

Условие

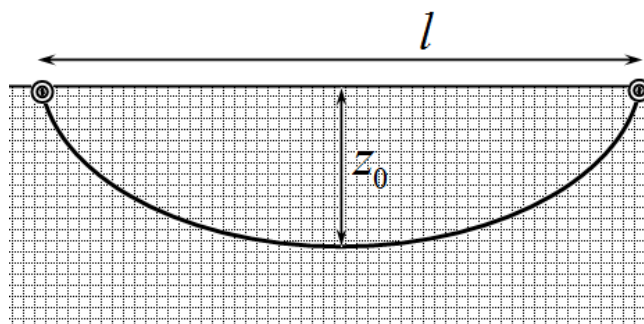
Задача 9-1. Цепная линия, или экспериментальная геометрия.

Приборы и оборудование: Лист картона с миллиметровой бумагой, нитка, две кнопки, две гайки.

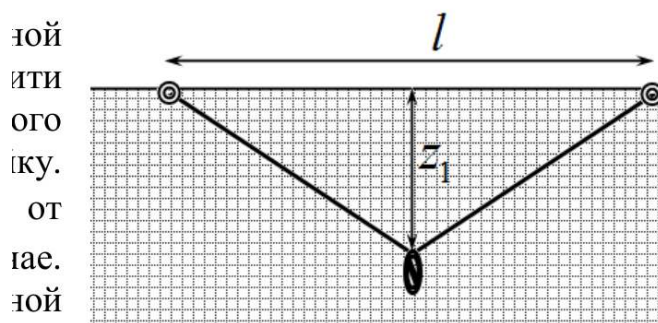
Некоторые функции, встречающиеся в физике достаточно сложны. Поэтому вместо точных (но сложных) функций используются более простые (но приближенные) функции. В данной работе Вы должны продемонстрировать умение обходиться простыми приближенными методами при описании сложных процессов.

Часть 1. Прогиб.

Закрепите лист картона с миллиметровой бумагой вертикально на торце стола. К углу листа с помощью кнопки прикрепите один конец нитки. Второй конец нити закрепляйте на том же уровне, при этом нить, естественно будет провисать.

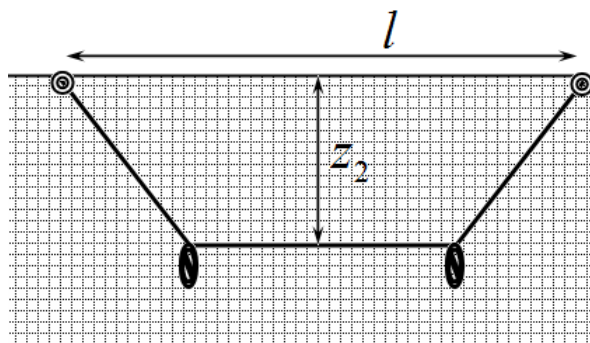


1.1 Измерьте зависимость величины провисания нити z_0 от расстояния между точками подвеса l . Постройте график полученной зависимости.



1.2 Для приближенного описания полученной зависимости будем считать, что масса всей нити сосредоточена в ее центре. Для имитации этого приближения в центре нити прикрепите гайку. Измерьте зависимость величины провисания z_1 от расстояния между точками подвеса l в этом случае. На том же бланке постройте график полученной зависимости.

1.3 Возможно более точное приближение к полученной в п. 1.1 зависимости можно получить, если массу нити сосредоточить в двух точках. Разделите нить на три равные части, к точкам деления прикрепите две гайки. Измерьте зависимость величины провисания z_2 от расстояния между точками подвеса l в этом случае. На том же бланке постройте график полученной зависимости.



Получите теоретическую формулу, описывающую зависимость $z_2(l)$.

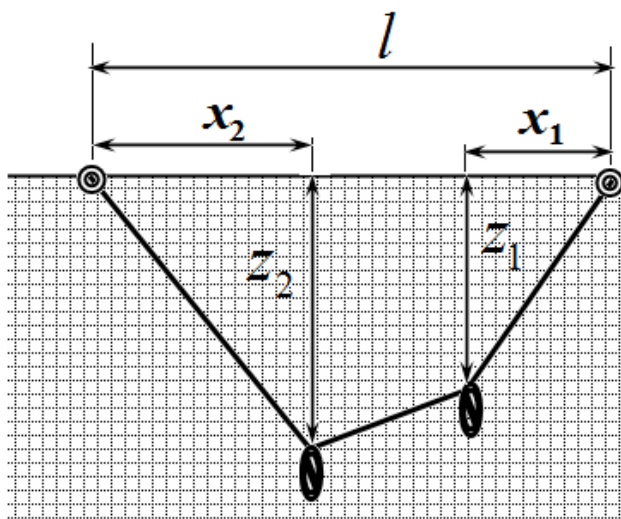
1.4 Какое из приближений $z_1(l)$ или $z_2(l)$ лучше описывает зависимость $z_0(l)$. Уточните, что по вашему мнению, означает «лучше».

Часть 2. Положение равновесия.

Разделите нить на три части в отношении 2 : 1 : 3. К точкам деления прикрепите гайки.

2.1 Измерьте зависимости вертикальных z_1, z_2 и горизонтальных x_1, x_2 координат гаек от расстояния между точками подвеса l . Постройте графики полученных зависимостей (на одном бланке $z_1(l), z_2(l)$, на другом $x_1(l), x_2(l)$).

2.2 Докажите, что полученные значения соответствуют условиям равновесия гаек. Свои доказательства обоснуйте формулами, расчетами и необходимыми графиками.



Решение

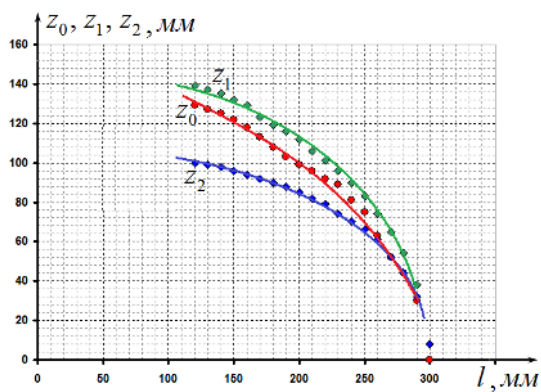
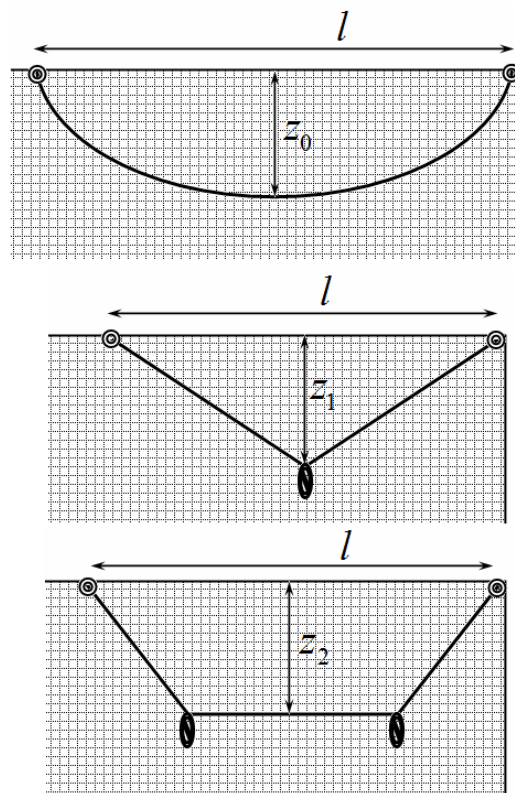
Задача 9-1. Цепная линия, или экспериментальная геометрия.

Часть 1. Прогиб.

1.1-1.3 Результаты измерений указанных величин прогиба z_0, z_1, z_2 в зависимости от расстояния между точками подвеса l приведены в Таблице 1. Полная длина нити в этих измерениях равнялась $L = 300\text{мм}$

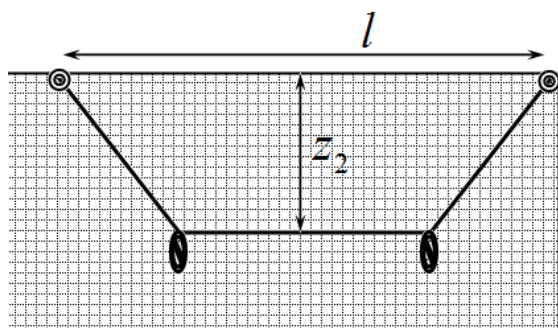
Таблица 1.

l , мм	z_0 , мм	z_1 , мм	z_2 , мм	$z_{\text{теор}}$, мм
300	0	8	8	0,00
290	30	38	32	31,22
280	44	54	44	43,59
270	52	65	52	52,68
260	63	74	61	60,00
250	75	83	66	66,14
240	81	90	70	71,41
230	89	96	74	75,99
220	92	101	79	80,00
210	96	106	82	83,52
200	99	112	85	86,60
190	103	116	88	89,30
180	108	119	90	91,65
170	113	123	92	93,67
160	118	129	94	95,39
150	122	132	96	96,82
140	125	135	98	97,98
130	127	137	99	98,87
120	129	139	100	99,50



Графики полученных зависимостей показаны на рисунке.

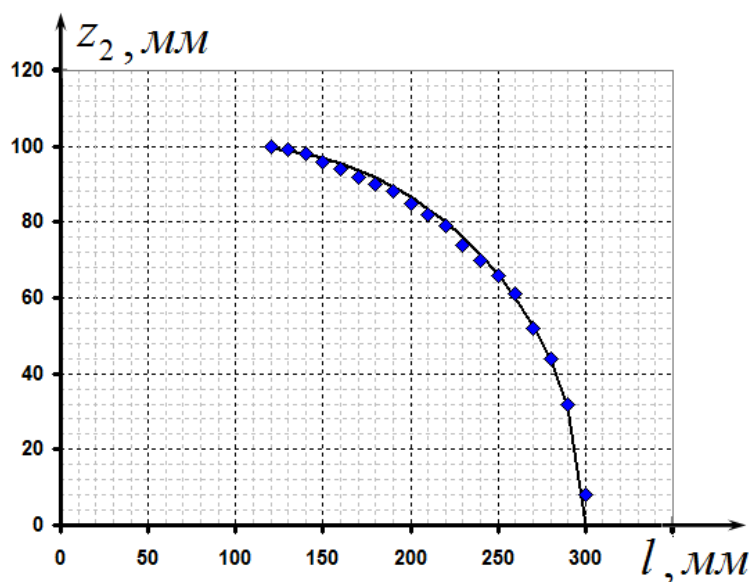
Как ни странно на первый взгляд зависимость прогиба с одной гайкой лежит ближе к зависимости прогиба нити без грузов. Хотя при малых прогибах более точное приближение дает модель с двумя грузами.



Теоретическая зависимость $z_2(l)$ находится с помощью теоремы Пифагора

$$z_2 = \sqrt{\left(\frac{L}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(l - \frac{L}{3}\right)^2} \quad (1)$$

Результаты расчетов по этой формуле приведены в последнем столбце Таблицы 1.



На следующем рисунке показано сравнение теоретической (сплошная линия) и экспериментальных (ромбики) зависимостей (от учеников не требуется!). Видно хорошее соответствие между этими зависимостями. Таким образом, теорема Пифагора доказана экспериментально!

Часть 2. Положение равновесия.

Результаты измерений параметров нити приведены в таблице 2.

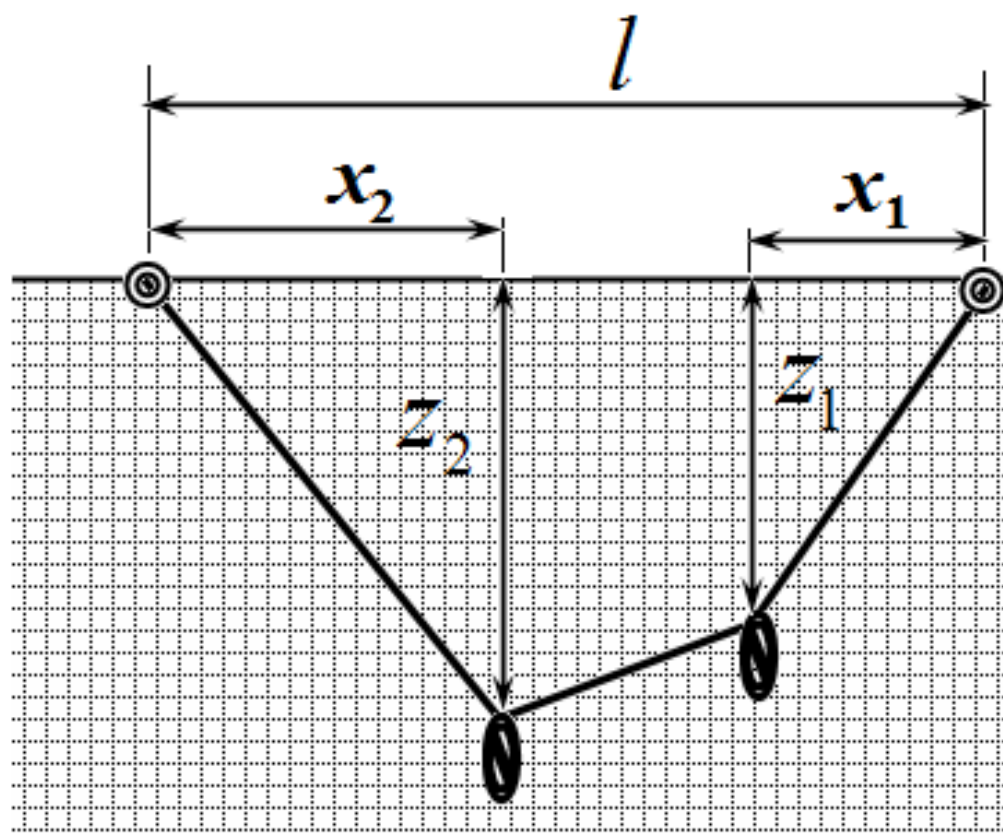
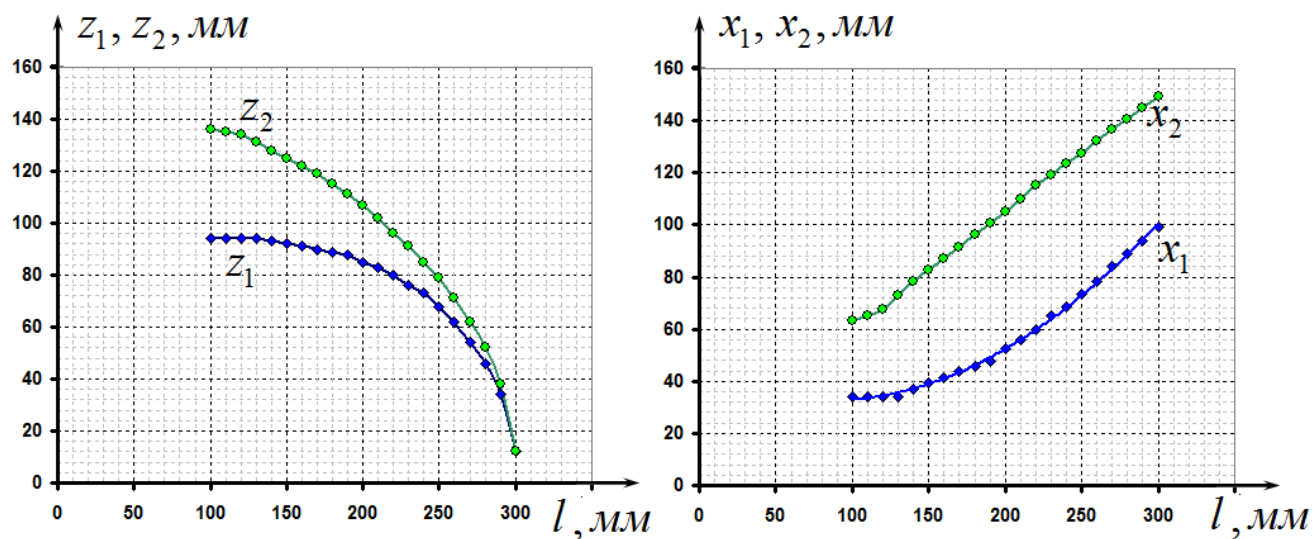


Таблица 2.

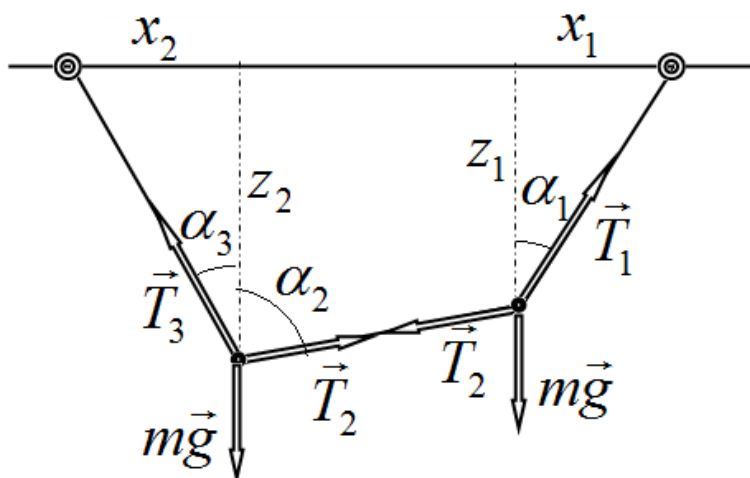
l , мм	z_1 , мм	z_2 , мм	x_1 , мм	x_2 , мм
300	12	12	99	150
290	34	38	94	145
280	46	52	89	141
270	54	62	84	137
260	62	71	78	132
250	68	79	73	128
240	73	85	68	124
230	76	91	65	119
220	80	96	60	115
210	83	102	56	110
200	85	107	53	105
190	88	111	47	101
180	89	115	46	96
170	90	119	44	91
160	91	122	41	87
150	92	125	39	83
140	93	128	37	78
130	94	131	34	73
120	94	134	34	67

Графики эти зависимостей показаны на рисунке.



Проверку выполнения условий равновесия можно проводить различными способами. Условия равновесия гаек имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 &= mg \\ T_3 \cos \alpha_3 + T_2 \cos \alpha_2 &= mg \\ T_1 \sin \alpha_1 &= T_2 \sin \alpha_2 \\ T_3 \sin \alpha_3 &= T_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad (2)$$



Из двух последних равенств выразим

$$T_1 = T_2 \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}, \quad T_3 = T_2 \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3}$$

И подставим в выражение (которое следует из первых двух уравнений системы(2))

$$T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = T_3 \cos \alpha_3 + T_2 \cos \alpha_2$$

В результате получим формулу

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} - \frac{\cos \alpha_3}{\sin \alpha_3} = 2 \frac{\cos \alpha_2}{\sin \alpha_2}, \quad (3)$$

Которая допускает простую экспериментальную проверку, если ее представить в виде

$$\frac{z_1}{x_1} - \frac{z_2}{x_2} = 2 \frac{z_2 - z_1}{l - x_1 - x_2}. \quad (4)$$