

-1. Магнитные взаимодействия

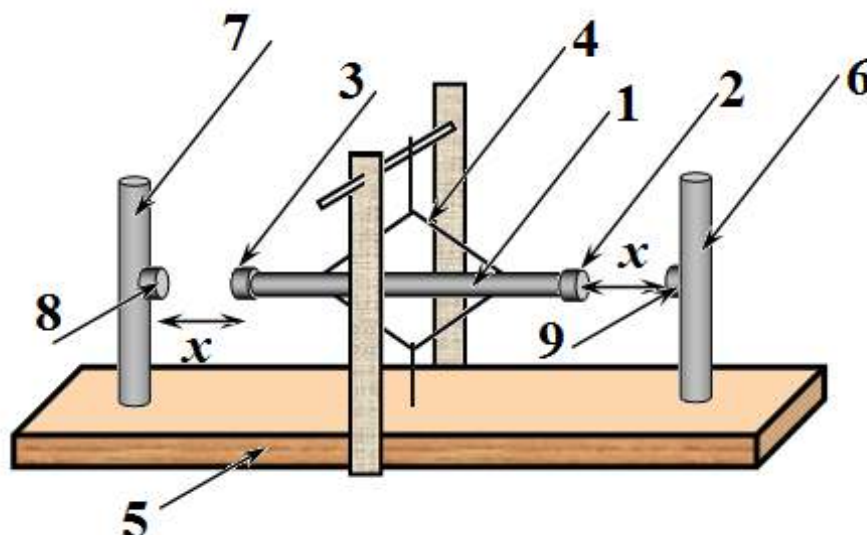
Условие

Задача 11-1. Магнитные взаимодействия.

В данной задаче вам необходимо исследовать зависимости силы магнитных взаимодействий от расстояния между телами.

Приборы и оборудование: установка для изучения крутильных колебаний с четырьмя магнитами, секундомер, пластилин, две железных шайбы.

Установка для изучения колебаний показана на рисунке.



Металлический стержень 1 с двумя магнитами 2,3 подвешен на нитяном подвесе 4. Далее стержень с магнитами на подвесе будем называть *маятником*. Маятник закреплен на деревянной подставке 5 и может совершать крутильные колебания в горизонтальной плоскости. На деревянных стержнях (карандашах) 6,7 с помощью пластилина закреплены магниты 8,9. Стержни с магнитами можно перемещать по подставке, для их крепления также используется пластилин. Во второй части магниты на стержнях 8,9 следует заменить металлическими пластинками (шайбами).

Магниты 2,3 на металлическом стержне должны быть ориентированы одинаково, так чтобы стержень вел себя подобно магнитной стрелке. Магниты на карандашах должны быть ориентированы таким образом, чтобы они притягивались к магнитам маятника. Стержни следует располагать симметрично так, чтобы расстояния между магнитами x были одинаковы.

Часть 1. Влияние магнитного поля Земли.

Сориентируйте подставку в направлении «север-юг». При этом маятник в положении равно-

весия должен располагаться вдоль длинной оси подставки. В дальнейшем ориентацию установки не изменяйте.

1.1 Измерьте период колебаний маятника T_0 с правильно ориентированными магнитами при отсутствии стержней 6,7. Оцените погрешность измеренного значения T_0 .

Часть 2. Взаимодействие магнитов.

Закрепите магниты на деревянных стержнях. Правильно ориентируйте полюса магнитов. Все 4 магнита должны быть на одной высоте. 2.1 Измерьте зависимость периода колебаний маятника от расстояния x между магнитами. Постройте график полученной зависимости.

Представим формулу для силы взаимодействия между магнитами в виде $F(x) = F_0 f(x)$, где F_0 - некоторая постоянная (определять ее не требуется).

2.2 Получите формулу, позволяющую по измеренным значениям периодов колебаний определить вид зависимости силы взаимодействия от расстояния между магнитами $f(x)$. 2.3 Рассчитайте зависимость силы взаимодействия между магнитами от расстояния x . Постройте график полученной зависимости. 2.4 Предложите простые приближенные формулы для описания вида функции $f(x)$. Если не удастся получить формулу, описывающую силу взаимодействия во всем диапазоне расстояний, приведите две приближенных формулы для малых и больших расстояний. Предлагаемые вами формулы обоснуйте с помощью результатов измерений.

Часть 3. Притяжение к шайбам.

Вместо магнитов, закрепите на карандашах металлические шайбы. Исследуйте зависимость силы взаимодействия магнитов с шайбами. Для чего выполните задания всех пунктов, сформулированных в Части 2.

Решение

Задача 11-1. Магнитные взаимодействия.

Часть 1. Влияние магнитного поля Земли.

1.1 Результаты трех измерений периода колебаний следующие

T_{01} , с	T_{02} , с	T_{03} , с	$\langle T_0 \rangle$, с
8,860	8,985	8,680	8,842

Из данных следует, что случайная погрешность заметно превышает приборную. Для оценки погрешности применима любая из формул а) самая правильная ($t_{n,p}$ - коэффициент Стьюдента):

$$\Delta T = t_{n,p} \sqrt{\frac{\sum_k (T_{0k} - \langle T_0 \rangle)^2}{n(n-1)}} = 0,4c \quad (1)$$

б)

$$\Delta T = 2 \sqrt{\frac{\sum_k (T_{0k} - \langle T_0 \rangle)^2}{n(n-1)}} = 0,18c. \quad (2)$$

в)

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum_k (T_{0k} - \langle T_0 \rangle)^2}{n}} = 0,13c \quad (3)$$

г)

$$\Delta T = \frac{\sum_k |T_{0i} - \langle T_0 \rangle|}{n} = 0,11c \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{\sum_k (T_{0k} - \langle T_0 \rangle)^2}{n}}$$

В дальнейшем будем использовать оценку (2) Таким образом, измеренное значение периода колебаний, обусловленных магнитным полем Земли, равно

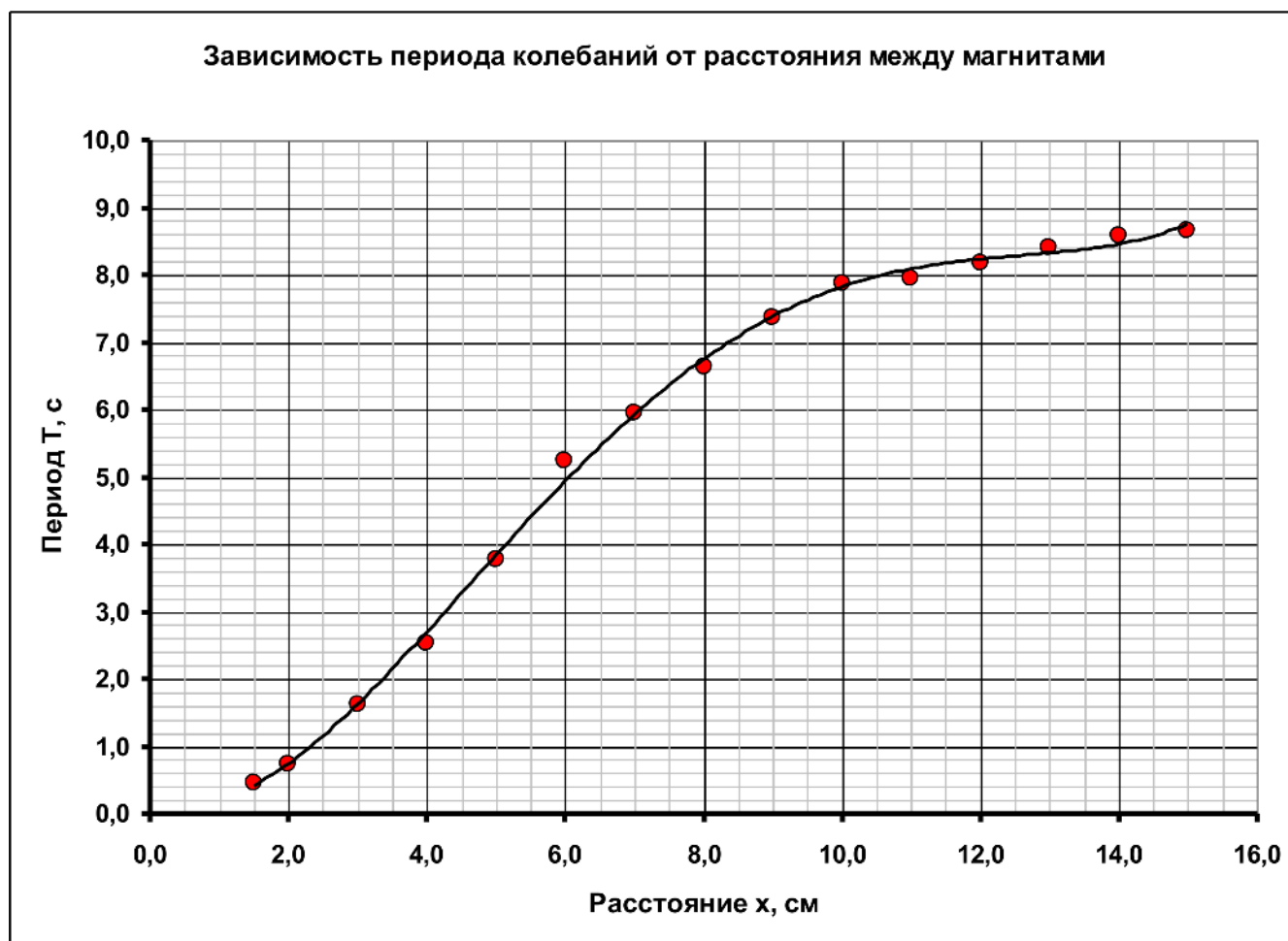
$$T_0 = (8,84 \pm 0,18)c$$

Часть 2. Взаимодействие магнитов.

2.1 Результаты измерений зависимости периода колебаний маятника от расстояния x между магнитами приведены в Таблице 1. Ниже приведен график полученной зависимости.

Таблица 1

l, см	**T₁, с**	**T₂, с**	**T₃, с**	**T₄, с**	**T₅, с**	**⟨T⟩, с**	**ΔT**
1,5	0,451	0,462	0,450	0,458	0,454	0,455	0,004
2,0	0,738	0,743	0,767	0,725	0,739	0,742	0,014
3,0	1,634	1,648	1,580	1,594	1,594	1,610	0,026
4,0	2,548	2,542	2,498	2,520	2,578	2,537	0,027
5,0	3,756	3,794	3,820	3,790	3,750	3,782	0,026
6,0	5,060	5,040	5,170	5,124	5,760	5,231	0,269
7,0	5,958	5,964	5,932	5,952	5,978	5,957	0,015
8,0	6,596	6,700	6,584	6,638	6,598	6,623	0,042
9,0	7,336	7,390	7,397	7,340	7,322	7,357	0,030
10,0	7,800	7,960	7,970	7,864	7,820	7,883	0,070
11,0	7,997	7,943	7,953	7,900	7,960	7,951	0,031
12,0	8,150	8,197	8,200	8,140	8,170	8,171	0,024
13,0	8,387	8,427	8,436	8,405	8,420	8,415	0,017
14,0	8,620	8,520	8,600	8,580	8,600	8,584	0,034
15,0	8,665	8,610	8,672	8,680	8,678	8,661	0,026



2.2 Для расчета периода колебаний можно воспользоваться двумя подходами. Первый – «ди-

намический». В его рамках следует получить уравнение вида

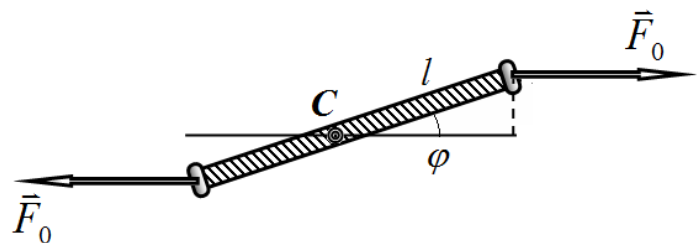
$$J\varepsilon = -K\varphi, \quad (5)$$

где φ - малый угол поворота маятника, ε - его угловое ускорение, J - константа, определяющая инерционные свойства маятника (момент инерции), $-K\varphi$ - возвращающий момент силы, действующий на маятник. В общем случае момент силы сложным образом зависит от угла поворота $M = f(\varphi)$. Однако при малых колебаниях эту функцию можно приближенно заменить линейной $M = f(\varphi) \approx K\varphi$ и подставить ее в уравнение (5). Уравнение (5) является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}}. \quad (6)$$

Второй способ расчета периода, «энергетический» подробно описан в решении теоретической задачи 11-1. Естественно он применим и в данном случае.

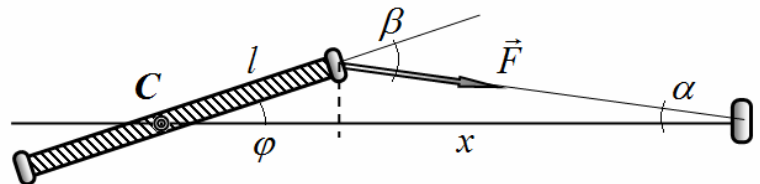
Рассмотрим сначала колебания маятника только под воздействием магнитного поля Земли. В этом случае на маятник действует вращательный момент силы, пропорциональный углу поворота маятника (так как магнитное поле можно считать однородным):



$$M_0 = -K_0\varphi \quad (7)$$

где K_0 - постоянная величина, зависящая от индукции магнитного поля и магнитного момента маятника. На рисунке силы $\vec{F}_0$ - показаны, как условные. Физический смысл имеет действующий момент сил. Период колебаний в этом случае определяется по формуле

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K_0}} \quad (8)$$



Рассчитаем теперь момент сил, действующих на маятник, если на расстояниях x расположены притягивающие магниты. Сила взаимодействия между $\vec{F}$ магнитами является центральной. Кроме того, можно учитывать только взаимодействия между ближайшими магнитами, т.к. длина маятника достаточно велика ($2l = 15\text{см}$, l - половина длины стержня). Из рисунка

следует, что момент силы, действующий на магнит маятника, равен (все углу отклонения полагаем малыми)

$$M = -lF \sin \beta \approx -lF\beta. \quad (9)$$

Из геометрии следует, что $\beta = \alpha + \varphi$ (внешний угол треугольника) и $\varphi l = \alpha x$ (теорема синусов). Поэтому $\beta = \varphi \left(1 + \frac{l}{x}\right)$, а момент силы выражается формулой

$$M = -lF \left(1 + \frac{l}{x}\right) \varphi. \quad (10)$$

В приближении малых углов модуль силы F можно считать постоянным и равным $F(x)$. Таким образом, уравнение колебаний в этом случае будет иметь вид

$$J\varepsilon = -K_0\varphi - 2l \left(1 + \frac{l}{x}\right) F(x) \cdot \varphi \quad (11)$$

Период колебаний маятника

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{J}{K_0 + 2l \left(1 + \frac{l}{x}\right) F(x)}}. \quad (12)$$

Отметим, что основную в данном выводе формулу можно получить более простым, но формальным способом. Пусть энергия взаимодействия магнитов описывается некоторой функцией $U(r)$, где r - расстояние между магнитами. Из теоремы косинусов следует, что $r = \sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)\cos\varphi}$. Производная от потенциальной энергии по углу поворота равна моменту силы $M = -\frac{dU}{d\varphi}$. По правилу вычисления производной от сложной функции получаем (с учетом формулы $-\frac{dU}{dr} = F(r)$):

$$M = -\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{dU}{dr} \frac{dr}{d\varphi} = F(r) \frac{l(l+x)\sin\varphi}{\sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)\cos\varphi}}.$$

С точностью до малых величин первого порядка

$$M = F(r) \frac{l(l+x)\sin\varphi}{\sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)\cos\varphi}} \approx F(x) \frac{l(l+x)}{\sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)}} \varphi = \frac{l(l+x)}{x} F(x)$$

Зависимость силы взаимодействия можно выразить из полученных формул (8) и (12):

$$\begin{cases} \frac{1}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2 J} \left(K_0 + 2l \left(1 + \frac{l}{x}\right) F(x) \right) \\ \frac{1}{T_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 J} K_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2} = \frac{l}{2\pi^2 J} \left(1 + \frac{l}{x}\right) F(x).$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя сила взаимодействия может быть рассчитана по периодам колебаний с помощью формулы

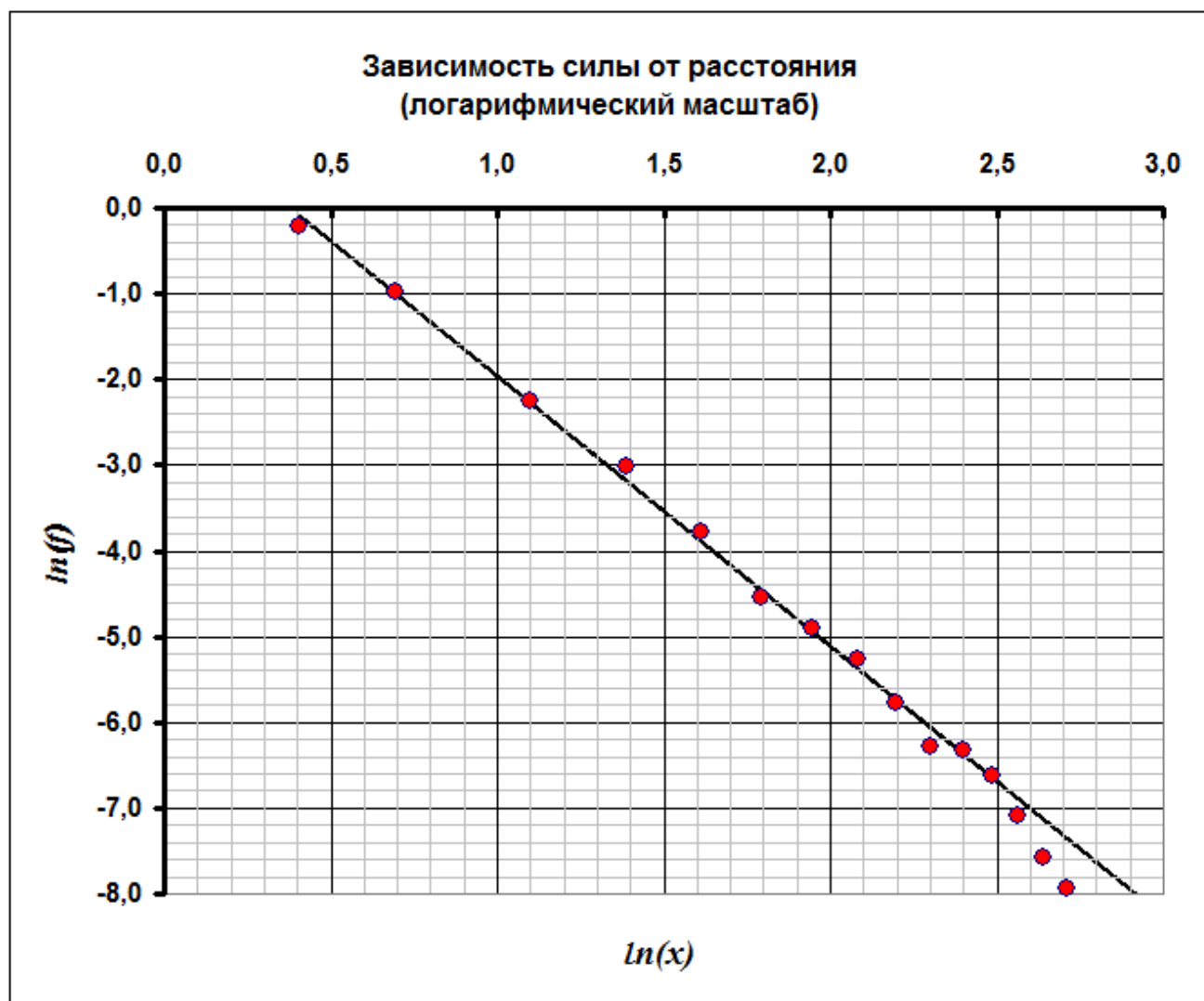
$$f(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{x}\right)} \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2} \right). \quad (13)$$

2.3 – 2.4 В Таблице 2 показаны результаты расчетов зависимости силы взаимодействия магнитов от расстояния $f(x)$, проведенные по формуле (13).

Таблица 2.

l, см	**T, с**	**$f(x)$**	**$\ln(l)$**	**$\ln(f)$**
1,5	0,455	$8,029 \cdot 10^{-1}$	0,405	-0,219
2	0,742	$3,793 \cdot 10^{-1}$	0,693	-0,969
3	1,610	$1,066 \cdot 10^{-1}$	1,099	-2,239
4	2,537	$4,958 \cdot 10^{-2}$	1,386	-3,004
5	3,782	$2,285 \cdot 10^{-2}$	1,609	-3,779
6	5,231	$1,056 \cdot 10^{-2}$	1,792	-4,551
7	5,957	$7,430 \cdot 10^{-3}$	1,946	-4,902
8	6,623	$5,164 \cdot 10^{-3}$	2,079	-5,266
9	7,357	$3,100 \cdot 10^{-3}$	2,197	-5,776
10	7,883	$1,886 \cdot 10^{-3}$	2,303	-6,273
11	7,951	$1,800 \cdot 10^{-3}$	2,398	-6,320
12	8,171	$1,344 \cdot 10^{-3}$	2,485	-6,612
13	8,415	$8,434 \cdot 10^{-4}$	2,565	-7,078
14	8,584	$5,076 \cdot 10^{-4}$	2,639	-7,586
15	8,661	$3,595 \cdot 10^{-4}$	2,708	-7,931

График этой зависимости удобно строить в логарифмическом масштабе, так сила быстро убывает с увеличением расстояния.



Полученная зависимость во всем диапазоне расстояний является практически линейной с коэффициентом наклона $a = -3,14 \approx 3$. Поэтому можно считать, что сила взаимодействия магнитов убывает обратно пропорционально кубу расстояния:

$$F = \frac{A}{x^3}. \quad (14)$$

Примечания (не входящие в основное решение)

1. При выводе формулы (12) для периода колебаний учет изменения направления силы взаимодействия магнитов приводит к появлению множителя $(1 + \frac{l}{x})$. Пренебрежение этим фактором приводит к следующей формуле для расчета силы

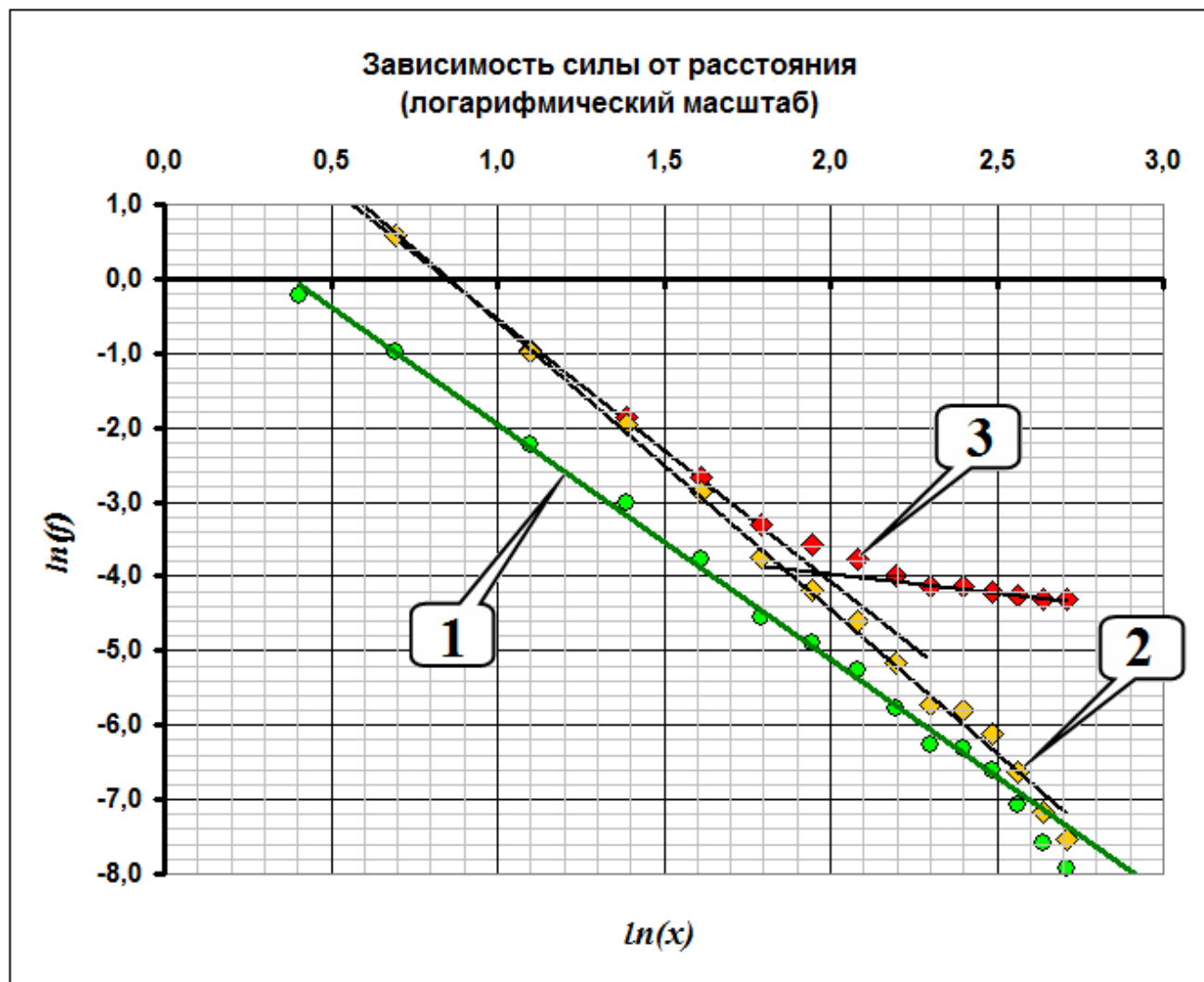
$$f(x) = \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2} \right). \quad (13.a)$$

Учет взаимодействия с магнитным полем Земли приводит к появлению постоянного слагаемого K_0 в формуле (12) и как следствие величины $-\frac{1}{T_0^2}$ в формуле для периода. Без его

учета формула для силы взаимодействия приобретает вид

$$f(x) = \frac{C}{T^2}. \quad (13.6)$$

Следующий рисунок показывает значимость обоих оговоренных факторов.

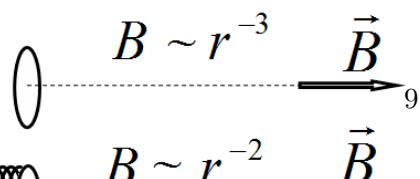


Здесь:

1- Зависимость, рассчитанная по формуле (13) (та, которая является, или считается правильной). 2- Зависимость, рассчитанная по формуле (13а) (без учета изменения направления силы). Эта зависимость также может считаться линейной, но ее коэффициент наклона близок к -4. 3- Зависимость, рассчитанная по формуле (13б) (без учета влияния земного магнитного поля). В этом случае зависимость нелинейная. Именно для нее в условии задачи рекомендовано предложить две формулы для малых и больших расстояний.

2. Полученная зависимость силы от расстояния $F \propto r^{-3}$ имеет теоретическое

11 класс. Экспериментальный тур.



обоснование. Индукция магнитного поля кольца² убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Однако в данном случае намагничивается весь стержень маятника. Поэтому система «стержень плюс два магнита» эквивалентна длинному соленоиду. В этом случае для вычисления индукции поля необходимо проинтегрировать индукции полей, создаваемых всеми витками. Так для полубесконечного $z \in (0, \infty)$ соленоида на большом расстоянии от его торца получим

$$B \propto \int_0^\infty \frac{dz}{(r+z)^3} \propto \frac{1}{r^2}.$$

Интересно, что в этом случае можно говорить о «магнитных зарядах», расположенных на концах стержня - почти монополю Дирака. Отдельный магнит можно рассматривать как магнитный диполь. Сила, действующая на него пропорциональна производной от магнитной индукции, в данной системе

$$F \propto \frac{dB}{dr} \propto \frac{1}{r^3}.$$

— ² См. Решение теоретической задачи 11.2