

-2. Векторная кинематика

Условие

Задача 9-2. Векторная кинематика

Исследовательский космический аппарат сделал снимки выбросов вещества из гейзера некоторой планеты. Снимки делались с интервалом в одну секунду, однако из-за технического сбоя сохранилось только три снимка: в момент времени $t_0 = 0,0$ с, в момент времени $t_1 = 1,0$ с и в момент времени $t_4 = 4,0$ с. Положения одного из точечных объектов в данные моменты времени показаны на рис.1. Кроме того, известно (из показаний других датчиков), что регистрируемый объект упал на поверхность планеты в момент времени $t_5 = 5,0$ с. Также известно, что точка падения и точка вылета находятся на одной высоте. Отметим, что момент времени $t_0 = 0,0$ с не совпадает с моментом вылета рассматриваемого объекта из жерла гейзера.

Поверхность планеты в кадр не попала. Атмосфера на планете отсутствует. Масштаб рисунка: длина стороны клеточки равна 1,0 м.

При решении данной задачи допускается использование промежуточных численных расчетов. Все построения выполняйте на выданных Вам бланках (они одинаковы). Выполнение пп. 1-2 проведите на первом бланке, пп. 3-6 на втором бланке¹. расчеты и комментарии выполняйте в тетради.

По данному снимка вам необходимо найти кинематические характеристики движения объекта и восстановить траекторию движения.

1. Найдите вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ на данной планете: рассчитайте его модуль; постройте на бланке в соответствующем масштабе вектор $\vec{S}_1 = \vec{g}t_1^2$. 2. Определите вектор скорости $\vec{v}_0$ объекта в момент времени $t_0 = 0,0$ с: рассчитайте его модуль; постройте на бланке вектор $\vec{S}_2 = \vec{v}_0 t_1$

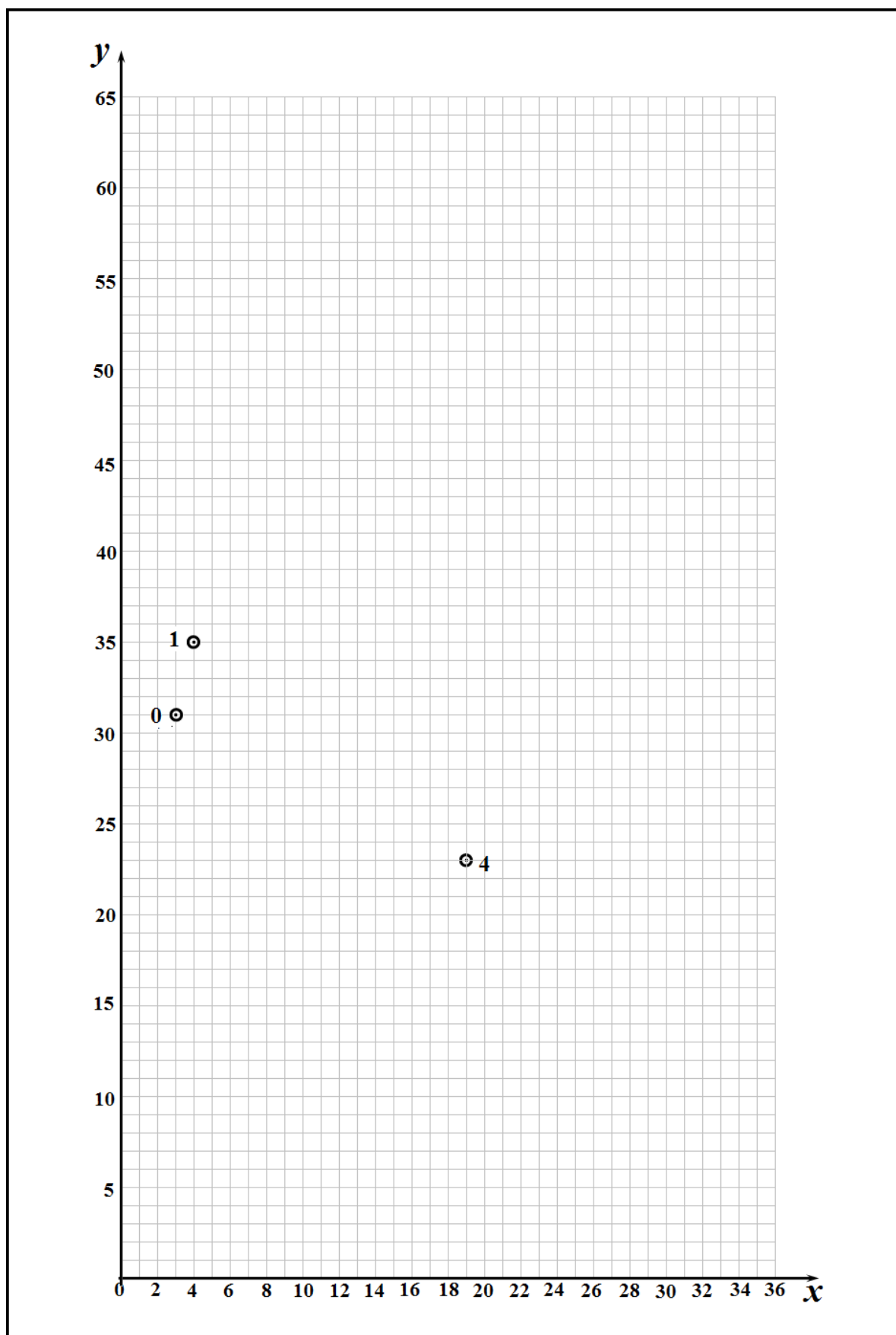
*Подсказка. Далее рекомендуем все расчеты построения проводить, используя построенные векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$.**

3. Найдите и укажите на бланке точку падения рассматриваемого объекта. 4. Постройте на бланке линию горизонта. 5. Постройте всю траекторию полета объекта (достаточно указать его положения с интервалом в 1 с). 6. Постройте (с точностью $\pm 0,2$ м) на бланке положение гейзера (точку вылета объекта). 7. Постройте (с точностью $\pm 0,5$ м) на бланке положение верхней точки траектории.

—

¹ Бланки одинаковы, поэтому здесь приводится только один.

Бланк 1



Решение

Задача допускает как графическое, так и алгебраическое решение (для его реализации бланк можно оцифровать). Мы будем использовать оба подхода. Для сокращения записей компоненты векторов (метрах, или «клеточках») будем записывать в скобках, например, положение тела в момент времени $t_0 = 0$: $\vec{r}_0 = (4, 35)$. Для всех векторов (перемещений, скоростей, ускорения) будем использовать систему единиц СИ.

1 Так как движение является равноускоренным, то векторы перемещений тела из положения в момент времени $t_0 = 0$ за время t описываются формулой:

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (1)$$

Для моментов времени $t_1 = 1,0\text{с}$ и $t_4 = 4,0\text{с}$ можно записать:

$$\begin{cases} \Delta \vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 \\ \Delta \vec{r}_{04} = \vec{v}_0 t_4 + \frac{1}{2} \vec{g} t_4^2 \end{cases} \quad (2)$$

Это система уравнений относительно неизвестных векторов ускорения и начальной скорости имеет решение

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Delta \vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 \\ \Delta \vec{r}_{04} = \vec{v}_0 t_4 + \frac{1}{2} \vec{g} t_4^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta \vec{r}_{01}}{t_1} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1 \\ \frac{\Delta \vec{r}_{04}}{t_4} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \vec{g} t_4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \vec{g} (t_4 - t_1) = \frac{\Delta \vec{r}_{04}}{t_4} - \frac{\Delta \vec{r}_{01}}{t_1} \Rightarrow \\ \vec{g} &= \frac{2}{t_4(t_4 - t_1)} \Delta \vec{r}_{04} - \frac{2}{t_1(t_4 - t_1)} \Delta \vec{r}_{01} \end{aligned} \quad (3)$$

Подстановка численных значений времен дает следующие значения искомых векторов

$$\vec{g} = \frac{2}{t_4(t_4 - t_1)} \Delta \vec{r}_{04} - \frac{2}{t_1(t_4 - t_1)} \Delta \vec{r}_{01} = \frac{1}{6} \Delta \vec{r}_{04} - \frac{2}{3} \Delta \vec{r}_{01} = \frac{\Delta \vec{r}_{04} - 4 \Delta \vec{r}_{01}}{6}. \quad (4)$$

Эти векторы можно построить на бланке (см. рис.). Там же указан вектор $\vec{S}_1$. Можно также найти численные значения их компонент (в изображенной системе координат):

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = (3, 31) \\ \vec{r}_1 = (4, 35) \\ \vec{r}_4 = (19, 23) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (1, 4) \\ \Delta \vec{r}_{04} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0 = (16, -8) \end{cases} \Rightarrow \vec{g} = \frac{\Delta \vec{r}_{04} - 4 \Delta \vec{r}_{01}}{6} = (2, -4) \quad (5)$$

Модуль вектора ускорения равен

$$g = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (6)$$

2. Вектор скорости $\vec{v}_0$ можно выразить из первого уравнения системы (2):

$$\Delta \vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 \Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{\Delta \vec{r}_{01}}{t_1} - \frac{1}{2} \vec{g} t_1. \quad (7)$$

Тогда требуемый вектор

$$\vec{S}_2 = \vec{v}_0 t_1 = \Delta \vec{r}_{01} - \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 = \Delta \vec{r}_{01} - \frac{1}{2} \vec{S}_1 \quad (8)$$

Построение этого вектора также показано на рисунке.

Численные значения его компонент:

$$\vec{S}_2 = \frac{\Delta \vec{r}_{01}}{t_1} - \frac{1}{2} \vec{g} t_1 = (0, 6). \quad (9)$$

Модуль вектора скорости, очевидно, равен $v_0 = 6,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3. Используя закон равноускоренного движения (1), положение объекта в произвольный момент времени можно описать формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 = \vec{r}_0 + \vec{S}_2 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_1} \right)^2 \vec{S}_1. \quad (10)$$

Так в момент падения $t = 5,0 \text{с}$ радиус-вектор объекта равен

$$\vec{r}_5 = \vec{r}_0 + 5 \vec{S}_2 + \frac{25}{2} \vec{S}_1 = (28, 11) \quad (11)$$

4. Линия горизонта перпендикулярна вектору ускорения $\vec{g}$ (или $\vec{S}_1$) и проходит через точку падения. На рисунке – жирная двойная линия.

5. Расчет координат остальных точек выполняется аналогично, как графически, так и алгебраически. Отметим, что приведенная формула (10) справедлива как для положительных, так и для отрицательных времен. Построения этих точек показаны на рисунке. В таблице приведены рассчитанные значения координат.

Т, с	X, м	Y, м
0	3	31
1	4	35
2	7	35
3	12	31
4	19	23
5	28	11
-1	4	23
-2	7	11
-3	12	-5

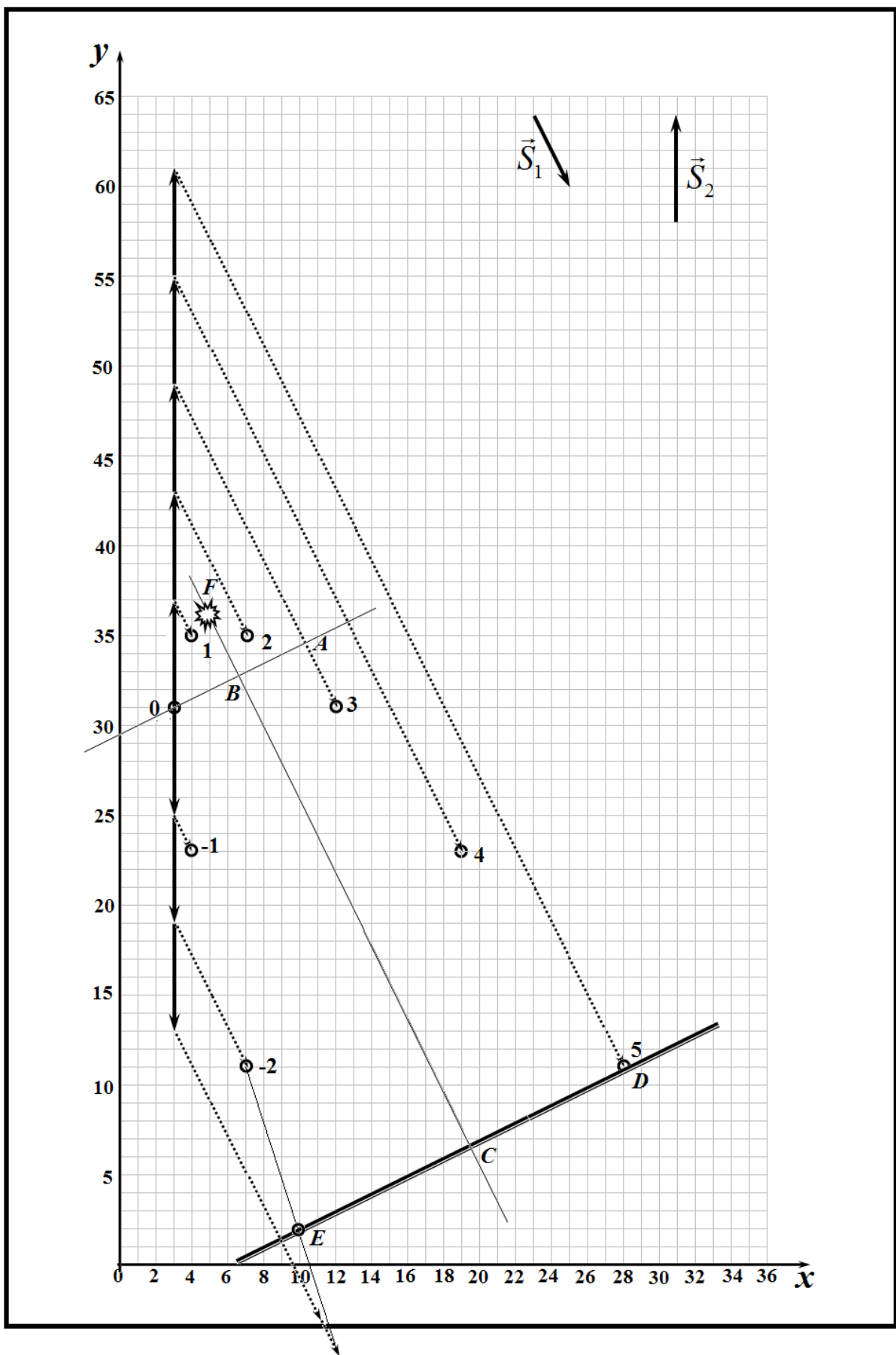
6. Определение точки вылета может быть проведено различными способами. Простейший из них – формально отметить точку траектории, соответствующую моменту времени $t = -3,0 \text{с}$,

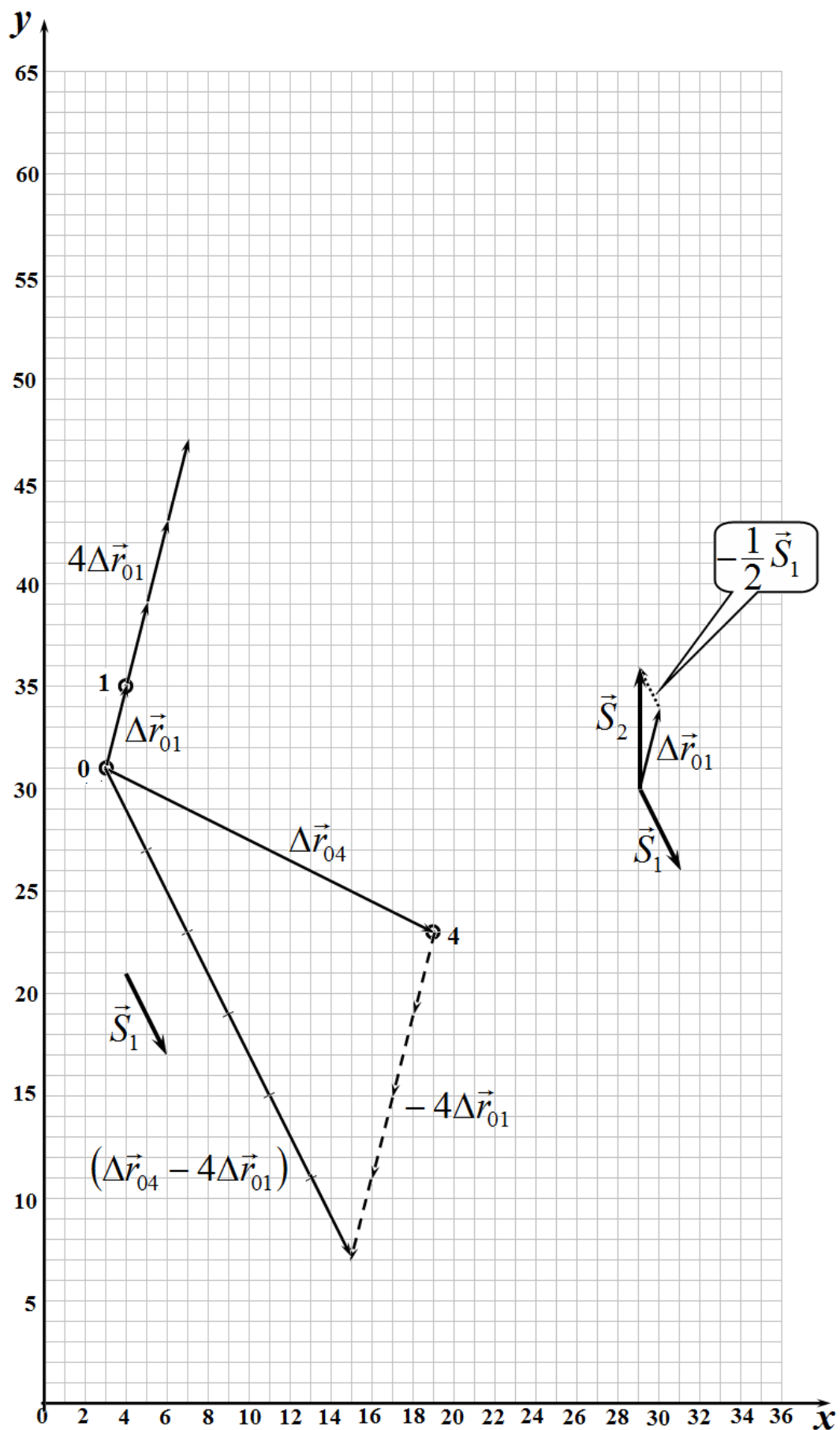
заметить, что она лежит ниже линии горизонта. На интервале времени $[-3, -2]$ участок траектории приближенно можно считать отрезком прямой линии. Поэтому точка вылета есть точка пересечения указанного отрезка траектории с линией горизонта – точка E на рисунке.

Более точным является следующий способ. Траектория движения симметрична относительно вертикали на всех уровнях. Поэтому проведем через первую точку O прямую OA , параллельную линии горизонта и через ее середину проведем перпендикуляр BC . Эта прямая является осью симметрии параболы (траектории). Поэтому расстояние от точки вылета E до основания перпендикуляра C , на таком же расстоянии, что и точка падения D .

7. Положения вершины параболы с требуемой точностью можно указать и «на глаз» - точка F !

Бланк 1.





Бланк 2

² Конечно, сам Дж. П. Джоуль использовал английскую систему мер. Так механическую работу он измерял в футо-фунтах – энергия которая требуется, чтобы поднять 1 фунт на высоту в 1 фут, температура измерялась в градусах Фаренгейта, масса измерялась в гранах и т.д. Для упрощения вашей работы все численные данные, приведенные в условии данной задачи (взятые непосредственно из работы Дж. П. Джоуля) переведены в привычные для вас единицы измерения.