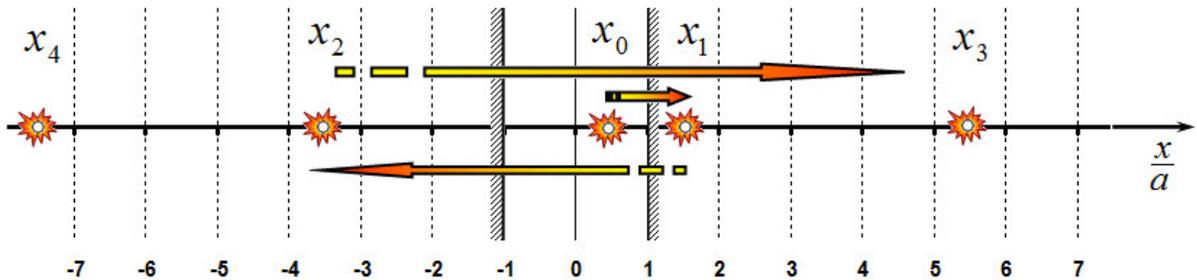


9 класс

Задача 9-1. Зеркала

1.1 Очевидно, что в данном случае число изображений будет бесконечно велико, из-за многократных отражений в параллельных зеркалах. Изображение в плоском зеркале располагается симметрично, т.е. расстояние от зеркала до изображения равно расстоянию от источника до зеркала.



Это позволяет записать координату первого изображения в правом зеркале (см. рис.)

$$x_1 = a + (a - x_0) = 2a - x_0. \quad (1)$$

Далее следует отобразить это изображение в левом зеркале, используя тоже правило построения:

$$x_2 = -a - (x_1 + a) = -2a - x_1. \quad (2)$$

После этого строим очередные изображения (сначала в правом зеркале, затем в левом) по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} \\ x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} \end{aligned} \quad (3)$$

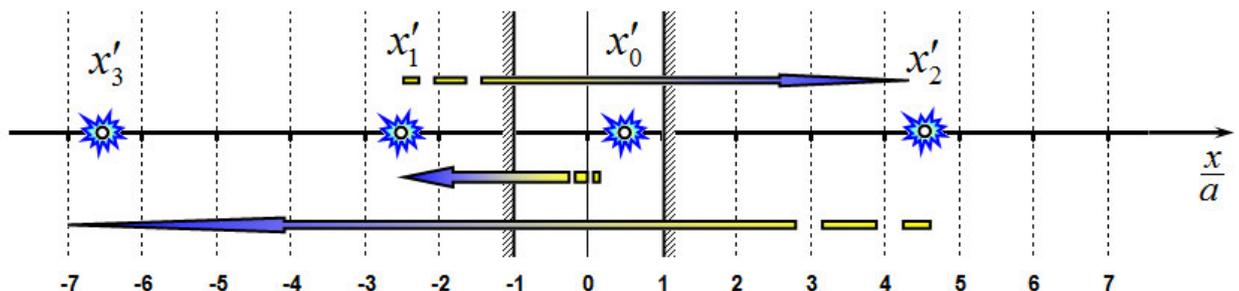
Координаты этих изображений можно выразить и в явном виде. Для этого отдельно выразим координаты четных и нечетных изображений

$$\begin{aligned} x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} = -2a - (2a - x_{2n-2}) = x_{2n-2} - 4a \\ x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} = 2a - (-2a - x_{2n-1}) = x_{2n-1} + 4a \end{aligned} \quad (4)$$

Из этих формул следует, что эти координаты образуют арифметические прогрессии

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{2}a - 4na \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ x_{2n+1} &= \frac{3}{2}a + 4na \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично следует построить вторую серию изображений, начиная с левого зеркала.



Для этой серии формулы для расчета координат имеют вид:

- для двух первых изображений:

$$\begin{aligned}x'_1 &= -a - (x_0 + a) = -x_0 - 2a \\x'_2 &= a + (a - x'_1) = -x'_1 + 2a\end{aligned}\quad (6)$$

- для последующих изображений:

$$\begin{aligned}x'_{2n+1} &= -x_{2n} - 2a \\x'_{2n+2} &= -x'_{2n+1} + 2a\end{aligned}\quad (7)$$

- наконец в явном виде:

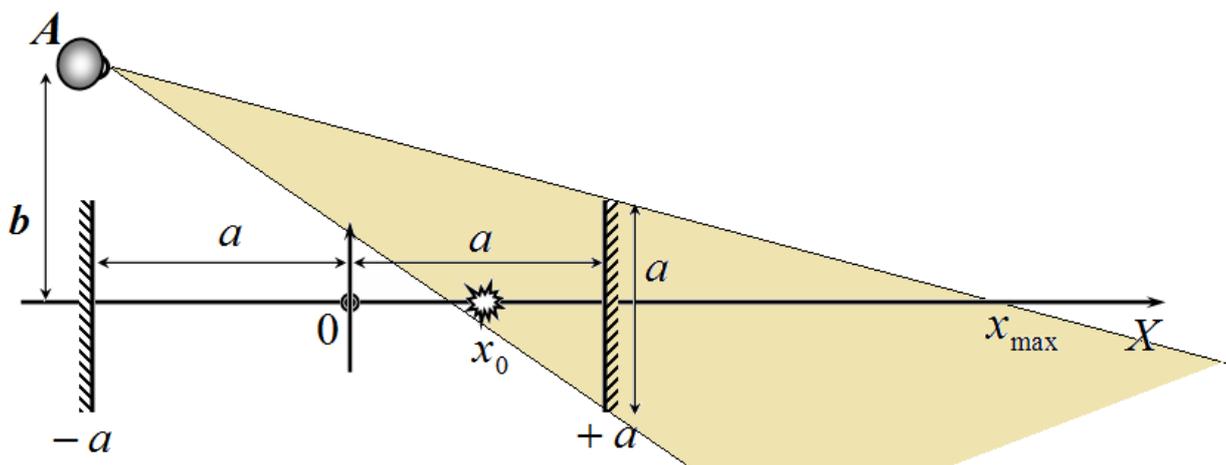
$$\begin{cases}x'_{2n+1} = -x_{2n} - 2a = -(-x'_{2n-1} + 2a) - 2a = x'_{2n-1} - 4a \\x'_{2n+2} = -x'_{2n+1} + 2a = -(-x'_{2n} - 2a) + 2a = x'_{2n} + 4a\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x'_{2n} = \frac{1}{2}a + 4na \\x'_{2n+1} = -\frac{5}{2}a - 4na\end{cases}\quad (8)$$

В Таблице 1 приведены рассчитанные значения координат (в см) нескольких первых изображений.

n	$x_{2n+1} = 2a - x_{2n}$	$x_{2n} = -2a - x_{2n-1}$	$x'_{2n+1} = -x_{2n} - 2a$	$x'_{2n+2} = -x'_{2n+1} + 2a$
1	15		-25	
2		-35		45
3	55		-65	
4		-75		85
5	95		-105	

Теперь следует определить, какие из этих изображений видны с указанной точки расположения глаза. Из рисунка следует, что область видимости определяется размером правого зеркала, которое можно рассматривать как «окошко» через которое рассматривают изображения. Область видимости ограничивается крайним верхним лучом, отраженным от этого зеркала.



Из подобия треугольников следует, максимальная координата x_{\max} точки оси, которая видна из точки A , определяется уравнением

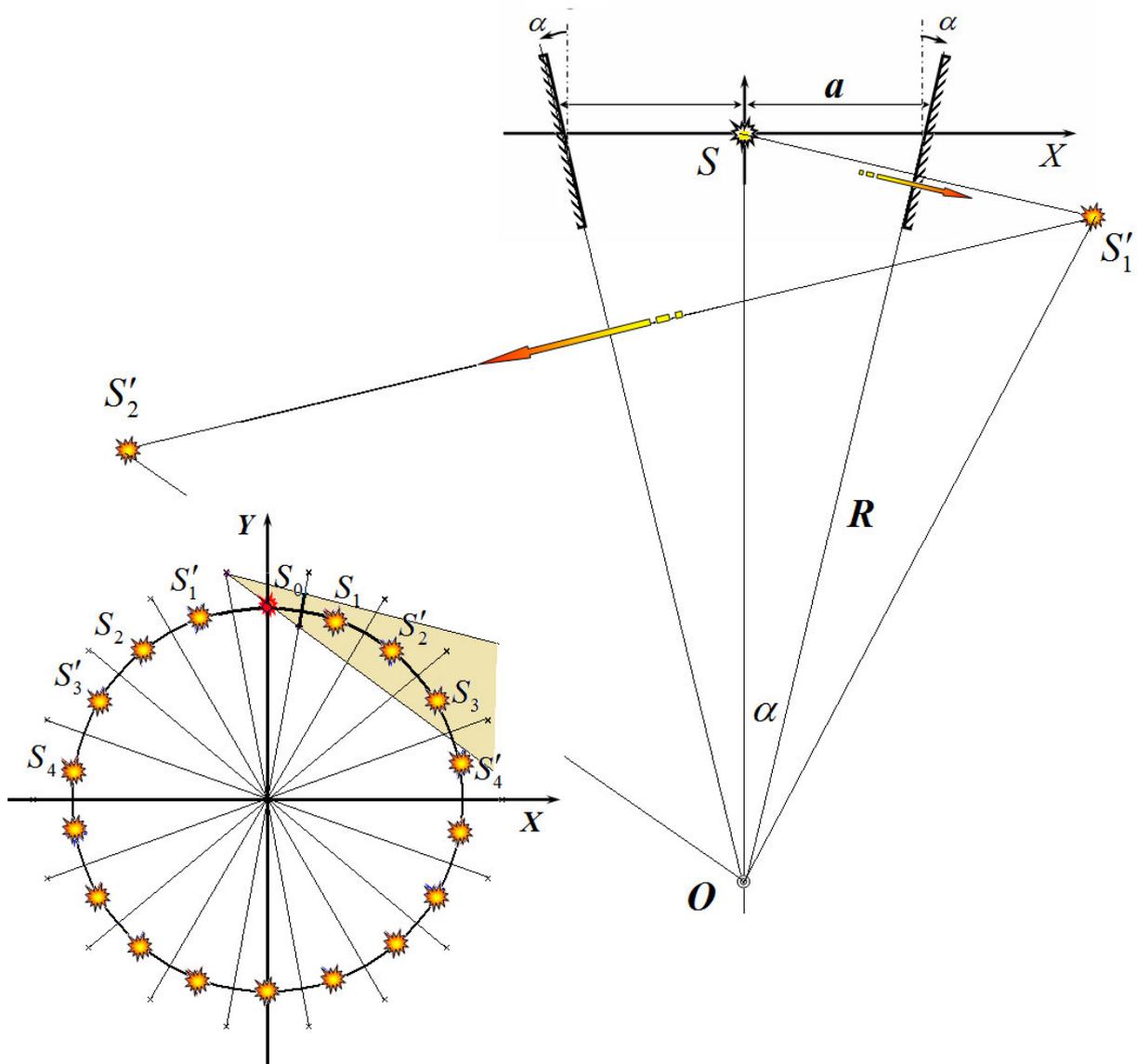
$$\frac{b}{x_{\max} + a} = \frac{0,5a}{x_{\max} + a},\quad (9)$$

Из которого следует, что

$$x_{\max} = \frac{ab + 0,5a^2}{b - 0,5a} = 26,7 \text{ см.} \quad (10)$$

Таким образом, при указанном положении глаза видно только одно изображение с координатой $x_1 = 15 \text{ см}$.

1.2 Если зеркала повернуть, то изображения выстоятся по окружности, центр которой O лежит в точке пересечения линий зеркал.



Действительно, первое изображение S'_1 расположено симметрично плоскости правого зеркала, т.е. на том же расстоянии от точки O , что и источник S , аналогично и для всех последующих изображений. Как и параллельном расположении зеркал, следует построить две серии изображений: в первой серии начиная с правого зеркала, во второй – с левого. Из рисунка следует, что радиус окружности, на которой лежат все изображения, равен

$$R = \frac{a}{\sin \alpha} \approx 57,6 \text{ см} \quad (11)$$

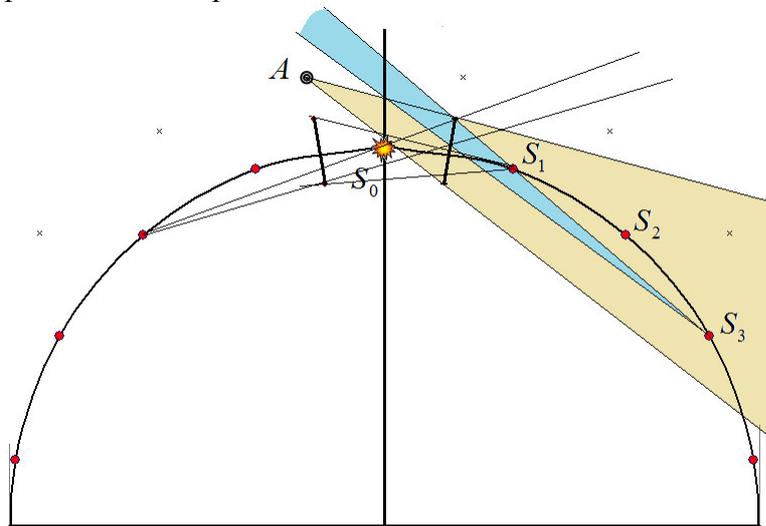
Также нетрудно заметить, что угловое расстояние между соседними изображениями равно $\Delta\varphi = 2\alpha = 20^\circ$. Для того, чтобы записать формулы для координат изображений

удобно сместить начало координат в центр окружности. В этой системе координаты изображений описываются простыми формулами

$$\begin{cases} x_k = R \sin k\Delta\varphi \\ y_k = R \cos k\Delta\varphi \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, 17. \quad (12)$$

Далее можно построить положения всех изображений, положение зеркал и глаза наблюдателя и анализ видимости провести геометрически.

Такое построение показано на рисунке. Опять, рассматривая зеркало, как «окошко» находим, что в область видимости попадают только три изображения (по нумерации формул (12)). Однако, в данном случае далеко лучи отраженные от зеркал не полностью покрывают следующее зеркало. Поэтому необходимо аккуратно построить крайние лучи, которые принимают участие в формировании следующего изображения. Такое построение



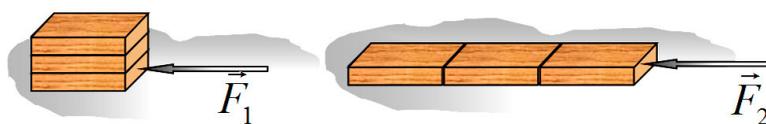
показывает, что третье изображение не видно с точки расположения глаза. На рисунке выделен пучок лучей, который формирует это изображение – глаз находится вне этого пучка!

Таким образом, в рассматриваемой ситуации видны только два изображения, координаты которых равны

$$\begin{cases} x_1 = 19,7 \text{ см} \\ y_1 = 54,1 \text{ см} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 37,0 \text{ см} \\ y_2 = 44,1 \text{ см} \end{cases}. \quad (13)$$

Задача 2. В память о лесосплаве

2.1 Чтобы сдвинуть бруски необходимо приложить силу превышающую силу трения. В соответствии с законом



Кулона-Амонтона сила трения не зависит от площади соприкосновения, а определяется силой нормальной реакции. В обоих случаях сила трения (и равная ей минимальная сила) равна

$$F = \mu N = 3\mu mg. \quad (1)$$

2.2 Между брусками, сложенными стопкой, действуют силы трения, максимальные значения которых равны:

- между верхним и средним

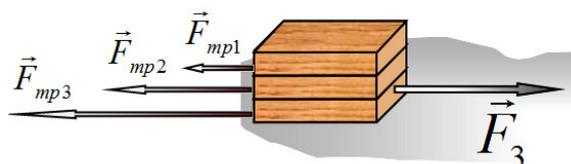
$$F_{mp1} = \mu mg, \quad (2)$$

- между средним и нижним

$$F_{mp2} = 2\mu mg, \quad (3)$$

- между нижним и столом

$$F_{mp3} = 3\mu mg. \quad (4)$$



Таким образом, если прикладывать внешнюю силу к среднему бруску, то нижний брусок не сдвинется: со стороны среднего будет действовать сила $F_{mp2} = 2\mu mg$, а тормозить его будет большая сила F_{mp3} . Следовательно, чтобы сдвинуть стопку целиком, внешнюю силу \vec{F}_3 следует прикладывать к нижнему бруску. Максимальная сила, которая сообщает ускорение среднему и верхнему брускам при движении нижнего, есть сила трения $F_{mp2} = 2\mu mg$. Поэтому максимальное ускорение, с которым могут двигаться вместе верхний и средний бруски, равно

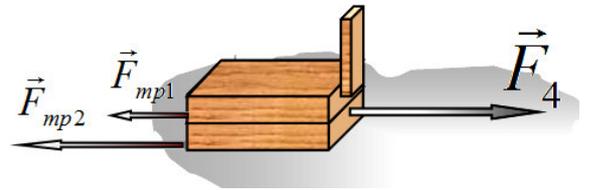
$$a_{\max} = \frac{2\mu mg}{2m} = \mu g. \quad (5)$$

Заметим, что максимальная сила трения, действующая на верхний брусок, равна $F_{mp1} = \mu mg$, поэтому она в состоянии сообщить и верхнему бруску такое же ускорение, следовательно, и верхний брусок при этом не сдвинется.

Таким образом, искомая сила \vec{F}_3 может быть найдена из условия, что все бруски движутся с ускорением a_{\max} :

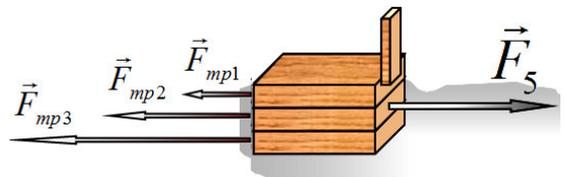
$$F_3 - 3\mu mg = 3ma_{\max} \Rightarrow F_3 = 6\mu mg. \quad (6)$$

2.3 Минимальная сила, которую следует приложить в этом случае, должна превышать суммарную силу трения, действующую на нижний брусок, как со стороны верхнего бруска, так и со стороны стола, т.е.



$$F_4 = \mu mg + 2\mu mg = 3\mu mg. \quad (7)$$

2.4 Как следует из рисунка, распределение сил, действующих на два верхних бруска, такое же, как и в предыдущем случае, поэтому минимальная сила, которая необходима для того, чтобы выдернуть средний брусок такая же



$$F_5 = 3\mu mg. \quad (8)$$

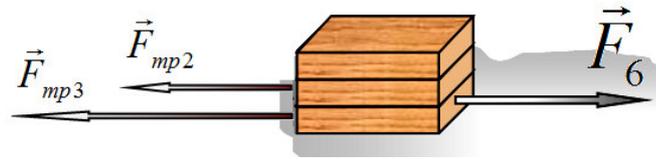
Как отмечалось ранее, нижний брусок при этом со своего места не сдвинется.

2.5 Чтобы выдернуть нижний брусок, необходимо сообщить ему ускорение большее, чем a_{\max} , найденное в п. 2.2. Записывая уравнение второго закона Ньютона для нижнего бруска,

$$ma_{\max} = F_6 - 5\mu mg, \quad (9)$$

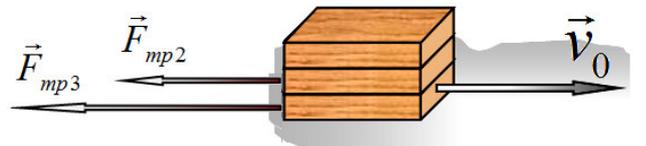
Получим

$$F_6 = 6\mu mg \quad (10)$$



2.6 Пока нижний брусок не выскочил из-под стопки на него действовала сила трения $5\mu mg$.

Уравнение движения нижнего бруска на



этом этапе имеет вид

$$ma = -5\mu mg . \quad (11)$$

Так как все силы постоянны, то движение бруска являлось равноускоренным, поэтому можно записать

$$m \frac{v_0 - v_1}{\Delta t} = 5\mu mg . \quad (12)$$

Отсюда следует, что длительность соскальзывания равно

$$\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{5\mu g} . \quad (13)$$

Два верхних бруска, как было показано ранее, будут двигаться вместе с ускорением $a = \mu g$. Поэтому к моменту соскальзывания с нижнего бруска верхние приобретут скорость

$$v_2 = \mu g \Delta t = \frac{v_0 - v_1}{5} . \quad (14)$$

При движении по столу путь бруска от начальной скорости V_0 до остановки можно найти по кинематической формуле

$$S = \frac{V_0^2}{2a} = \frac{V_0^2}{2\mu g} \quad (15)$$

Следовательно, после выскальзывания нижний брусок пройдет путь

$$S_1 = \frac{v_1^2}{2\mu g} , \quad (16)$$

а верхние

$$S_2 = \frac{(v_0 - v_1)^2}{50\mu g} . \quad (17)$$

Если $S_1 > S_2$, то расстояние между брусками после остановки будет равно

$$S_1 - S_2 = \frac{v_1^2}{2\mu g} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{50\mu g} . \quad (18)$$

В противном случае расстояние между брусками станет равным нулю. Это условие будет выполнено при

$$\frac{v_1^2}{2\mu g} < \frac{(v_0 - v_1)^2}{50\mu g} \Rightarrow 5v_1 < v_0 - v_1 \Rightarrow v_1 < \frac{v_0}{6} . \quad (19)$$

Задача 3. Равноускоренные колебания

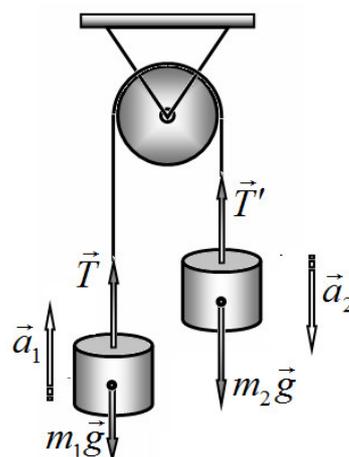
Хорошо известна задача о движении грузов на нити, переброшенной через блок.

Уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов (с учетом равенства модулей ускорений и равенства модулей сил натяжения нитей) имеют вид

$$\begin{aligned} m_2 a &= m_2 g - T \\ m_1 a &= T - m_1 g \end{aligned} \quad (1)$$

Из этой системы следует формула для ускорения грузов (положительное направление ускорения указано на рисунке)

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g. \quad (2)$$



Способ решения 1. Чисто кинематический.

Последовательно рассмотрим все этапы движения системы, описанной в условии задачи.

При движении вниз между уровнями *A* и *B* ускорение грузов в соответствии с полученной формулой (2) равно

$$a_1 = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_2 + m_3 + m_1} g = \frac{0,99 + 0,02 - 1,00}{0,99 + 0,02 + 1,00} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad (3)$$

Когда правый груз пройдет расстояние *h*, его скорость находится из формулы

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ah} \quad (4)$$

Если малый груз снят, то ускорение системы равно

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{0,99 - 1,00}{0,99 + 1,00} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx -5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad (5)$$

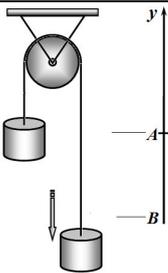
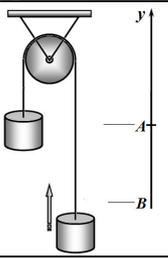
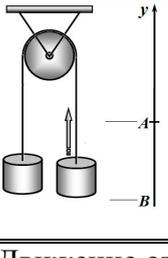
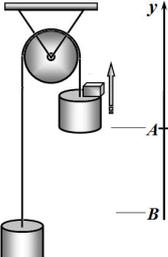
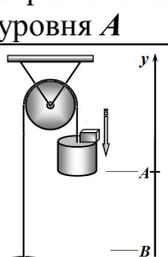
Дальнейшее движение будет происходить с отрицательным ускорением, путь, который пройдет до остановки, и минимальная координата находится по формулам

$$\Delta y = \frac{v_1^2}{2a_2} \Rightarrow y_{\min} = -h - \frac{v_1^2}{2a_2} \quad (6)$$

Остальные формулы для расчета характерных точек находятся аналогично. Для удобства численных расчетов все формулы сведены в единую таблицу. В таблице модуль ускорения обозначен $a = 5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, в строках скоростей и ускорений приведены их проекции на вертикальную ось *y*.

Таблица 1. Кинематический расчет закона движения

	Параметр	Формула
	Начальная скорость	v_0
	Ускорение	$a_1 = -a$
	Конечная скорость	$v_1 = -\sqrt{v_0^2 + 2ah}$
	Конечная координата	$-h$
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_1 - v_0}{a} \right $

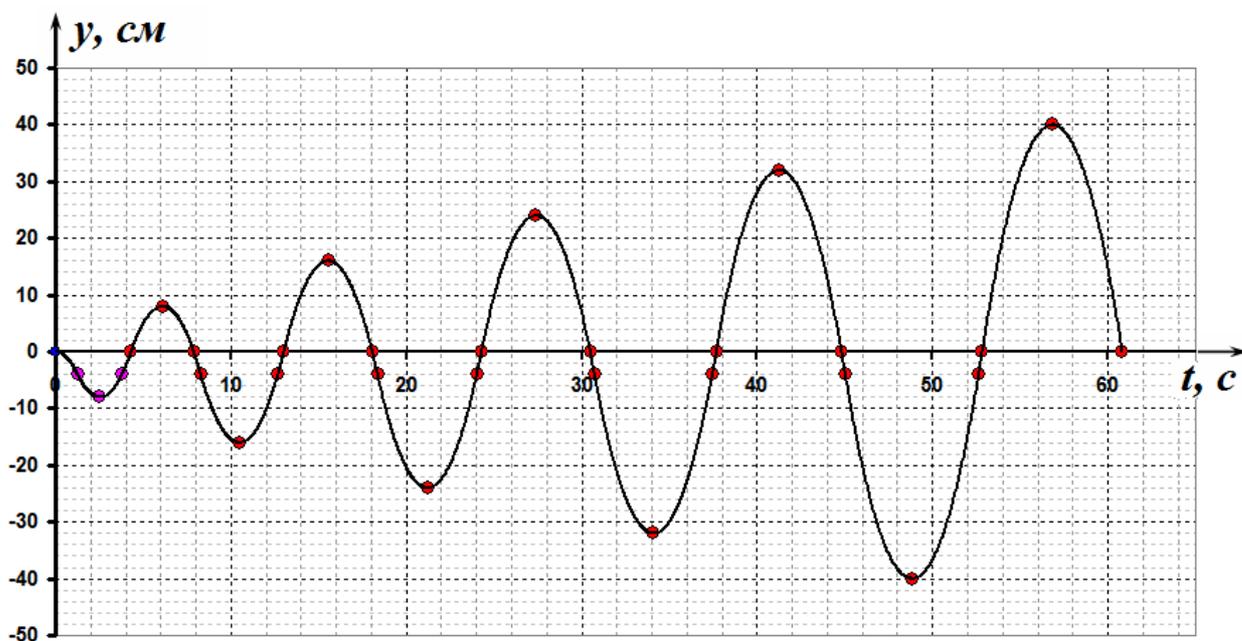
<p>Движение вниз от уровня B до нижней точки</p> 	Начальная скорость	v_1
	Ускорение	$a_2 = a$
	Конечная скорость	0
	Конечная координата	$y_{\min} = -h - \frac{v_1^2}{2a}$
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_1}{a} \right $
<p>Движение вверх от нижней точки до уровня B</p> 	Начальная скорость	0
	ускорение	$a_2 = a$
	Конечная координата	$-h$
	Конечная скорость	$-v_1$
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_1}{a_2} \right $
<p>Движение вверх между уровнями AB</p> 	Начальная скорость	$-v_1$
	Ускорение	$a_2 = a$
	Конечная координата	0
	Конечная скорость	$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2ah}$
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_2 - v_1}{a} \right $
<p>Движение от вверх от уровня A до верхней точки</p>	Начальная скорость	v_2
	Ускорение	$a_2 = -a$
	Конечная скорость	0
	Конечная координата	$y_{\max} = \frac{v_2^2}{2a}$
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_2}{a} \right $
<p>Движение вниз от верхней точки до уровня A</p>	Начальная скорость	0
	Ускорение	$a_2 = -a$
	Конечная скорость	$-v_2$
	Конечная координата	0
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_2}{a} \right $

Результаты необходимых численных расчетов приведены в таблице 2. (координаты в см, время в с)

Таблица 2. Расчет закона движения

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t
y_A	0,0	0,00	0,0	7,90	0,0	18,08	0,0	30,50	0,0	44,83
y_B	-4,0	1,26	-4,0	8,30	-4,0	18,38	-4,0	30,75	-4,0	45,05
y_{\min}	-8,0	2,53	-16,0	10,49	-24,0	21,21	-32,0	34,10	-40,0	48,84
y_B	-4,0	3,79	-4,0	12,68	-4,0	24,03	-4,0	37,44	-4,0	52,64
y_A	0,0	4,32	0,0	13,02	0,0	24,30	0,0	37,67	0,0	52,84
y_{\max}	8,0	6,11	16,0	15,55	24,0	27,40	32,0	41,25	40,0	56,84

График рассчитанной зависимости показан на рисунке.



Проведенные расчеты показывают, зависимости минимального и максимального смещения от номера цикла имеют простой вид

$$\begin{aligned}
 y_{\min} &= -8,0n \text{ (см)} \\
 y_{\max} &= +8,0n \text{ (см)}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Способ решения 2. «Энергетически-кинематический»

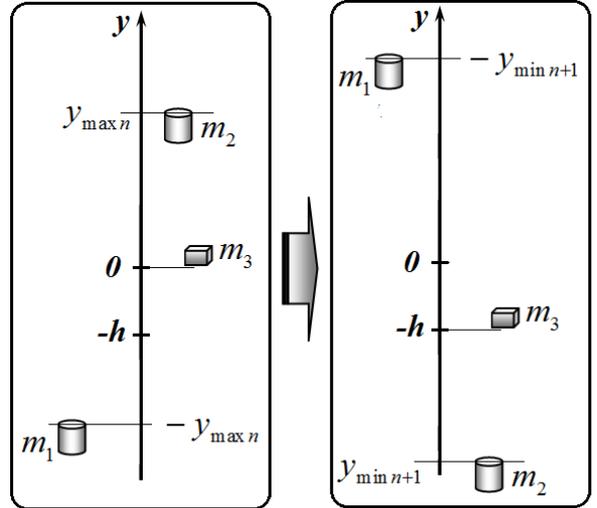
Полученные соотношения слишком просты, чтобы быть случайными – поэтому возможен второй, более «быстрый» способ решения, основанный не только на кинематических формулах. Заметим, что система получает дополнительную энергию при движении вниз с грузом m_3 .

Рассмотрим изменение энергии системы между крайними точками, в которых скорости грузов равны нулю.

а) Опускание: груз m_2 движется от крайнего верхнего положения $y_{\max n}$ до следующего крайнего нижнего положения $y_{\min n+1}$. На этом этапе груз m_3 опустился на высоту h (от уровня A до уровня B). Начальные и конечные положения всех грузов показаны на рисунке. Поэтому уравнение закона сохранения энергии имеет вид

$m_2 y_{\max n} - m_1 y_{\max n} = m_2 y_{\min n+1} - m_1 y_{\min n+1} - m_3 h$,
из которого следует (с учетом численных значений масс грузов):

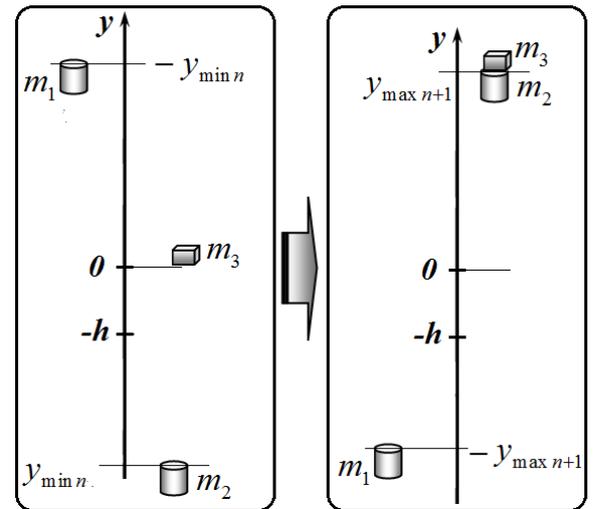
$$y_{\min n+1} = y_{\max n} + \frac{m_3}{m_2 - m_1} h = y_{\max n} - 2h.$$



б) Подъем: груз m_2 поднимается от крайнего нижнего положения $y_{\min n}$ до следующего крайнего верхнего положения $y_{\max n+1}$. Учитывая, что груз m_3 кладут на уровне A , изобразим начальные и конечные положения грузов и запишем уравнение закона сохранения энергии в этом случае

$m_2 y_{\min n} - m_2 y_{\min n} = (m_2 + m_3) y_{\max n+1} - m_1 y_{\max n+1}$,
из которого находим (опять с учетом масс грузов)

$$y_{\max n+1} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_3 - m_1} y_{\min n} = -y_{\min n}.$$



Полученные формулы сразу приводят к полученным ранее формулам (7). Далее традиционным способом находим ускорения грузов при движении с грузом m_3

($a_1 = -a = -5,0 \frac{cM}{c^2}$) и без него ($a_2 = +a = 5,0 \frac{cM}{c^2}$).

Далее отмечаем, что движение без дополнительного груза m_3 происходит на участках $-h \rightarrow y_{\min} \rightarrow -h \rightarrow 0$, а движение с дополнительным грузом на участках $0 \rightarrow y_{\max} \rightarrow 0 \rightarrow -h$. Так как модули ускорений на этих участках одинаковы и максимальные смещения также одинаковы, то графики законов движения (параболы) на этих участках тоже одинаковы, только перевернуты. Эти рассуждения позволяют заметно сократить расчеты, начиная каждый цикл с момента прохождения вниз уровня B . Сначала следует «подойти» к началу первого цикла: рассчитать время первого прохождения точки

$y = -h$ по формуле $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 4,0c$. После этого рассчитать максимальное смещение

груза в цикле по формуле $Y = 8n(\text{см})$, а также три интервала времени прохождения соответствующих отрезков (они показаны на рисунке) по формулам

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y-h}{2a}} = \sqrt{8n-4} = 2\sqrt{2n-1}$$

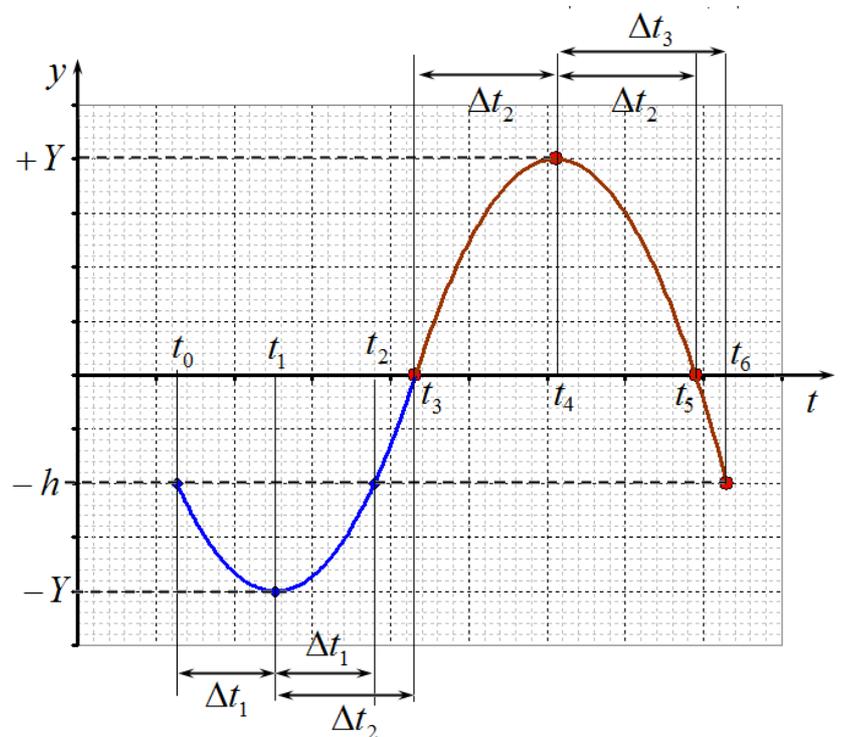
$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{Y}{2a}} = \sqrt{8n} = 2\sqrt{2n}$$

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y+h}{2a}} = \sqrt{8n+4} = 2\sqrt{2n+1}$$

После чего вычисления времен прохождения каждой характерной точки рассчитываются простым суммированием (для удобства схема расчета сведена в таблицу 3.

Таблица 3. Схема расчета времен характерных точек.

	$n =$
	$Y = 8n =$
	$\Delta t_1 = 2\sqrt{2n-1}$
	$\Delta t_2 = 2\sqrt{2n}$
	$\Delta t_3 = 2\sqrt{2n+1}$
y	t
-4	$t_0 =$
-Y	$t_1 = t_0 + \Delta t_1$
-4	$t_2 = t_1 + \Delta t_1$
0	$t_3 = t_1 + \Delta t_2$
+Y	$t_4 = t_3 + \Delta t_2$
0	$t_5 = t_4 + \Delta t_2$
-4	$t_6 = t_4 + \Delta t_3$



Очевидно, что результаты расчетов по этой схеме приводят к тем же результатам.

Задача 10-1. Вода из воздуха

1.1. Согласно определению относительной влажности начальное давление водяного пара в сосуде составляет $p_1 = \varphi p_{н1}$, где $p_{н1}$ – давление насыщенного водяного пара при комнатной температуре T_1 . Из графика на бланке можно определить: $p_{н1} \approx 2,35$ кПа. Стоит отметить, что парциальное давление водяного пара в полном давлении воздуха в сосуде составляет лишь тысячные части, а поскольку, согласно числовым данным задачи, требуемая точность решения составляет две значащие цифры, в дальнейшем влиянием водяного пара на полное давление воздуха можно будет пренебречь.

При изотермическом сжатии сосуда давление газов в нем, в том числе и водяного пара, будет увеличиваться. По достижению давления $p_{н1}$ последний начнет конденсироваться. Используя выражение для квазистационарного изотермического процесса с водяным паром, считая его идеальным газом, получим $\varphi p_{н1} V_1 = p_{н1} V_в$, где $V_в$ – объем газов в сосуде, при котором начнет появляться влага. Отсюда:

$$V_в = \varphi V_1 = 0,77 \cdot 5,0 \text{ л} = 3,85 \text{ л}$$

Требуемая точность вычислений, согласно данным в условии задачи, – две значащие цифры. Однако мы будем приводить три из них для того, чтобы полученные величины можно было использовать в дальнейших вычислениях, не опасаясь за нарастание погрешности округления. Повторимся, окончательный ответ получается путем округления всех полученных в решении величин до двух значащих цифр.

1.2. Максимальное давление газов в сосуде, оказываемое как Федей, так и атмосферой, составляет $1,5p_{атм}$. Пренебрегая парциальным давлением водяного пара и объемом образовавшейся жидкости, запишем уравнение для изотермического процесса с воздухом в сосуде: $p_{атм} V_1 = 1,5 p_{атм} V_2$, откуда:

$$V_2 = V_1 / 1,5 = 5,0 \text{ л} / 1,5 = 3,33 \text{ л}$$

Сравнивая результаты пунктов А1 и А2 видим, что Федея установка действительно позволяет конденсировать водяной пар.

1.3 Так как давление водяного пара не может быть больше насыщенного, при уменьшении объема после значения $V_в$ оно будет оставаться постоянным за счет уменьшения химического количества водяного пара в сосуде. Уменьшение произойдет на количество, соответствующее количеству образовавшейся воды. Химическое количество водяного пара в начальном и конечном состоянии можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$, а массу воды найдем, зная ее молярную массу:

$$m_A = M(\nu_1 - \nu_2) = M \left(\frac{\varphi p_{н1} V_1}{RT_1} - \frac{p_{н1} V_2}{RT_1} \right) = \frac{M p_{н1}}{RT_1} (\varphi V_1 - V_2) = \frac{M p_{н1}}{RT_1} (V_в - V_2)$$

$$m_A = \frac{1,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 2,35 \cdot 10^3 \text{ Па}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} (273 + 20) \text{ К}} (3,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 - 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) = 9,03 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

Таким образом, за одно сжатие Федея может получить всего 9,03 мг воды.

1.4. Стакан воды можно насобирать за $N_A = m_c / m_A = 22148$ сжатий.

1.5 Несмотря на особенности изменения давления водяного пара при сжатии содержимого сосуда, основное количество работы, совершаемое Федей, определяется

давлением всего воздуха, так как последнее гораздо больше. Ввиду того, что давление газов в сосуде изменяется в ходе изотермического процесса, для грубой оценки совершенной работы будем использовать среднее арифметическое значение: $p_{\text{ср}} = (p_{\text{атм}} + 1,5p_{\text{атм}})/2 = 1,25p_{\text{атм}}$. Тогда работа, совершенная Федей, равна работе газа, взятой со знаком «минус», и определяется выражением:

$$A_{\text{сж}} = -p_{\text{ср}}(V_2 - V_1) = 211 \text{ кДж}$$

1.6 От начала процесса до точки конденсации водяного пара диаграмма соответствует изотермическому процессу и представляет собой участок гиперболы. Далее процесс конденсации происходит при постоянном давлении (насыщенного пара). Обратное расширение после сбора влаги снова протекает изотермически по участку другой гиперболы из-за нового химического количества пара до первоначального объема. Далее при постоянном объеме и открытом отверстии химическое количество пара возвращается к первоначальному (возвращается исходная влажность воздуха) и диаграмма замыкается. Схематичное изображение процесса представлено на рисунке 1.

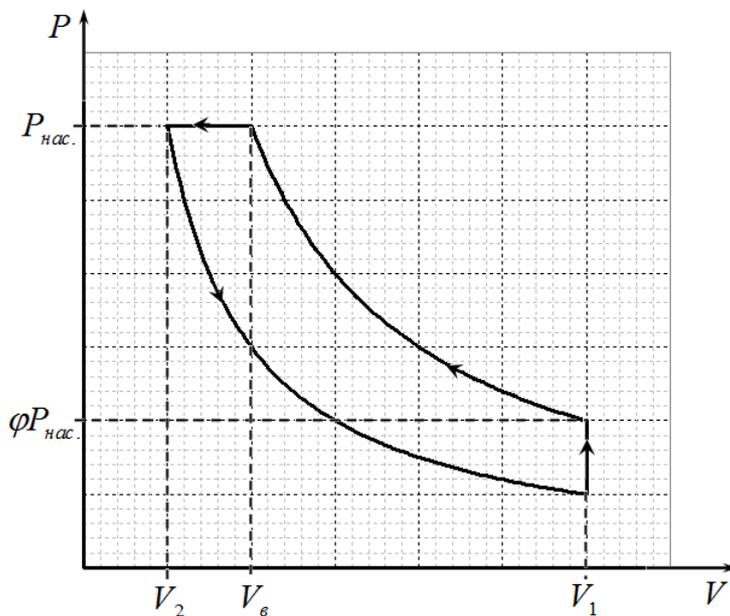


Рисунок 1 - Схематическая p-V диаграмма цикла

1.7 В ходе циклического процесса весь воздух в сосуде, пренебрегая парциальным давлением водяного пара, при сжатии и расширении проходит через одни те же состояния. Тогда работа, затраченное на сжатие и расширение всего воздуха по модулю совпадает и в сумме дает нуль. Следовательно, стоит присмотреться к работе, затраченной на процесс, произведенный непосредственно с водяным паром, даже если его парциальное давление незначительно (оно все же больше нуля). Последнюю можно рассчитать, как площадь, ограниченную построенной p-V диаграммой цикла.

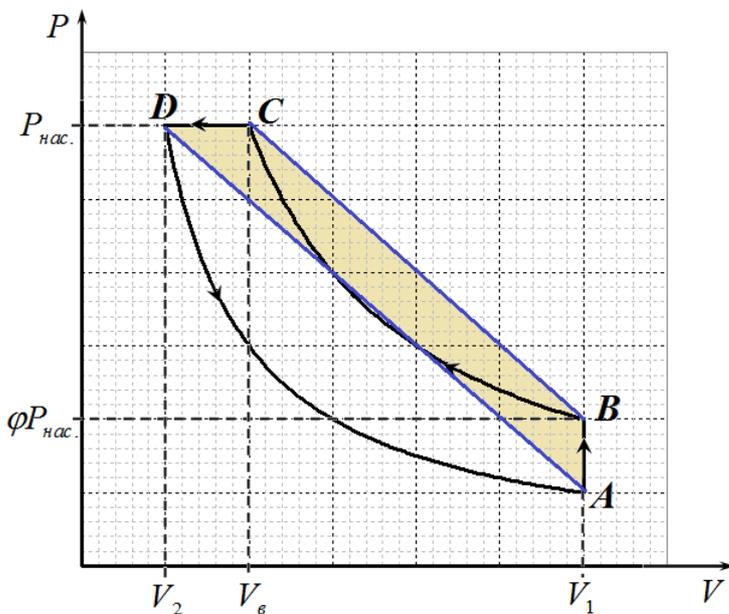


Рисунок 2 - Построения на диаграмме для расчета работы

Для грубой оценки этой работы «спрямим» криволинейные участки (рис. 2). Для расчета площади построим фигуру до треугольника CED. Также нам понадобится давление в точке D. Его можно найти, используя уравнение изотермы BC: $p_{\text{н1}}V_2 = p_{\text{с}}V_1$. Отсюда:

$p_D = p_{H1} \cdot V_2/V_1 = 1,57$ кПа. Работа Феи равна работе газа в ходе цикла, взятой со знаком минус. Учитывая тот факт, что цикл на диаграмме направлен против часовой стрелки, работа экспериментатора будет равна просто площади, ограниченной диаграммой $ABCD$, которую можно рассчитать как разность площадей треугольников:

$$A_A = S_{ABCD} = S_{CED} - S_{BEA} = \frac{1}{2} (CE \cdot DE - BE \cdot AE)$$

$$A_A = \frac{1}{2} ((V_1 - V_2)(p_{H1} - p_D) - (V_1 - V_2)(p_{H1} - \varphi p_{H1})) = 0,341 \text{ Дж}$$

1.8 Согласно определению введенной удельной работы конденсации получаем:

$$\Theta_A = A_A/m_A = 37,7 \text{ кДж/кг}$$

Задача 10- 2. Слоистые резисторы

1.1 Мысленно разобьем проводник на тонкие коаксиальные трубки, толшины Δr_i которых значительно меньше их радиуса r_i ($\Delta r_i \ll r_i$).



Одна из таких трубок, сопротивление которой $R_i = \rho_i \frac{l}{S_i}$, выделена на рисунке. В данном случае трубки соединены параллельно, следовательно, сопротивление резистора следует искать по закону параллельного соединения резисторов



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\rho_i l} = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi r_i \Delta r_i}{l \alpha r_i} = \frac{2\pi}{\alpha l} \sum_{i=1}^n \Delta r_i = \frac{2\pi a}{\alpha l}, \quad (1)$$

где $S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$ – площадь поперечного сечения выделенной на рисунке тонкой трубки.

Следовательно, сопротивление резистора в данном случае

$$R_1 = \frac{\alpha l}{2\pi a} = 10 \text{ Ом} . \quad (2)$$

1.2 Сила тока через резистор в этом случае

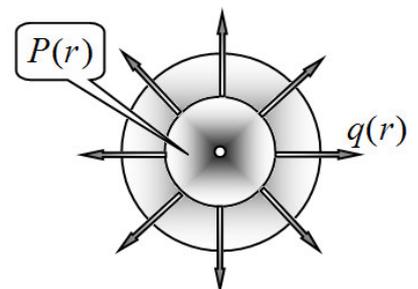
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l} U = 0,15 \text{ А} . \quad (3)$$

Соответственно, выражение для выделяемой мощности принимает вид

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l} U^2 = 0,23 \text{ Вт} . \quad (4)$$

Поскольку удельное сопротивление данного резистора минимально на оси цилиндра, то, согласно (4) больше всего будет нагреваться его сердцевина.

1.3 В установившемся режиме количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в цилиндре некоторого радиуса r (т.е. тепловой поток $q(r)$), должно отводиться наружу через его боковую поверхность $S = 2\pi r l$. В противном случае температура трубки должна была бы меняться. Из формулы (1) следует, что проводимость любого цилиндра, находящегося внутри рассматриваемого



резистора и коаксиального с ним, пропорциональна радиусу этого цилиндра. Поэтому выражение для мощности теплоты, выделяющейся внутри выделенного цилиндра, аналогично формуле (4). Тогда уравнение для потока теплоты будет иметь вид

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\alpha l} U^2 = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot S = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot 2\pi r l \Rightarrow \Delta T = -\frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} \Delta r . \quad (5)$$

Согласно (5) приращение температуры данного слоя обратно по знаку приращению радиуса резистора, т.е. температура внутри него падает при увеличении r . Это означает, что максимальная температура резистора будет на его оси симметрии. Так и должно быть, поскольку теплота самопроизвольно перетекает от горячего слоя к холодному, а не наоборот

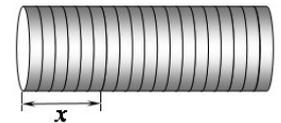
Суммируя (5) по всем слоям, найдем, что максимальная температура $T_{\max 1}$ в центре резистора будет равна

$$T_{\max 1} = T_0 - \Delta T = T_0 + \frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} a = 46^\circ\text{C} . \quad (6)$$

2. «Блинная структура»

3.

2.1 Рассмотрим блинную структуру. В этом случае сопротивление зависит от расстояния по закону $\rho(x) = \alpha \cdot x$, следовательно, для вычисления сопротивления последовательно соединенных «блинов» справедливо выражение



$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \frac{\Delta x_i}{S} = \frac{\alpha}{S} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x_i = \\ &= \frac{\alpha l^2}{2S} = \frac{\alpha l^2}{2\pi a^2} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ Ом} = 0,10 \text{ кОм} \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 Силу тока в резисторе найдём по закону Ома

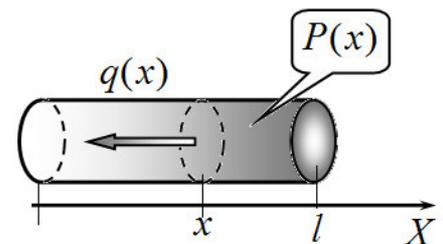
$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U = 15 \text{ мА} \quad (8)$$

Согласно закону Джоуля-Ленца мощность тока, выделяемая в таком проводнике

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U^2 = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} = 23 \text{ мВт} . \quad (9)$$

Поскольку удельное сопротивление возрастает слева направо, то при прохождении тока больше нагреется правый конец цилиндра, где его удельное сопротивление больше.

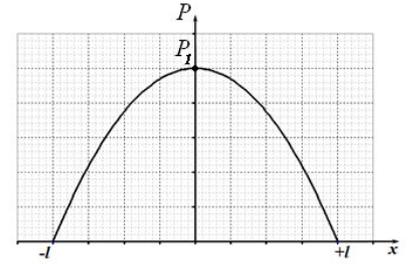
2.3 Как следует из формулы (7), сопротивление резистора на участке от x до l равно $R_{l-x} = \frac{\alpha}{2S} (l^2 - x^2)$. Поскольку сила тока в любом поперечном сечении резистора одинакова, то мощность тока, выделяемая на рассматриваемом участке резистора длиной $l - x$, может быть найдена как



$$P_{l-x} = I_2^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \left(\frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U \right)^2 \frac{\alpha(l^2 - x^2)}{2S} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2). \quad (10)$$

График этой функции представляет собой параболу (см. рис.), ветви которой направлены вниз.

В установившемся режиме тепловой поток $q(x)$, проходящий через поперечное сечение проводника на расстоянии x от его конца (см. рис) должен быть равен мощности, выделяющейся справа от рассматриваемого сечения (10), иначе температура резистора продолжала бы меняться. Согласно закону Фурье для теплопередачи



$$q(x) = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta x} S = P_{l-x} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4} (l^2 - x^2). \quad (11)$$

Выражая из (12) малое приращение температуры, получим

$$\Delta T = -\frac{2\pi a^2 U^2}{S \gamma \alpha l^4} (l^2 - x^2) \Delta x. \quad (12)$$

Знак «-» в (12) говорит о том, что тепловой поток направлен против положительного направления оси Ox .

Суммируя (12), получим, что повышение температуры правого конца стержня пропорционально площади под графиком параболы. С учетом замечания из условия задачи, имеем

$$T_{\max 2} = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{2\pi a^2 U^2}{\gamma \alpha l^4} \sum (l^2 - x_i^2) \Delta x_i = T_0 + \frac{2U^2}{\gamma \alpha l^2} \cdot \frac{2}{3} l = 370^\circ\text{C} = 3,7 \cdot 10^2 \text{C}. \quad (13)$$

2.4 В рассматриваемом случае плотность тока ($j = I/S$, $[j] = \text{A}/\text{m}^2$) не меняется вдоль резистора, поскольку площадь его поперечного сечения остается постоянной. Так как удельное сопротивление рассматриваемого резистора изменяется, то должна изменяться и напряженность поля внутри цилиндра, что возможно только при накоплении объемных зарядов внутри него! Согласно закону Ома в дифференциальной форме (для плотности тока) можем записать

$$j = \frac{1}{\rho} \cdot E \Rightarrow E = \rho \cdot j, \quad (14)$$

где E – напряженность электрического поля в данном сечении резистора. С учетом зависимости $\rho(x) = \alpha \cdot x$ получаем

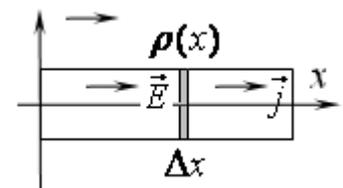
$$E(x) = \alpha x \cdot \frac{I_2}{S} = \frac{2U}{l^2} \cdot x. \quad (16)$$

Следовательно, для приращения напряженности электрического поля справедливо выражение

$$\Delta E = j \cdot \Delta \rho. \quad (15)$$

Приращение напряженности поля связано с объемным зарядом, «сядущим» на малом слое проводника толщиной Δx

$$\Delta E = \frac{\rho \Delta x}{\epsilon_0} \Rightarrow j \Delta \rho = \frac{\rho^* \Delta x}{\epsilon_0} \quad \rho^* = \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \epsilon_0 j. \quad (16)$$



При выводе этого соотношения использована формула для

напряженности поля, создаваемого тонким слоем заряда.

2.6 Используя (16), суммируя по слоям, найдем полный заряд, «сидящий» внутри резистора на всем его протяжении

$$q^* = \sum_{i=1}^n q_i^* = \sum_{i=1}^n \rho_i^* S \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \epsilon_0 j S \Delta \rho_i = \epsilon_0 j S \sum_{i=1}^n \Delta \rho_i = \epsilon_0 I a l = \frac{2\pi \epsilon_0 a^2}{l} U = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Кл} . \quad (17)$$

Интересно, что согласно (18), это соответствует динамической емкости резистора

$$C = \frac{q^*}{U} = \frac{2\pi \epsilon_0 a^2}{l} = \frac{2\epsilon_0 S}{l} = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ Ф} = 0,11 \text{ пФ} . \quad (18)$$

Задача 10- 3. Просто цепь

Первоначально цепь может показаться симметричной относительно горизонтальной линии, проходящей через центр рисунка, что позволило бы отбросить участок цепи KE (рисунок 1), поскольку ток через него не идет. Однако такое предположение неверно, поскольку элементы с несимметричной вольтамперной характеристикой – диоды – включены навстречу друг другу. Если напряжение приложено к диоду в обратном направлении, то, согласно вольтамперной характеристике, ток через него не идет. Так, ток не пойдет через нижний диод D .

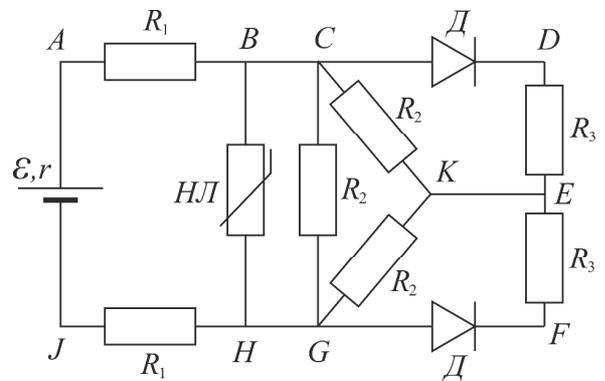


Рисунок 3 - Схема электрической цепи с обозначениями ключевых точек

Действительно, если предположить, что через оба диода ток в соответствующем направлении все же идет, то получим, что потенциал в точках C и G больше потенциала в точке E . Но тогда токи в узел K со всех сторон будут входить и никуда не выходя, чего быть не может. Таким образом, ток через нижний диод D на самом деле не будет проходить и, соответственно, ток через нижний резистор R_3 равен нулю. Поскольку ток и напряжение резисторе связаны линейным соотношением, то напряжение на нижнем резисторе R_3 также равно нулю. В силу отсутствия тока для дальнейшего изучения цепи участок GFE можно отбросить (рис. 2).

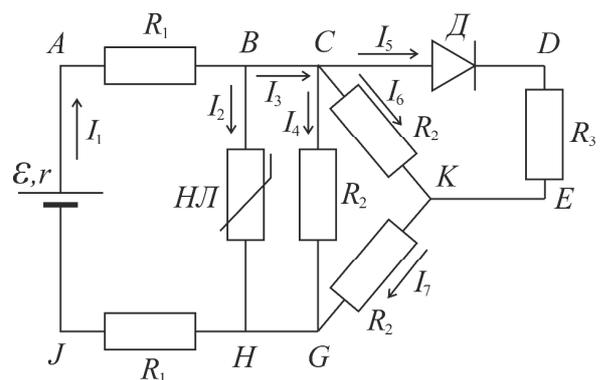


Рисунок 4 - Схема электрической цепи после отбрасывания участка с "закрытым" диодом

Так как вольт-амперная характеристика для нелинейного элемента задана графически, то для нахождения тока I_2 , проходящего через него, будем использовать графический метод. Для этого необходимо найти связь между напряжением на нелинейном элементе U_{BH} и током через него I_2 , определяемую всеми остальными элементами цепи.

Начнем рассмотрение с узла C . В нем разветвляется ток I_3 , что позволяет записать следующее соотношение для токов: $I_3 = I_4 + I_5 + I_6$. Все токи можно выразить через соответствующие напряжения с помощью закона Ома для участка цепи с резисторами:

$$I_4 = \frac{U_{CG}}{R_2}; \quad I_5 = \frac{U_{DE}}{R_3}; \quad I_6 = \frac{U_{CK}}{R_2}$$

Изучая вольтамперную характеристику диода при его прямом включении можно заметить, что в случае напряжения на элементе, меньшего $U_d = 0,70$ В, ток не пойдет. В противном случае через диод может проходить любой ток, при этом на элементе падение напряжения будет равно U_d . Будем считать, что через диод ток протекает. В случае неверного предположения мы получим явно некорректный результат в виде, например, обратного направления тока через оставшийся резистор R_3 .

Получаем, что напряжение U_{DE} можно выразить: $U_{DE} = U_{CK} - U_d$. Поскольку в итоге мы хотим получить связь напряжения и тока в нелинейном элементе, то будем пытаться выразить все имеющиеся напряжения через $U_{CG} = U_{BH}$. Для участка KG с резистором R_2 можно записать $U_{KG} = I_7 R_2$, что приводит к:

$$U_{CG} - U_{CK} = (I_5 + I_6)R_2 = \left(\frac{U_{DE}}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2}\right)R_2 = \left(\frac{U_{CK} - U_d}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2}\right)R_2$$

Отсюда можно выразить:

$$U_{CK} = \frac{U_{CG} + U_d \frac{R_2}{R_3}}{2 + \frac{R_2}{R_3}} = \frac{U_{CG} R_3 + U_d R_2}{2R_3 + R_2}$$

$$U_{DE} = U_{CK} - U_d = (U_{CG} - 2U_d) \frac{R_3}{2R_3 + R_2} \quad (1)$$

Тогда, возвращаясь назад к току I_3 , получим:

$$I_3 = I_4 + I_5 + I_6 = \frac{U_{CG}}{R_2} + \frac{U_{DE}}{R_3} + \frac{U_{CK}}{R_2} = U_{CG} \frac{2R_2 + 3R_3}{R_2(R_2 + 2R_3)} - \frac{U_d}{R_2 + 2R_3}$$

Ток через источник разветвляется в узле B следующим образом: $I_1 = I_2 + I_3$. С другой стороны, этот ток можно определить из закона Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

Полное сопротивление всей цепи R можно записать как сумму сопротивлений двух резисторов R_1 , включенных последовательно с источником, и сопротивления оставшейся цепи, которое выразим через закон Ома:

$$R = 2R_1 + \frac{U_{BH}}{I_1}$$

Тогда из последних двух выражений можно получить выражение для тока:

$$I_1 = \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2R_1} \quad (2)$$

Наконец, получаем выражение для тока через нелинейный элемент, учитывая равенство напряжений $U_{BH} = U_{CG}$:

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{\varepsilon - U_{BH}}{r + 2R_1} - U_{BH} \frac{2R_2 + 3R_3}{R_2(R_2 + 2R_3)} + \frac{U_d}{R_2 + 2R_3} \quad (3)$$

Полученное выражение представляет собой зависимость силы тока I_2 , протекающей через нелинейный элемент HL , от напряжения на нем U_{BH} . Подставив численные значения характеристик, получим:

$$I_2 = 0,094 \text{ A} - 0,125 \text{ см} \cdot U_{BH}$$

Данная зависимость определяет прямую, которую можно провести на вольт-амперной характеристике нелинейного элемента (рисунок 3).

Координаты точки пересечения графиков как раз определяют ток и напряжение на нелинейном элементе. Получаем: $I_2 \approx 0,042$ А, $U_{BH} \approx 0,41$ В. Тогда по формуле (1), полученной ранее, найдем напряжение на оставшемся резисторе R_3 :

$$U_{DЭ} = (U_{BH} - 2U_d) \frac{R_3}{2R_3 + R_2} = -0,297 \text{ В}$$

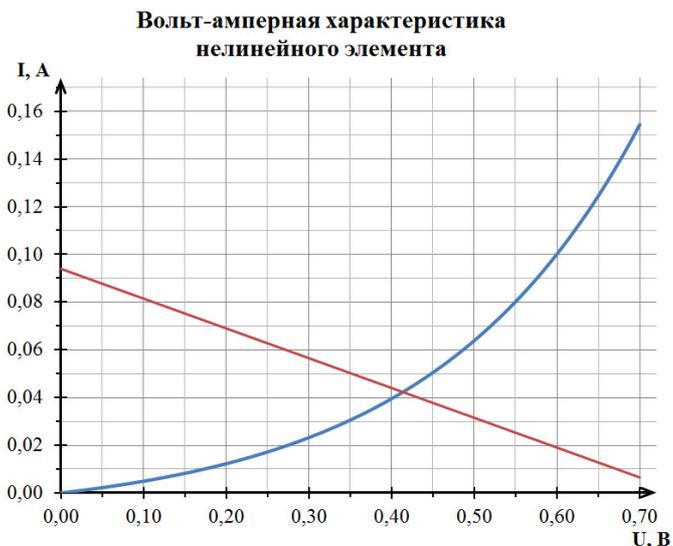


Рисунок 5 - Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента с пересечением прямой, характеризующей цепь

Полученный отрицательный результат говорит о том, что ток идет через резистор R_3 в направлении, обратном предполагаемому, чего быть не может. Получаем, что допущение о том, что через верхний диод D ток идет, неверно. То есть напряжение на участке $СК$ меньше, чем U_d (в этом можно убедиться, проведя расчеты по имеющимся формулам), что недостаточно для «открытия» диода. Таким образом, можно сделать вывод, что ток через оставшийся резистор R_3 не пойдет и, соответственно, напряжение на нем будет равно нулю.

Ответ: токи и напряжения на обоих резисторах R_3 равны нулю.

Примечания:

Задачу можно было решить и альтернативным способом, с самого начала предположив, что токи через оба диода не пойдут. Тогда, проведя необходимые вычисления данной электрической цепи, необходимо было бы показать, что напряжение на участке $СК$ меньше, чем U_d .

Наконец имеется еще один, самый короткий, способ решения. Руководствуясь значениями ЭДС источника, его внутреннего сопротивления и сопротивлений R_1 , можно рассчитать, что максимально возможная сила тока в цепи составляет 0,080 А. Тогда, согласно вольт-амперной характеристике нелинейного элемента, максимальное напряжение на нем – 0,55 В. Отсюда следует, что напряжение на диодах не сможет превысить достаточного $U_d = 0,70$ В, чтобы ток через них проходил. Отсюда сразу следует ответ данной задачи.

После того, как участки цепи с диодами оказались выключенными, осталось рассчитать силу тока через резисторы R_1 . Три резистора R_2 можно заменить на резистор с сопротивлением $\frac{3}{2}R_2$. Тогда рассматриваемая схема приобретет вид, показанный на рис. 4.

Для расчета этой цепи можно воспользоваться уже использованным графическим методом, основанном на уравнениях (2)-(3). Так как участок цепи с диодами отключен, то в уравнении (3) следует положить $R_3 \rightarrow \infty$, в результате чего получим

$$I_2 = \frac{\varepsilon - U}{r + 2R_1} - \frac{3U}{2R_2}$$

Здесь обозначено $U = U_{BH}$ - напряжение на нелинейном элементе. Подставляя численные значения, получим

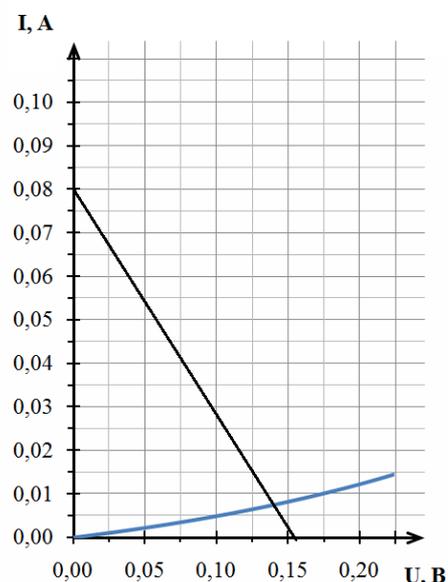
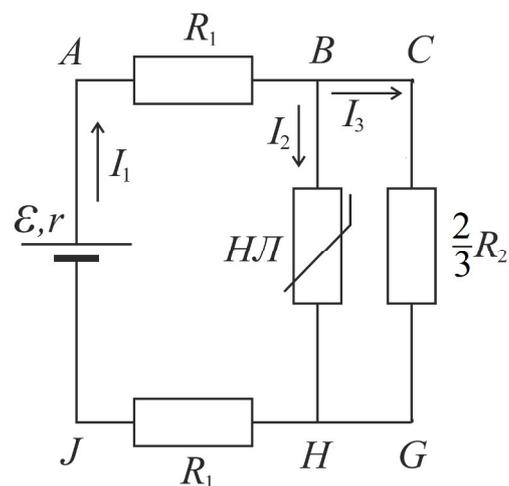
$$I_2 = 0,080 - 0,155U$$

Построив график этой прямой на графике ВАХ нелинейного элемента, по координатам точки пересечения найдем силу тока $I_2 \approx 7 \text{ mA}$ и напряжение $U = U_{BH} \approx 0,14 \text{ B}$. Это же напряжение приложено и к параллельно подключенному резистору, поэтому силу тока через него

$$I_3 = \frac{3U}{2R_2} \approx 10 \text{ mA}.$$

Искомая сила тока через резисторы R_2 равна сумме

$$I_1 = I_2 + I_3 \approx 17 \text{ mA}.$$



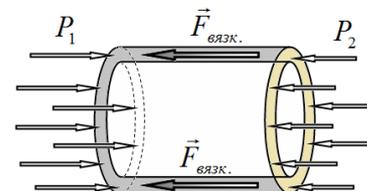
Задача 11-1. Гидроатмосферный подъемник

1. Введение.

1.1 Так расход жидкости постоянен, то любая порция жидкости движется без ускорения, следовательно, сумма сил действующих на любую выбранную часть жидкости, равна нулю.

Применяя эти рассуждения к жидкости в зазоре, можем утверждать, что разность сил давления (действующих на торцы жидкости) уравновешивается силами вязкого трения, действующими со стороны стенок:

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = F_{\text{вязк.}} \quad (1)$$



Разность давлений следует выразить через расход с помощью формулы (1), приведенной в условии задачи:

$$q = \frac{\pi R h^3}{6\eta l} \Delta P \Rightarrow \Delta P = \frac{6\eta l}{\pi R h^3} q, \quad (2)$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим формулу для суммарной силы вязкого трения, действующей на воду в зазоре:

$$F_{\text{вязк.}} = \Delta P \cdot 2\pi R h = \frac{6\eta l}{\pi R h^3} q \cdot 2\pi R h = \frac{12\eta l}{h^2} q \quad (3)$$

1.2 По третьему закону Ньютона сила, действующая со стороны стенок на воду равна по модулю силе, действующей со стороны воды на стенку. Так как площади боковой поверхности цилиндра и стенок трубы в зазоре практически равны (т.к. $h \ll R$), а сила вязкого трения пропорциональна площади соприкосновения, то сила вязкого трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, в два раза меньше силы, действующей на воду, поэтому

$$F_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \Delta P \cdot 2\pi R h = \pi R h \Delta P = \frac{6\eta l}{h^2} q. \quad (4)$$

1.3 Понятно, что разность сил давлений, действующих на торцы цилиндра, равна

$$F_0 = \pi R^2 \Delta P. \quad (5)$$

Следовательно, их отношение равно

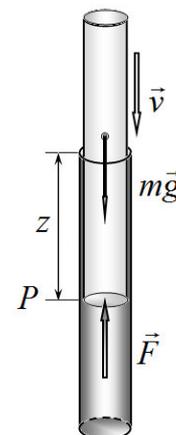
$$\frac{F_{\text{бок.}}}{F_0} = \frac{\pi R h \Delta P}{\pi R^2 \Delta P} = \frac{h}{R} \ll 1. \quad (6)$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации силами вязкого трения можно пренебречь, по сравнению с разностью сил давления. Правда, эта разность сил давления зависит от расхода жидкости.

Часть 2. Описание эффекта (пробирка в пробирке).

2.1 При опускании пробирки на нее действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила давления жидкости на дно пробирки $F = \pi R^2 \Delta P$. Как было показано ранее, в подобной ситуации можно пренебречь силой вязкого трения. Здесь ради укорочения формулой мы обозначили ΔP - разность между давлением жидкости на глубине z и атмосферным давлением. Поэтому уравнение движения пробирки в квазистационарном приближении имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P. \quad (7)$$



Отметим, что для величины ΔP нельзя использовать формулу для гидростатического давления, так жидкость в зазоре движется. Поэтому для нахождения этого давления запишем уравнение второго закона Ньютона для жидкости в зазоре (опять в квазистационарном приближении):

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = \rho(2\pi R h z)g + F_{\text{вязк.}} \quad (8)$$

Смысл которого очевиден: разность сил давления уравнивается силами тяжести и вязкого трения, действующими на воду в зазоре. Для силы вязкого трения справедлива полученная ранее формула (3). С ее учетом, получим

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = \rho(2\pi R h z)g + \frac{12\eta z}{h^2} q \Rightarrow \Delta P = \rho g z + \frac{6\eta}{\pi R h^3} z q \quad (9)$$

Расход воды, протекающей через зазор можно выразить через скорость движения пробирки (вся жидкость, вытесненная пробиркой, должна протечь через зазор): $q = \pi R^2 v$. Подставляя эти выражения в уравнение (7) получим

$$mg = \pi R^2 \left(\rho g z + \frac{6\eta z}{\pi R h^3} \pi R^2 v \right) = \pi R^2 \rho g z + \frac{6\pi \eta R^3}{h^3} z v. \quad (10)$$

Движение пробирки прекратится, когда скорость станет равной нулю, соответствующая максимальная глубина погружения определяется формулой:

$$z_{\text{max}} = \frac{m}{\pi R^2 \rho}. \quad (11)$$

Зависимость скорости от координаты z можно выразить из уравнения (10)

$$v = \frac{mg - \pi R^2 \rho g z}{\frac{6\pi \eta R^3}{h^3} z} = \frac{\rho g h^3}{6\eta R} \frac{z_{\text{max}} - z}{z} \quad (12)$$

Обозначим коэффициент в этой формуле (он имеет размерность скорости) $\frac{\rho g h^3}{6\eta R} = v_0$,

тогда зависимость (12) приобретает вид

$$v = v_0 \frac{z_{\text{max}} - z}{z}. \quad (13)$$

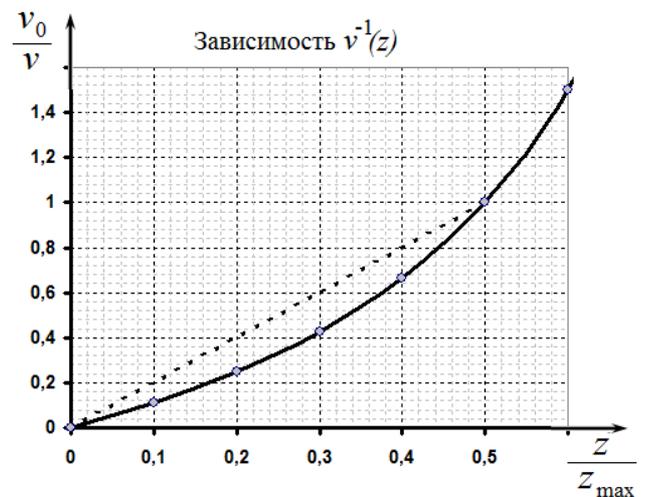
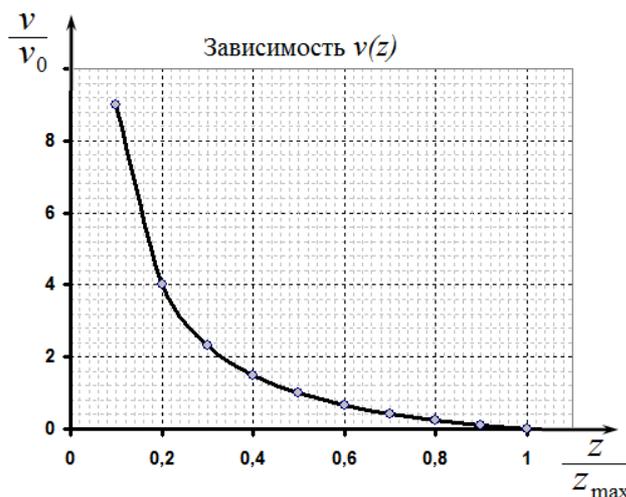


График этой функции показан на рисунке.

Для оценки времени движения в указанном диапазоне можно построить график обратной зависимости $v^{-1}(z)$ (см. рис.), тогда площадь под этим графиком численно равна времени

движения, т.к. $\Delta t = \frac{\Delta z}{v}$. Для оценки площади плавную кривую можно заменить отрезком

прямой. На построенном графике в относительных единицах эта площадь равна 0,25. Переход к обычным единицам приводит к результату

$$\tau \approx 0,25 \frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0,25 \frac{6\eta R m}{\pi R^2 \rho^2 g h^3}. \quad (14)$$

Замечания.

1. Формула (11) может быть получена непосредственно из условия равновесия в пробирке (когда справедливы законы статики) – сила тяжести пробирки уравновешивается силой Архимеда.
2. Точное значение времени движения может быть вычислено путем строгого интегрирования. Рассчитанное значение площади под кривой равно 0,2. Иными словами допущенная погрешность составляет величину порядка 20%.
3. Формально в рассмотренном квазистационарном приближении пробирка стартует с бесконечно большой скоростью. Это связано с тем, что в начальном положении пробирки отсутствует сила вязкого трения. Однако на конечный результат, это обстоятельство не играет существенной роли.

2.2 Описание движения пробирки в перевернутом положении проводится аналогично проведенному в п. 2.2.

Уравнение движения пробирки имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P. \quad (15)$$

здесь ΔP - разность между атмосферным давлением и давлением воды на высоте z (которое меньше атмосферного).

Закон движение воды в зазоре

$$\rho(2\pi R h z)g - \Delta P \cdot 2\pi R h = F_{\text{вязк.}} \quad (16)$$

Для силы вязкого трения, по-прежнему, справедлива формула (3), поэтому разность давлений в этом случае оказывается равным

$$\rho(2\pi R h z)g - \Delta P \cdot 2\pi R h = \frac{12\eta l}{h^2} q \Rightarrow \Delta P = \rho g z - \frac{6\eta R}{h^3} z v \quad (17)$$

А уравнение движения пробирки

$$mg = \pi R^2 \rho g z - \frac{6\pi\eta R^3}{h^3} z v. \quad (18)$$

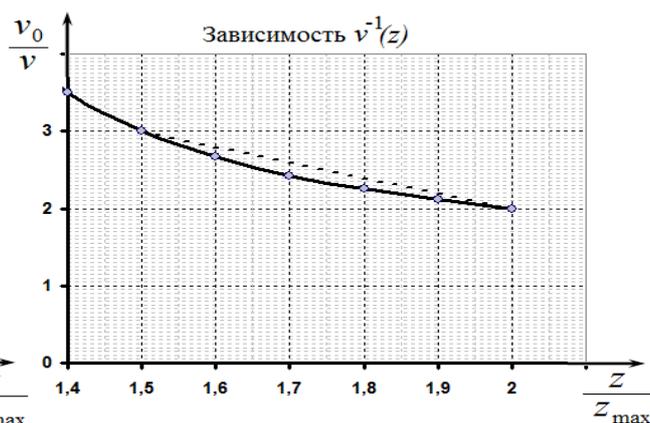
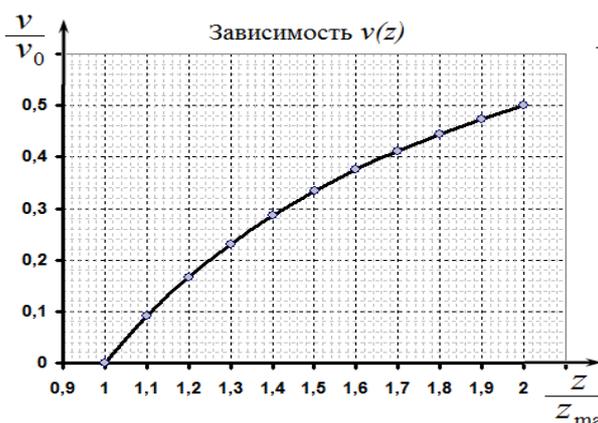
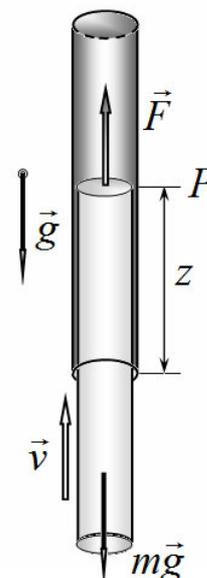
Из этого уравнения следует, что минимальная высота подъема пробирки, при которой начнется ее движение вверх, равна

$$z_{\min} = \frac{m}{\pi R^2 \rho}, \quad (19)$$

что совпадает с максимальной глубиной погружения, полученной ранее. Зависимость скорости подъема имеет вид

$$v = \frac{\rho g h^3}{6\eta R} \frac{z - z_{\min}}{z}. \quad (20)$$

Отметим, что в данном случае формула имеет смысл при $z > z_{\min}$.



Графики этой зависимости и обратной ей $v^{-1}(z)$ показаны на рисунках.

Оценка времени движения в указанном диапазоне (проведенная по линейной аппроксимации зависимости $v^{-1}(z)$) равна

$$\tau \approx 0,75 \frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0,75 \frac{6\eta R m}{\pi R^2 \rho^2 g h^3}. \quad (21)$$

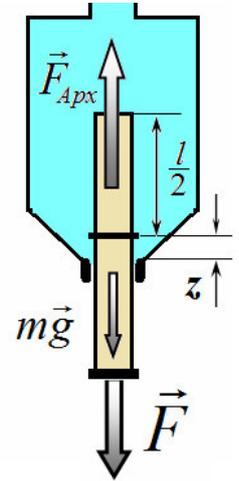
3.1 Так как пробирка начинает подниматься при высоте ее погружения равной $l/4$, то при этом положении сила Архимеда равна силе тяжести:

$$\rho g S \frac{l}{4} = mg \Rightarrow m = \frac{1}{4} \rho S l. \quad (22)$$

3.2 Так как процесс подъема можно считать квазистационарным, то при любом положении пробирки она находится в равновесии, условие которого имеет вид (с учетом формулы (22)):

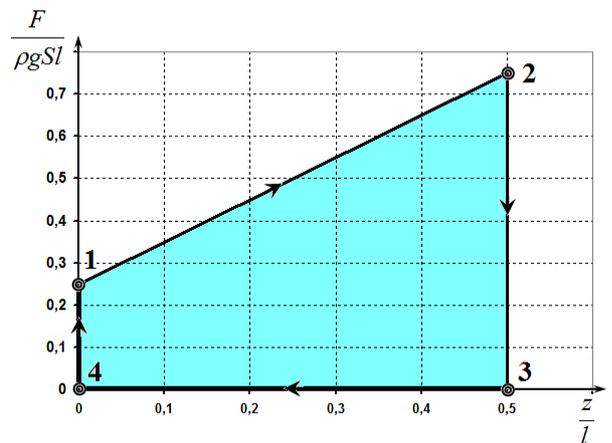
$$\rho g S \left(\frac{l}{2} + z \right) = mg + F \Rightarrow$$

$$F = \rho g S l \left(\frac{z}{l} + \frac{1}{4} \right) \quad (23)$$



После того, как пробирка поднялась до максимальной высоты, внешнее устройство отключается, поэтому внешняя сила падает до

$F = 0$. Так как вода наливается из резервуара быстро, то можно пренебречь просачиванием воды из бутылки за время ее опускания. Эти рассуждения позволяют построить график рассматриваемого циклического процесса:
 1 → 2: подъем пробирки, описываемый уравнением (23);
 2 → 3: отключение внешнего устройства;
 3 → 4: опускание пробирки;
 4 → 1: подключение внешнего устройства.



3.3 Из построенного графика следует, что работа совершенная подъемником равна

$$A = \frac{1}{4} \rho g S l^2 \quad (24)$$

3.4 Подъемник совершает полезную работу за счет того, что вода выливается через зазор между пробиркой и горлышком бутылки. Объем вытекшей за цикл воды равен половине объема пробирки, т.е. $\frac{1}{2} S l$. Чтобы подъемник работал необходимо, чтобы уровень воды в бутылке превышал длину пробирки l . Поэтому минимальная высота, с которой должна выливаться вода также равна l . Следовательно, изменение ее потенциальной энергии равно $\Delta U = \frac{1}{2} \rho g S l^2$. Разумно определить КПД как отношение полезной работы к

затраченной энергии. В этом случае КПД оказывается равным $\eta = \frac{A}{\Delta U} = 50\%$.

Задача 11-2. Перераспределение зарядов.

1 Рассмотрим величину плотности тока внутри пластины. С одной стороны она определяется законом Ома (в дифференциальной форме):

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (1)$$

С другой стороны плотность тока можно выразить через концентрацию свободных электронов и их среднюю скорость

$$\vec{j} = e\bar{n}\vec{v}. \quad (2)$$

Сравнивая эти выражения, получим

$$\vec{v} = \frac{1}{e\bar{n}\rho} \vec{E}. \quad (3)$$

Таким образом, подвижность электронов равна

$$\beta = \frac{1}{e\bar{n}\rho}. \quad (4)$$

Для дальнейшего решения задачи необходимо рассмотреть две стадии процесса: первая – область избыточной концентрации не достигла поверхности пластины; вторая – после того, как первые электроны достигли поверхности пластины.

2 Итак, пусть область избыточной концентрации распространилась на расстояние $z < h$ (рис.). Вне этой области $x > z$ напряженность поля остается неизменной и равной

$$E_0 = \frac{n_0 e z_0}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Действительно, она определяется зарядом, который находится на расстоянии от центра меньшим чем x , то есть всеми избыточными электронами.

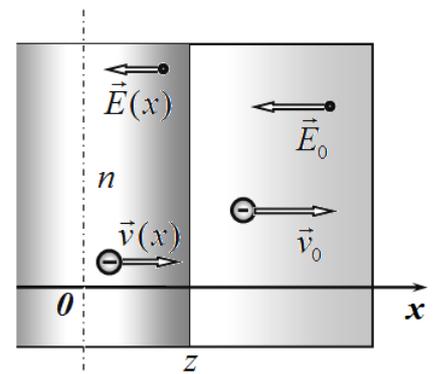
Поэтому в этой области скорости всех свободных (собственных) электронов, следовательно, плотность тока будут одинаковыми во всех точках. Поэтому в этой области избыточных зарядов возникать не будет. Кроме того, заряды, накапливающиеся на сторонах пластины, не влияют на поле внутри нее, поэтому при описании движения избыточных электронов свободные электроны можно не принимать во внимание.

Предположим (и это является основой дальнейшего описания!), что в процессе перераспределения на избыточных электронах их концентрация n одинакова во всех точках области $|x| < z$ (но изменяется с течением времени). Тогда, как было показано ранее, напряженность электрического поля будет зависеть от координаты по закону

$$E(x) = \frac{nex}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

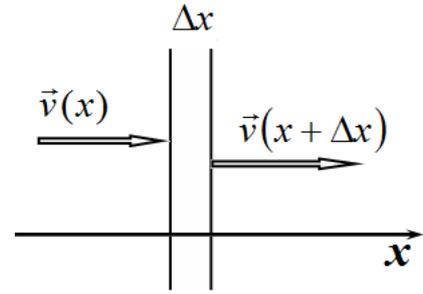
Аналогично будет изменяться и скорость электронов

$$v(x) = \beta E(x) = \frac{1}{e\bar{n}\rho} \frac{nex}{\epsilon_0} = \frac{n}{\bar{n}} \frac{1}{\rho\epsilon_0} x. \quad (6)$$



Рассмотрим теперь тонкий слой толщиной Δx , находящийся внутри рассматриваемой области. Изменение концентрации в этом слое описывается уравнением (смысл которого – разность между пришедшими и ушедшими электронами)

$$\Delta n = \frac{nv(x) - nv(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta t = -\frac{n^2}{\bar{n}} \frac{1}{\rho \epsilon_0} \Delta t. \quad (7)$$



Важно отметить, что во всех точках концентрация изменяется одинаково, поэтому если в начальный момент времени распределение избыточных электронов было однородным, то оно и будет оставаться однородным и далее! Что доказывает сделанное предположение!

Понятно, что скорость движения границы определяется скоростью электронов, которые расположены на этой границе, поэтому

$$v_z = v(z) = \beta E(x) = \frac{n}{\bar{n}} \frac{1}{\rho \epsilon_0} z = \frac{n_0 z_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} \quad (7)$$

Как следует из этого выражения, скорость движения границы не зависит от времени.

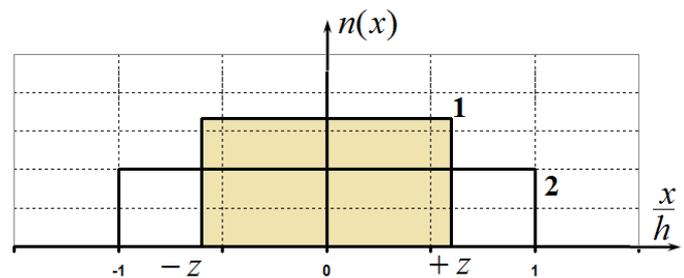
3. Таким образом, мы показали, что распределение избыточных электронов внутри области $|x| < z$ является однородным. Так как общее число избыточных электронов остается постоянным, то эта концентрация определяется очевидной формулой

$$n(t) = \frac{n_0 z_0}{z(t)} = \frac{n_0 z_0}{z_0 + \frac{n_0 z_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} t} = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{\bar{n} \rho \epsilon_0} t}. \quad (9)$$

В области $|x| > 0$ концентрация избыточных электронов равна нулю. Отметим, что функция (9) также является решением дифференциального уравнения (7)

Теперь обсудим поведение избыточных электронов после того, как граница области их расположения достигла краев пластины. Как уже было отмечено, заряды на сторонах пластины не влияют на поле внутри, поэтому изменение концентрации электронов будет определяться, по-прежнему, формулой (8). Однако, на этом этапе часть электронов окажется на сторонах пластины, так, что суммарное число избыточных электронов внутри пластины будет уменьшаться.

Графики зависимости распределения $n(x)$ представляют собой прямоугольники 1- граница области избыточных электронов не достигла сторон пластины; 2- после того, часть избыточных электронов оказалась на границе.



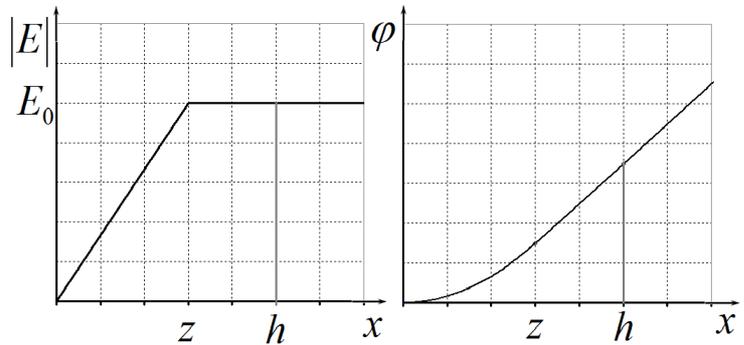
4. Прежде всего, рассмотрим распределение модуля напряженности электрического поля. Вне области расположения избыточных зарядов напряженность поля постоянна и равна

$$E_0 = \frac{n_0 e z_0}{\epsilon_0}.$$

В области с равномерно распределенным зарядом напряженность поля линейно возрастает от нуля до E_0 . Следовательно, зависимость напряженности поля от координаты x имеет вид

$$E = E_0 \frac{x}{z}. \quad (10)$$

График этой зависимости имеют вид показанный на рисунке (так как распределение зарядов симметрично относительно начала координат, то достаточно рассмотреть область $x > 0$). Примем потенциал в центре пластины равным нулю. Учитывая связь между разностью потенциалов и напряженностью $\Delta\varphi = -E\Delta x$, можем определить потенциал в произвольной точке, как площадь под графиком зависимости $|E(x)|$ - не забывайте, что электроны имеют отрицательный заряд. Следовательно, в области избыточных электронов $x < z$ потенциал возрастает квадратично

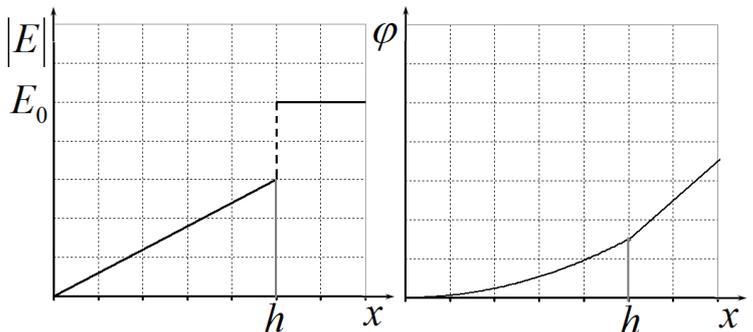


$$\varphi(x) = E_0 \frac{x^2}{2z} \quad (11)$$

А вне этой области возрастает по линейному закону

$$\varphi(x) = E_0 \frac{z}{2} + E_0(x - z) = E_0 \left(x - \frac{z}{2} \right) \quad (12)$$

«разбегания зарядов». Несколько иная картина будет в том случае, когда избыточные заряды начнут накапливаться на сторонах пластины. Напряженность поля внутри пластины будет нарастать медленнее, поэтому непосредственно у края напряженность будет меньше, чем E_0 . Затем благодаря накопившимся поверхностным зарядам, при переходе через край пластины испытывать скачок до значения E_0 . Зависимость потенциала от координаты в этой точке будет иметь излом.



5. Зависимость концентрации от времени определяется функцией (9), поэтому, строго говоря, время «разбегания» зарядов равно бесконечности. Однако, всегда можно ввести некое характерное время. Например, можно найти время в течение которого, концентрация убывает в 2 раза (своеобразный «период полураспада»). Полагая в формуле (9) $n = \frac{n_0}{2}$, находим

$$T_{1/2} = \frac{\bar{n}\rho\epsilon_0}{n_0} \quad (13)$$

Интересно отметить, что найденное время зависит от начальной концентрации избыточных электронов. Такой результат типичен, если распад не является линейным.

Задача 11-3. Вода из воздуха

1. Так как давление насыщенного пара зависит от температуры, то при изобарном охлаждении температура водяного пара может достичь точки, когда пар при постоянном начальном давлении $\varphi p_{н1}$ уже станет насыщенным. Проводя горизонтальную прямую изобары $p = \varphi p_{н1} = 1,81$ кПа на графике бланка-вкладыша, найдем искомую температуру $T_B = 16^\circ\text{C} = 289$ К.

Стоит отметить, что при охлаждении ниже найденной температуры давление водяного пара уже перестанет быть постоянным. В случае достаточно медленного процесса оно будет соответствовать давлению насыщенного пара при текущей температуре газа, как максимально возможному. С другой стороны процесс для всего воздуха в сосуде, давление которого гораздо больше, чем пара, процесс будет протекать по обычной схеме изобарного охлаждения.

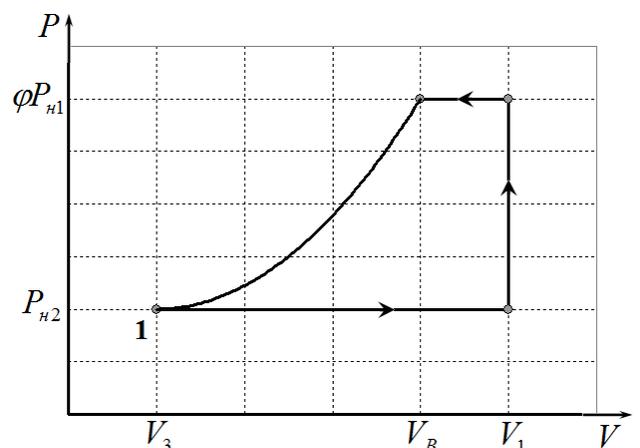
2. Так как минимальная температура холодильной установки Феи ниже T_B , то пар действительно начнет конденсироваться. Массу образовавшейся воды можно рассчитать аналогично пункту А3, найдя химическое количество водяного пара до (ν_1) и после (ν_3) охлаждения при помощи уравнения Менделеева-Клапейрона. Для подобного расчета необходимо найти давление насыщенного водяного пара в конце охлаждения (при температуре $T_2 = 4,0^\circ\text{C}$) из графика на бланке-вкладыше: $p_{н2} \approx 0,80$ кПа. Кроме того, необходимо получить выражение для расчета конечного объема водяного пара V_3 , равного объему всего воздуха в сосуде. Для этого запишем уравнение, соответствующее изобарному охлаждению воздуха: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_3}{T_2}$. Тогда массу образовавшейся воды можно найти следующим образом:

$$m_B = M(\nu_1 - \nu_3) = M \left(\frac{\varphi p_{н1} V_1}{RT_1} - \frac{p_{н2} V_3}{RT_2} \right) = \frac{M}{R} \left(\varphi p_{н1} \frac{V_1}{T_1} - p_{н2} \frac{V_3}{T_2} \right) = \frac{MV_1}{RT_1} (\varphi p_{н1} - p_{н2})$$

$$m_B = 3,73 \cdot 10^{-5} \text{ кг} = 37,3 \text{ мг}$$

3. стакан воды можно насобирать за $N_B = m_c / m_B = 5360$ охладжений.

4. От начала процесса до точки конденсации водяного пара диаграмма соответствует изобарному процессу и представляет собой участок горизонтальной прямой. Далее в ходе процесса конденсации давление водяного пара будет уменьшаться. Так как в ходе изобарного охлаждения объем и давление прямо пропорциональны друг другу, то характер уменьшения давления с объемом аналогичен поведению графика давления от температуры на бланке-вкладыше. Обратный нагрев после сбора влаги будет снова проходить при постоянном давлении – ему так же соответствует участок горизонтальной прямой до первоначального объема. Наконец, при постоянном объеме и открытом отверстии химическое количество пара возвращается к первоначальному (возвращается исходная влажность воздуха) и диаграмма замыкается. Схематичное изображение процесса представлено на рисунке .



5. Для подсчета полной работы, совершаемой над содержимым сосуда, надо найти площадь, ограниченную построенной в предыдущем пункте диаграммой. Для грубой оценки заменим криволинейный участок на прямую и найдем площадь получившейся трапеции $ABCD$. Нам будут необходимы значения объемов в характерных точках на графике, которые можно найти, используя выражения для изобарного процесса с воздухом в сосуде:

$$V_B = V_1 \frac{T_B}{T_1} = 4,93 \text{ л}; \quad V_3 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 4,73 \text{ л}$$

Тогда полная работа, примерно равная площади трапеции $ABCD$, будет:

$$A_B \approx S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD)AD = \frac{1}{2} ((V_1 - V_B) + (V_1 - V_3))(\varphi p_{к1} - p_{к2}) = 0,172 \text{ Дж}$$

В6. Для данного процесса удельная работа конденсации получается:

$$\theta_B = A_B / m_B = 4,61 \text{ кДж/кг}$$

