

-2. Аквариум

Условие

Задача 11-2. Аквариум

Имеется тонкостенный прозрачный сосуд шарообразной формы радиусом R , заполненный прозрачной жидкостью, показатель преломления которой n . В сосуде равномерно опускается сверху вниз маленький шарик со скоростью $\vec{v}$ относительно сосуда. В следствие преломления света, кажущаяся глубина шарика h (положение его изображения) будет отличаться от его истинной глубины H .

Часть 1. Вид сверху.

За движением шарика наблюдают сверху из точки расположенной на большом расстоянии от сосуда.

1.1 При каком положении шарика его кажущаяся глубина h будет совпадать с истинной глубиной H , не зависимо от показателя преломления жидкости. Ответ обоснуйте.

1.2 Найдите зависимость кажущейся глубины h шарика от его действительной глубины H при $H < R$;

1.3 Найдите зависимость кажущейся глубины h шарика от его действительной глубины H при $H \geq R$;

1.4. Постройте график зависимости, кажущейся глубины шарика h от его истинной глубины H . Данный график постройте в относительных координатах $y = \frac{h}{R}$ от $x = \frac{H}{R}$, при двух значениях $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 2,5$.

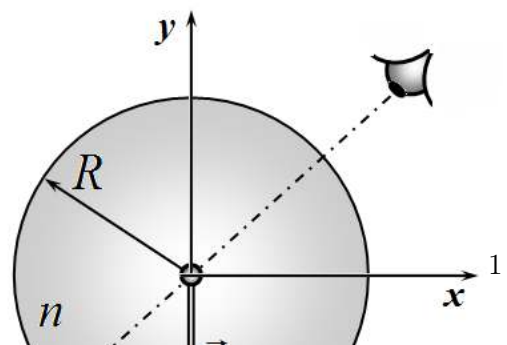
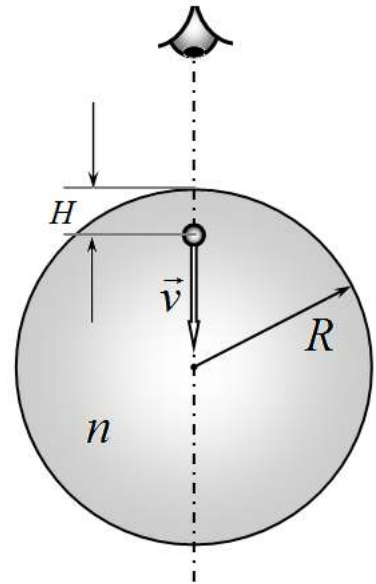
1.5. Найдите зависимость кажущейся скорости движения шарика от его действительной глубины H

1.6. Постройте графики полученных в п.1.5 зависимостей при двух значениях $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 2,5$. в безразмерных координатах $\chi = \frac{u}{v}$ от $x = \frac{H}{R}$;

Часть 2. Вид сбоку.

Глаз наблюдателя находится сбоку на прямой, проходящей через центр шара и направленной под углом 45° к вертикали. Показатель преломления жидкости равен $n_1 = 1,5$.

2.1 Постройте вектор видимой скорости движения шарика $\vec{u}$ при наблюдении сбоку, в момент времени, когда



шарик проходит центр шара. Найдите координаты этого вектора в системе отсчета, показанной на рисунке.

Решение

Задача 11-2. Аквариум

1.1 Если шарик находится в центре сосуда, то все лучи выходящие от него будут пересекать стенки сферического аквариума по нормали, следовательно, без изменения направления распространения. Поэтому при наблюдении с любой стороны при любом показателе преломления изображение шарика также будет находиться в центре шара.

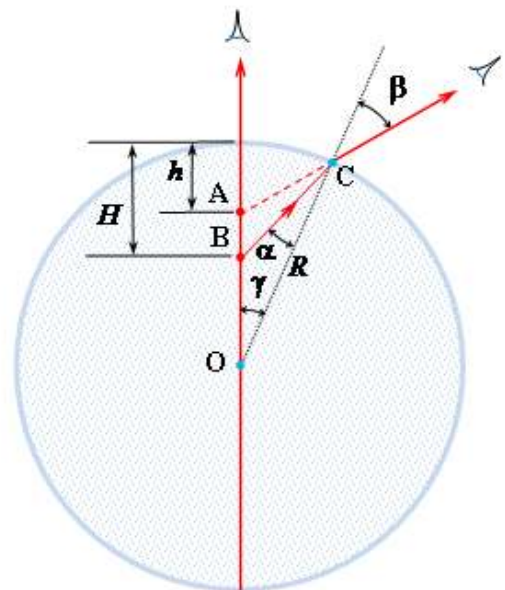


Рис. 1

1.2 Ход лучей показан на рисунке 1. Видно, что изображение **А** предмета **В** находится на глубине h , меньшей, чем действительная глубина H .

Применим теорему синусов к $\triangle OBC$:

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin(180^\circ - \alpha - \gamma)} \Rightarrow$$

$$\frac{R - H}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Поскольку углы α , β и γ малые, то

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \sin(\alpha + \gamma) \approx \alpha + \gamma \Rightarrow$$

$$\frac{R - H}{\alpha} = \frac{R}{\alpha + \gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{H\alpha}{R - H}.$$

Совершенно аналогично рассматривая ΔOAC ,

получим: $\gamma = \frac{h\beta}{R-h}$. Приравняем правые части

выражений, полученных для γ :

$$\frac{H\alpha}{R - H} = \frac{h\beta}{R - h} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{h}{H} \cdot \frac{R - H}{R - h}.$$

Используя закон преломления света, получим: $\frac{1}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{h}{H} \cdot \frac{R - H}{R - h} \Rightarrow$

$$h = \frac{HR}{nR - (n - 1)H}.$$

Введем безразмерный параметр $x = \frac{H}{R}$. В результате: $h = \frac{H}{n - (n - 1)x}$ или

$$y = \frac{h}{R} = \frac{x}{n - (n - 1)x}.$$

1.3 Ход лучей в этом случае показан на рисунке 2.

Видно, что изображение предмета находится на глубине, большей, чем действительная глубина. Ход решения в этом случае аналогичен. Применим теорему синусов к ΔBOC :

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OC}{\sin \gamma} \Rightarrow$$

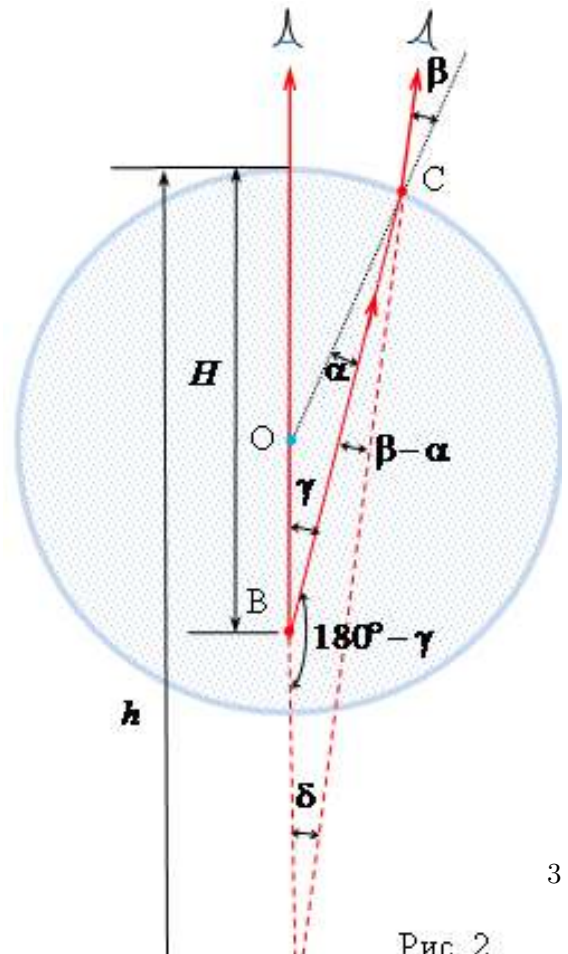
$$\frac{H - R}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \gamma}.$$

Поскольку углы α , β и γ малые, то $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \gamma \approx \gamma \Rightarrow$

$$\frac{H - R}{\alpha} = \frac{R}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{R\alpha}{H - R}.$$

Применяя теорему синусов к ΔAOC , получим:

$$\frac{AO}{\sin \beta} = \frac{OC}{\sin \delta} \Rightarrow \frac{h - R}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \delta}.$$



На рисунке 2 видно, что в $\triangle AOC$ $\delta = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - (\beta - \alpha) = \gamma - \beta + \alpha$. В результате: $\frac{h-R}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin(\gamma-\beta+\alpha)} \Rightarrow \gamma - \beta + \alpha = \frac{R\beta}{h-R}$. Подставляя выражение для γ и используя закон преломления $\frac{1}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}$, получим:

$$\frac{R}{H-R}\alpha - \alpha n + \alpha = \frac{R}{h-R}\alpha n \Rightarrow h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}$$

или

$$y = \frac{h}{R} = \frac{x}{n - (n-1)x},$$

что совпадает с формулой полученной для случая, когда тело было выше центра шара.

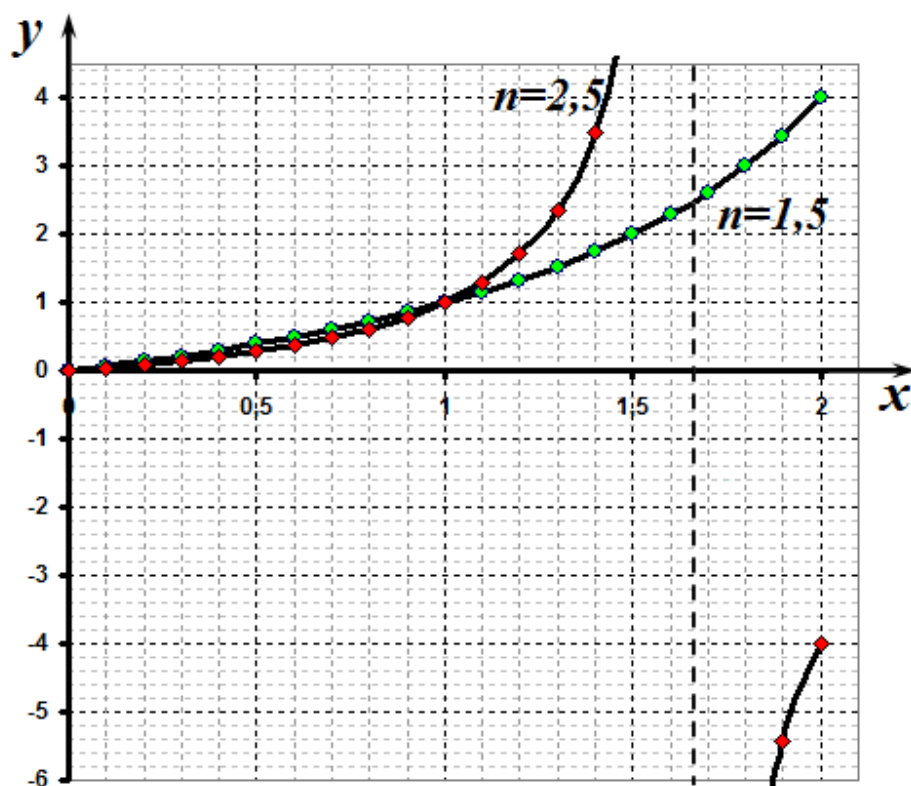


Рис. 3

1.4 Графики полученных зависимостей показаны на рисунке 3. При $n = 2,5$ эта график этой зависимости терпит разрыв и устремляется к $y \rightarrow \pm\infty$. Физический смысл этого явления можно понять: шарик переходит через фокус сферической поверхности.

1.5. Для вычисления видимой скорости движения шарика следует вычислить производную от видимой координаты $u = \frac{dh}{dt}$. Т.к. $h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}$, то

$$u = \frac{(nR - (n-1)H)R + HR(n-1)}{(nR - (n-1)H)^2}v \Rightarrow u = \frac{nR^2}{(nR - (n-1)H)^2} \Rightarrow$$

В безразмерных координатах эта зависимость имеет вид

$$\chi = \frac{n}{(n - (n-1)x)^2}.$$

Графики этих функций показаны на рис. 4

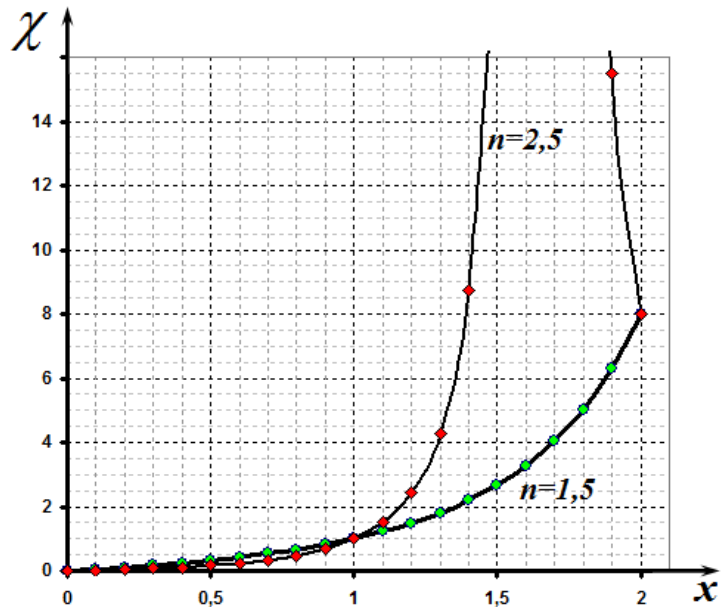


Рис. 4

1.6 График этих зависимостей показан на рисунке 4. Эта функция также терпит разрыв в указанной точке. Но скорость движения изображения шарика все время остается положительной.

Часть 2.

2.1 В общем случае положение изображения зависит от точки наблюдения. Поэтому в данной части задачи нельзя пользоваться результатами, полученными в первой части задачи. Для построения изображения надо построить, по крайней мере, два луча и найти их точку пересечения.

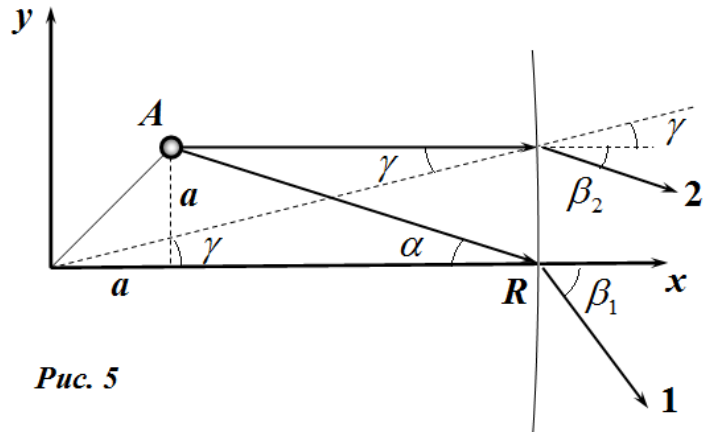


Рис. 5

Направим ось X вдоль линии наблюдения. В этой системе шарик движется под углом 45° к осям координат. Рассмотрим положение шарика в момент времени непосредственно предшествующий его прохождению через центр, когда его координаты равны $x = a$, $y = a$, причем величина a является малой. В качестве первого луча возьмем луч, попадающий на стенку в точке $x = 0$. Построение этого луча понятно из

рисунка 5. Полагая все углы малыми находим угол, под которым выходит преломленный луч.

$$\beta_1 = n\alpha = n \frac{a}{R-a}. \quad (1)$$

Уравнения этого луча имеет вид

$$y = -\frac{na}{R-a}(x-R) \quad (2)$$

Второй луч направим параллельно оси X . Для этого луча также не сложно найти уравнение:

Из закона преломления и геометрических построений следует, что угол наклона преломленного луча равен

$$\beta_2 + \gamma = n\gamma \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = (n-1)\gamma \quad (3)$$

где $\gamma = \frac{a}{R}$. Тогда уравнение этого луча имеет вид

$$y = a - \frac{(n-1)a}{R}(x-R). \quad (4)$$

Изображением шарика является точка пересечения этих лучей. Координаты этой точки являются результатом совместного решения уравнений (2) и (4). Аккуратное решение этой системы уравнений приводит к следующему результату.

$$\begin{aligned} x &= R - R \frac{R-a}{R+(n-1)a} \\ y &= \frac{nRa}{R+(n-1)a} \end{aligned} \quad (5)$$

Далее необходимо упростить данные выражения, полагая $a \ll R$. В формуле для координаты y можно пренебречь a в знаменателе:

$$y \approx na \quad (6)$$

Для координаты x следует проделать следующие преобразования

$$x = R - R \frac{R - a}{R + (n - 1)a} = R \left(1 - \frac{1 - \frac{a}{R}}{1 + (n - 1)\frac{a}{R}} \right) \approx R \left(1 - \left(1 - \frac{a}{R} - n - 1 \right) \frac{a}{R} \right) \approx na. \quad (7)$$

Таким образом, мы получили, что координаты изображения просто в n раз больше действительных координат шарика. Следовательно, все кинематические характеристики движения изображения шарика (в т.ч. и вектор скорости) так же будут в $n = 1,5$ больше соответствующих характеристик движения самого шарика. Таким образом. Вектор скорости видимого движения совпадает по направлению с вектором $\vec{V}$, но его длина в полтора раза больше.