросает шайбу в форме квадрата (чтобы исключить ее вращение). Шайба скользит по льду вдоль борта хоккейной площадки. Площадка представляет собой прямоугольник с закругленными углами. Закругления являются дугами окружностей одинаковых радиусов. При движении вдоль правого борта скорость шайбы равна V_0 . Пройдя первое закругление, скорость шайбы уменьшилась до значения V_1 . Найдите скорость шайбы V_2 после того, как она пройдет второе закругление. Трением шайбы о лед можно пренебречь. Коэффициент трения шайбы о борт постоянен и равен μ .

Решение

Задача 2 Теплопроводность

1.1 Для расчетов потоков теплоты надо просто подставить численные значения в заданную формулу и провести расчет Для серебра

$$q_{Ag} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 8,58 \cdot 10^4 \text{ Вт} \quad (1)$$

Для свинца

$$q_{Зи} = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 7,02 \cdot 10^3 \text{ Вт} \quad (2)$$

1.2 Так как коэффициент теплопроводности постоянен в установившемся режиме температуру изменяется по линейному закону. Поэтому при расчетах можно считать, что среднее значение изменения температуры равно $\delta T = \frac{1}{2} \Delta T$. После этого опять считаем Для серебра

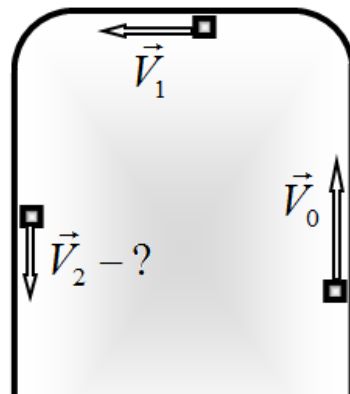
$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} cm \Delta t = \frac{1}{2} c \rho S h \Delta t = 2,47 \cdot 10^6 \text{ Дж} \quad (3)$$

Для свинца

$$Q_{Ag} = \frac{1}{2} c \rho S h \Delta t = 1,43 \cdot 10^6 \text{ Дж} \quad (4)$$

1.3 Для решения этого пункта воспользуемся упорно навязываемой аналогией с законами постоянного тока. Так для каждой пластины можно ввести и рассчитать тепловое сопротивление

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{h}{S} \quad (5)$$



Так как пластины соединены последовательно (теплота проходит через одну, потом через другую), то общее сопротивление равно сумме сопротивлений. Поэтому поток теплоты через сдвоенные пластины будет равен

$$q_1 = q_2 = \frac{\Delta T}{\frac{h}{\lambda_{Ag}S} + \frac{h}{\lambda_{Pb}S}} \quad (6)$$

Этой формуле можно придать интересный вид

$$q_1 = q_2 = \left(\frac{1}{q_{Ag}} + \frac{1}{q_{Pb}} \right)^{-1} \quad (7)$$

Расчеты по этой формуле дают значение

$$q_1 = q_2 = 6,49 \cdot 10^3 \text{ Вт} \quad (8)$$

Как видно поток определяется потоком через плохо проводящий слой.

Для расчета количества теплоты, потраченное на нагревание необходимо сначала найти распределение температуры, т.е. решить следующие пункты задачи.

1-4 – 1.6 Распределение температуры в каждом слое, по-прежнему, линейное. Поэтому достаточно найти температуру стыка. Опять воспользуемся аналогией с протеканием электрического тока. Обозначим свойства вещества примыкающего к холодной стороне индексом «х», а к горячей стороне индексом «г». Тогда можно записать (здесь T_z - температура стыка):

$$T_z - T_0 = qR_x = \frac{\Delta T}{\frac{h}{\lambda_{Ag}S} + \frac{h}{\lambda_{Pb}S}} \cdot \frac{h}{\lambda_x S} = \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_z}} \frac{1}{\lambda_x} \quad (9)$$

Откуда следует, что

$$T_z = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_z}} \frac{1}{\lambda_x} \quad (10)$$

Проведем расчеты. В первом случае ($Pb \rightarrow Ag$)

$$T_{z1} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_{Ag}} + \frac{1}{\lambda_{Pb}}} \frac{1}{\lambda_{Pb}} = 18,5^\circ \text{C}. \quad (11)$$

Во втором случае ($Ag \rightarrow Pb$)

$$T_{z2} = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\frac{1}{\lambda_{Ag}} + \frac{1}{\lambda_{Pb}}} \frac{1}{\lambda_{Ag}} = 1,5^\circ \text{C}. \quad (12)$$



Во втором случае можно было просто вычислить $T_{z2} = \Delta T - T_{z1}$. Графики зависимостей температуры от координаты показаны на рисунке. Видно, что основное «падение

температуры» происходит на свинцовой пластине. Также по графику видно, что основное различие в количестве теплоты возникает из-за того, что серебряная пластина в первом случае нагревается больше.

Для расчетов теплот учтем, что пластина, примыкающая к холодной стороне, в среднем нагрелась на $\frac{1}{2}T_Z$; а вторая - на величину $\frac{1}{2}(T_Z + T_1)$.

Поэтому количество теплоты, которой пойдет на нагревания будет равно:

В первом случае ($Pb \rightarrow Ag$):

$$Q_1 = \frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}ShT_Z + \frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}Sh(T_Z + T_1) = 6,07 \cdot 10^6 \text{ Дж} \quad (13)$$

Во втором случае ($Ag \rightarrow Pb$)

$$Q_1 = \frac{1}{2}c_{Ag}\rho_{Ag}ShT_Z + \frac{1}{2}c_{Pb}\rho_{Pb}Sh(T_Z + T_1) = 1,73 \cdot 10^6 \text{ Дж.} \quad (14)$$

Часть 2. Воздушная пластина.

В данной части задачи все температуры следует рассчитывать в шкале Кельвина.

2.1 Для определения вида зависимости длины свободного пробега от указанных параметров, заметим, что движущаяся молекула замечает на своем пути площадь равную πd^2 . На длине свободно пробега в цилиндре с указанной площадью поперечного сечения и высотой равной длине свободного пробега в среднем должна находиться одна молекула. Поэтому можно записать

$$\pi d^2 \langle l \rangle n = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle l \rangle = \frac{1}{\pi d^2 n}. \quad (15)$$

2.2 Подставляя найденную зависимость в формулу для теплопроводности, получим выражение

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \rho c_V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 n} \cdot nm \cdot C_V M. \quad (16)$$

Из которого следует, что коэффициент теплопроводности воздуха пропорционален корню квадратному из абсолютной температуры. Т.е. показатель степени $z = \frac{1}{2}$. Важно также отметить, что теплопроводность не зависит от плотности (концентрации).

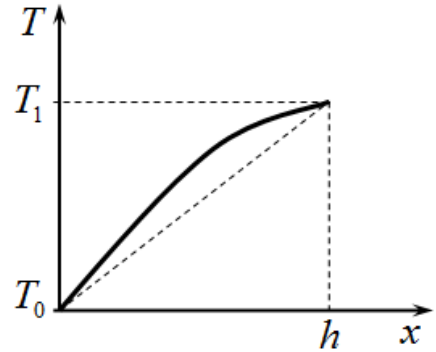
Экспериментальные данные показывают, что при температурах близких к комнатным показатель степени ближе к единице. Поэтому выбранная модель также имеет право на существование.

2.3 Используя формулу для потока теплоты, получаем, что поток теплоты через воздушную прослойку (в приближении постоянства теплопроводности) равен

$$\tilde{q}_a = \lambda S \frac{\Delta T}{h} = 4,80 \text{ Вт} \quad (17)$$

2.4 Так как теплопроводность воздуха возрастает с ростом температуры, то график температурного профиля будет выгнут вверх. Действительно, в тех местах, где теплопроводность больше, градиент температуры меньше.

2.5 Так как теплопроводность воздуха зависит от температуры, то она изменяется и при переходе от одной точки к другой. Поэтому закон теплопроводности Фурье следует записывать только для тонких слоев (т.е. в дифференциальной форме). Выразим зависимость теплопроводности от температуры посредством формулы



$$\lambda = \lambda_0 \frac{T}{T_0}. \quad (18)$$

И запишем уравнение Фурье для тонкого слоя воздуха Δx :

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0} \frac{\Delta T}{\Delta x} S. \quad (19)$$

Воспользуемся очевидной подсказкой и запишем

$$q \Delta x = \frac{\lambda_0 S}{2T_0} \Delta(T^2) \quad (20)$$

Теперь легко просуммировать по всем слоям:

$$ql = \frac{\lambda_0 S}{2T_0} (T_1^2 - T_0^2) \quad (21)$$

Откуда получаем окончательно для потока теплоты

$$q = \frac{\lambda_0 S}{2T_0 l} (T_1^2 - T_0^2). \quad (22)$$

Расчет дает следующее численное значение: $q_a = 4,98 \text{ Вт}$, что несколько больше, чем получено ранее в приближенном расчете.

2.6 Так как объем воздуха не изменяется, то все полученная теплота пойдет на увеличение внутренней энергии воздуха. В установившемся режиме теплопередачи температура будет изменяться от точки к точке, постоянным будет оставаться давление! Поэтому выразим внутреннюю энергию воздуха через его давление:

$$U = \frac{5}{2}R\nu T = \frac{5}{2}PV. \quad (23)$$

Следовательно, изменение внутренней энергии воздуха (и равное ему количество полученной теплоты) выражается через изменение давления

$$Q = \Delta U = \frac{5}{3}V\Delta P. \quad (24)$$

Таким образом, нам необходимо рассчитать установившееся давление. Для этого воспользуемся условием постоянства числа молекул воздуха. Для этого разобьем воздушную пластину на тонкие слои Δx_i . Концентрацию частиц в каждом слое можно выразить из уравнения состояния газа

$$n_i = \frac{P}{kT_i}. \quad (25)$$

Тогда общее число молекул можно получить, если просуммировать числа частиц во всех слоях

$$N = \sum_i \frac{PS}{kT_i} \Delta x_i. \quad (26)$$

Это же число можно выразить через начальные условия

$$N = \frac{P_0 Sl}{kT_0}. \quad (27)$$

Таким образом, для определения давления получаем уравнение

$$P \sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0 l}{T_0}. \quad (28)$$

Прямое вычисление суммы требует расчета распределения температуры и последующего интегрирования. Можно поступить проще: выразим Δx_i из уравнения теплопроводности (19):

$$q = \lambda_0 \frac{T}{T_0} \frac{\Delta T}{\Delta x} S \quad \Rightarrow \quad \Delta x_i = \lambda_0 \frac{T_i}{T_0} \frac{\Delta T_i}{q} S \quad (29)$$

И после подстановки получим

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \sum_i \frac{1}{T_i} \lambda_0 \frac{T_i}{T_0} \frac{\Delta T_i}{q} S = \frac{\lambda_0 S}{q T_0} \sum_i \Delta T_i = \frac{\lambda_0 S}{q T_0} (T_1 - T_0). \quad (30)$$

Подставим найденное выражение для потока теплоты (22)

$$\sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{\lambda_0 S}{q T_0} (T_1 - T_0) = \frac{\lambda_0 S}{\frac{\lambda_0 S}{2 T_0 l} (T_1^2 - T_0^2) / T_0} (T_1 - T_0) = \frac{2l}{(T_1 + T_0)}. \quad (31)$$

Теперь из уравнения (28) находим

$$P \sum_i \frac{\Delta x_i}{T_i} = \frac{P_0}{T_0} \Rightarrow P = P_0 \frac{T_1 + T_0}{2 T_0} \quad (32)$$

Наконец, подставляем в формула для количества теплоты

$$Q = \frac{5}{2} V \Delta P = \frac{5}{2} P_0 V \left(\frac{T_1 + T_0}{2 T_0} - 1 \right) = \frac{5}{4} P_0 V \frac{\Delta T}{T_0} \quad (33)$$

Численное значение поглощенной теплоты равно $Q = 915$ Дж.