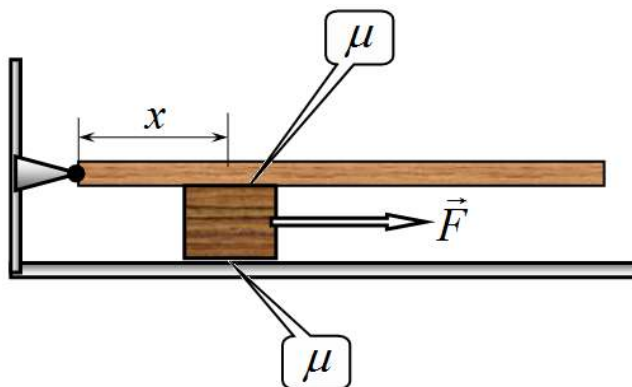


Условие

Задача 10-1. «Разминка» Данное задание состоит из двух несвязанных между собой задач.

Задача 1.1

Однородная доска массы M и длины l шарнирно прикреплена к стене, так что может вращаться вокруг оси шарнира в вертикальной плоскости. Доска опирается на брусок массы m так, что при движении этого бруска доска все время остается в горизонтальном положении. Коэффициенты трения между бруском и доской и между бруском и полом одинаковы и равны μ . Найдите зависимость модуля горизонтальной силы $\vec{F}$, которую необходимо прикладывать к бруску, что он мог двигаться с постоянной скоростью, от положения бруска x . Постройте график данной зависимости. Оцените, какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы медленно вытянуть брусок из-под доски, если вначале он находился на расстоянии $x_0 = \frac{l}{4}$ от шарнирного крепления доски. Считайте, что размеры бруска значительно меньше длины доски.

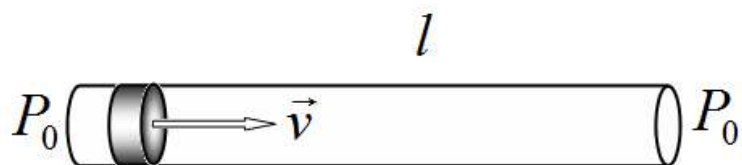


Задача 1.2 При протекании газа по трубе на него действуют силы вязкого трения со стороны стенок трубы. Расход газа (объем газа, протекающего через поперечное сечение трубы в единицу времени) определяется формулой Пуазейля

$$q = \frac{r^4 \Delta P}{8\pi\eta l}, \quad (1)$$

где l - длина трубы, r - ее внутренний радиус, ΔP - разность давлений на концах трубы, η - коэффициент вязкости протекающего газа. **1.2.1** Воздух пропускают через тонкую трубку, прикладывая к ее концам разность давлений ΔP_0 . При этом расход газа равен q_0 . Чему будет равен расход газа через трубку такой же длины, но в два раза большего радиуса, при той же разности давлений на ее концах? Две описанных трубки соединены последовательно. Чему будет равен расход газа через эту составную трубку, если к ее концам приложить такую же разность давлений ΔP_0 ?

1.2.2 В очень длинной тонкостенной медной трубе длины l и радиуса r находится воздух. В трубу вставляют поршень, который может двигаться по трубе. Какую работу необходимо совершить, чтобы с помощью поршня вытолкнуть весь воздух из трубы, двигая его с постоянной скоростью v , значительно меньшей скорости звука в воздухе?



Считайте, что на свободном конце трубы и за поршнем давление постоянно и равно P_0 . Трением поршня о стенки трубы можно пренебречь.

Во всех пунктах задачи считайте, что избыточное давление мало, так, что изменением объема газа при изменении давления можно пренебречь.

Решение

Задача 10-1. «Разминка»

Задача 1.1

Понятно, что для того чтобы вытянуть брусок, к нему следует прикладывать горизонтальную силу немного превышающую сумму сил трения, действующих на брусок

$$F = \mu(N_1 + N_0). \quad (1)$$

Все обозначения стандартные, вертикальные силы показаны на рисунке. Из условия равновесия доски следует уравнение моментов

$$N_1 x = Mg \frac{l}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{Mg}{2} \frac{l}{x} \quad (2)$$

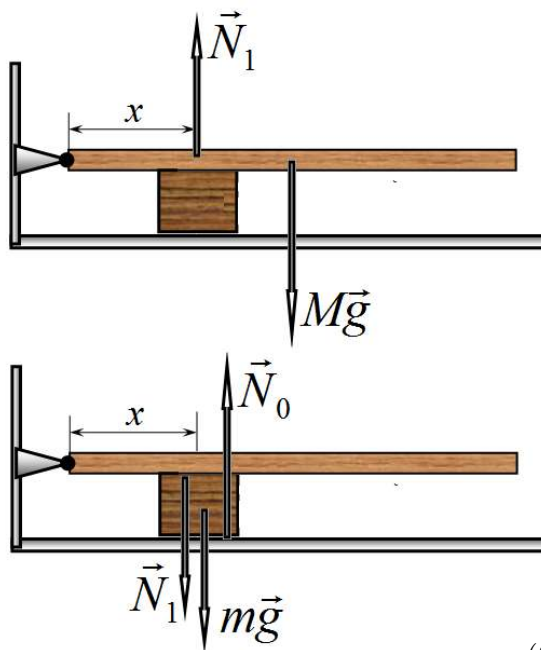
Так как брусок в вертикальном направлении не движется, то справедливо выражение

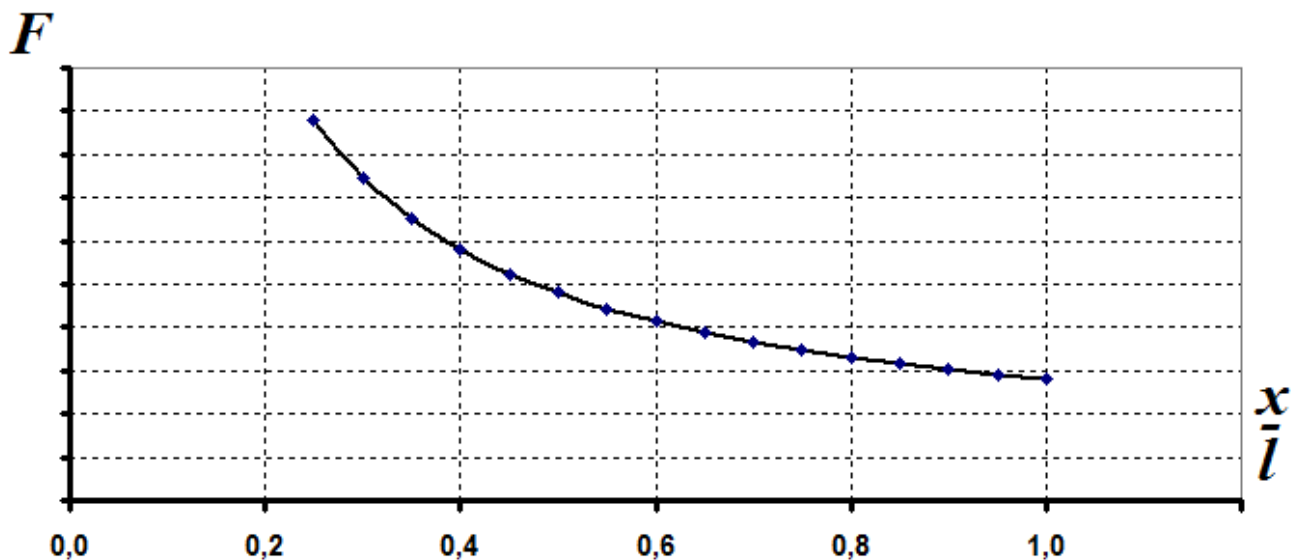
$$N_0 = mg + N_1 \quad (3)$$

Таким образом, необходимая минимальная горизонтальная сила должна быть равна

$$F = \mu(N_1 + N_0) = \mu \left(Mg \frac{l}{x} + mg \right). \quad (4)$$

График этой функции показан на рисунке





Работа численно равна площади под графиком данной функции. Строгое вычисление этой площади сводится к интегралу и оказывается равным:

$$A = \mu M g l \ln 4 + \mu m g l. \quad (5)$$

Здесь $\ln 4 \approx 1,4$. Однако вычисление интегралов выходит за рамки школьной программы. Поэтому для оценки эту площадь можно подсчитать численно. Такой расчет по 4 точкам (с шагом 0,25) дает выражение

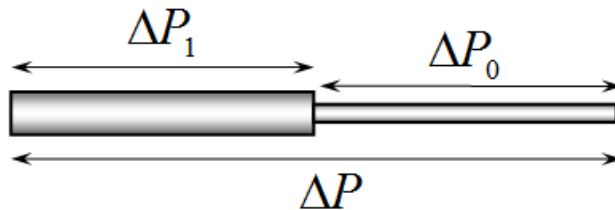
$$A = 1,5\mu M g l + \mu m g l. \quad (6)$$

Задача 1.2

1.2.1 С помощью формулы Пуазейля находим

$$q_1 = \frac{(2r)^4 \Delta P}{8\pi\eta l} = 16 \frac{r^4 \Delta P}{8\pi\eta l} = 16q_0. \quad (1)$$

При соединении двух трубок необходимо учесть, что давления на концах трубок перераспределяются так, чтобы расходы газов через них были одинаковы. Обозначим разности давлений концах трубок $\Delta P_0, \Delta P_1$. Для расходов газов из уравнения Пуазейля можно записать



$$\begin{aligned} q &= g\Delta P_0 \\ q &= 16g\Delta P_1. \\ q_0 &= g\Delta P \end{aligned} \quad (2)$$

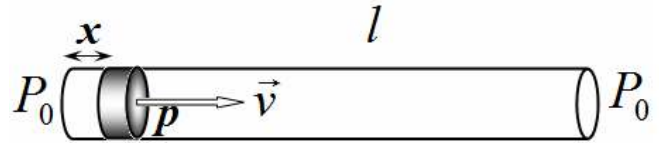
Где g - некоторая постоянная величина, q - искомый расход через составную трубку. Кроме того

$$\Delta P_0 + \Delta P_1 = \Delta P. \quad (3)$$

Из этих уравнений находим

$$\frac{q}{g} + \frac{q}{16g} = \Delta P \Rightarrow q = \frac{16}{17}g\Delta P = \frac{16}{17}q_0 \quad (4)$$

1.2.2 Так как труба тонкостенная и хорошо проводит тепло, а скорость движения поршня мала, то процесс можно считать изотермическим и равновесным. Т.е. при любом положении поршня распределение давления газа соответствует равновесному движению газа. В этом случае формула Пуазейля применима при любом положении поршня. Обозначим расстояние от конца трубы до поршня x , а избыточное (над атмосферным) давление вблизи поршня p .



Расход газа при движении поршня со скоростью v равен

$$q = vS. \quad (5)$$

Где S - площадь поперечного сечения трубы. Из формулы Пуазейля можно найти, какое избыточное давление может обеспечить такой расход и какую силу следует прикладывать к поршню:

$$q = vS = \frac{r^4 p}{8\pi\eta(l-x)} \Rightarrow p = \frac{8\pi\eta S v}{r^4}(l-x) \Rightarrow F = pS = \frac{8\pi\eta S^2 v}{r^4}(l-x) = \frac{8\pi^3\eta v}{r^4}(l-x)$$

Так как сила изменяется по линейному закону от максимального до нулевого значения, то при вычислении работы можно взять ее среднее значение $\langle F \rangle = \frac{1}{2}F_{\max}$. Тогда работа по выталкиванию воздуха из трубы будет равна

$$A = \langle F \rangle l = \frac{4\pi^3\eta v}{r^4}l^2. \quad (6)$$