

-3. Равноускоренные колебания

Условие

Задача 9-3. Равноускоренные колебания

Два груза массами $m_1 = 1,00t$ и $m_2 = 0,99t$ соединены лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок. Систему удерживают неподвижно, когда верхняя поверхность груза m_2 находится на уровне **А**. На груз массой m_2 кладут перегрузок массой $m_3 = 0,020 t$ и систему отпускают. После того как верхняя поверхность груза m_2 оказывается на уровне **В**, перегрузок снимают и вновь кладут когда груз m_2 снова оказывается на уровне **А**, и процесс повторяется так далее (перегрузок снимают на уровне **В** и кладут на уровне **А**). Расстояние между уровнями **А** и **В** $h = 0,040\text{м}$.

3.1 Определите модуль ускорения системы грузов a_1 при движении груза m_2 вниз между уровнями **А** и **В**.

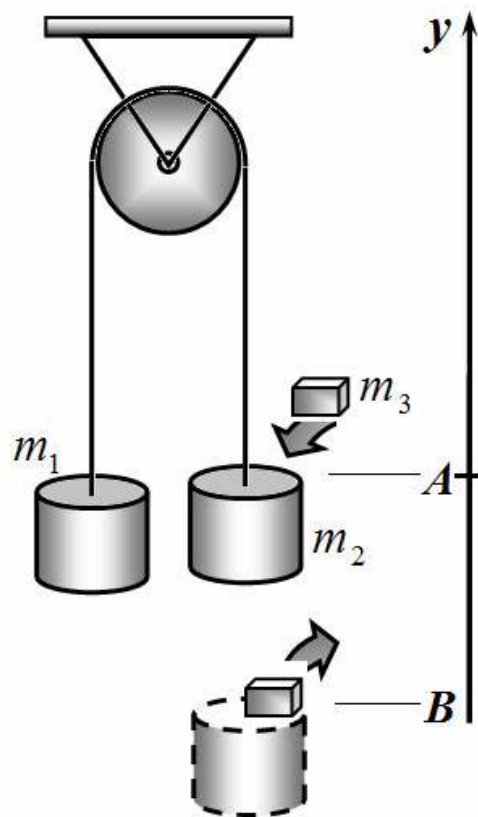
3.2 Определите модуль ускорения системы грузов a_2 при движении груза m_2 вниз, когда он находится ниже уровня **В**.

3.3 Постройте график зависимости координаты верхней поверхности груза m_2 от времени $y(t)$ за промежуток времени от первого до пятого раза помещения перегрузка на груз m_2 на уровне **А**. Координаты (значения координаты y и соответствующие времена их прохождения) характерных точек графика (прохождения уровней **А** и **В**, максимальное и минимальное отклонения) сведите в таблицу. За начало отсчёта по оси y примите уровень **А**, ось y направьте вверх. Расстояние от грузов до блока считать много больше чем h . Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10\text{м/с}^2$.

3.4 Найдите функции, описывающие зависимости $y_{\max}(n)$ и $y_{\min}(n)$ координат максимума и минимума графика функции $y(t)$ от порядкового номера помещения n перегрузка на груз m_2 .

Таблица к п. 3.3

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t
y_A										
y_B										
$y_{\min}$										
y_B										
y_A										
$y_{\max}$										



Решение

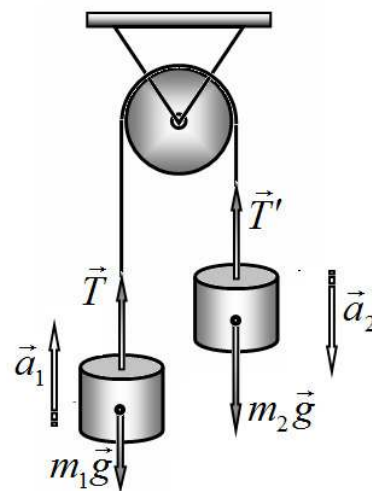
Задача 3. Равноускоренные колебания

Хорошо известна задача о движении грузов на нити, переброшенной через блок. Уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов (с учетом равенства модулей ускорений и равенства модулей сил натяжения нитей) имеют вид

$$\begin{aligned} m_2 a &= m_2 g - T \\ m_1 a &= T - m_1 g \end{aligned} \quad (1)$$

Из этой системы следует формула для ускорения грузов (положительное направление ускорения указано на рисунке)

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g. \quad (2)$$



Способ решения 1. Чисто кинематический. Последовательно рассмотрим все этапы движения системы, описанной в условии задачи. При движении вниз между уровнями A и B ускорение грузов в соответствии с полученной формулой (2) равно

$$a_1 = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_2 + m_3 + m_1} g = \frac{0,99 + 0,02 - 1,00}{0,99 + 0,02 + 1,00} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad (3)$$

Когда правый груз пройдет расстояние h , его скорость находится из формулы

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ah} \quad (4)$$

Если малый груз снят, то ускорение системы равно

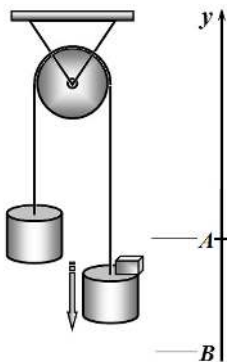
$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{0,99 - 1,00}{0,99 + 1,00} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx -5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} \quad (5)$$

Дальнейшее движение будет происходить с отрицательным ускорением, путь, который пройдет до остановки, и минимальная координата находится по формулам

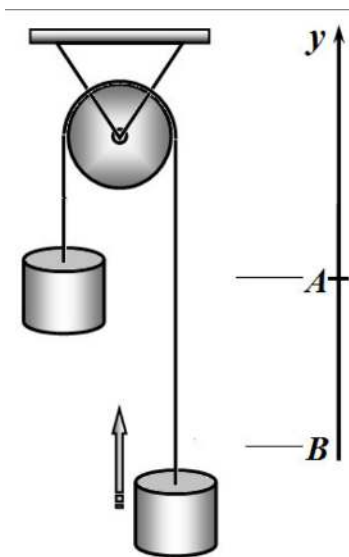
$$\Delta y = \frac{v_1^2}{2a_2} \Rightarrow y_{\min} = -h - \frac{v_1^2}{2a_2} \quad (6)$$

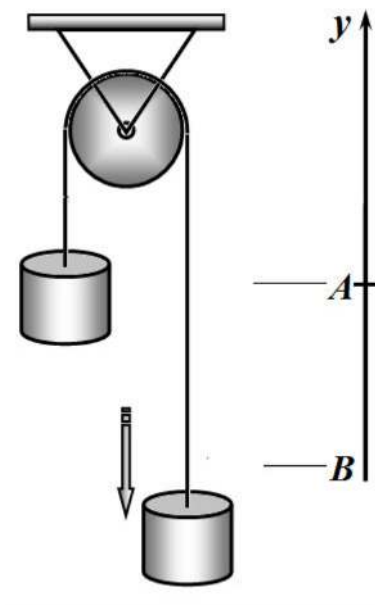
Остальные формулы для расчета характерных точек находятся аналогично. Для удобства численных расчетов все формулы сведены в единую таблицу. В таблице модуль ускорения обозначен $a = 5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, в строках скоростей и ускорений приведены их проекции на вертикальную ось y .

Таблица 1. Кинематический расчет закона движения**

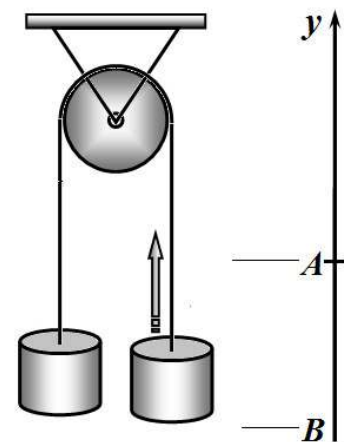


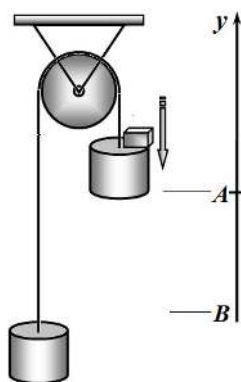
	Параметр	Формула		
Движение вниз между уровнями АВ	Начальная скорость	v_0		
	Ускорение	$a_1 = -a$		
	Конечная скорость	$v_1 = -\sqrt{v_0^2 + 2ah}$		
	Конечная координата	$-h$		
	Время движения	$\Delta t = \frac{v_1 - v_0}{a}$		





Движение вниз от уровня B до нижней точки	Начальная скорость	v_1		
	Ускорение	$a_2 = a$		
	Конечная скорость	0		
	Конечная координата	$y_{\min} = -h - \frac{v_1^2}{2a}$		
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_1}{a} \right $		
Движение вверх от нижней точки до уровня B	Начальная скорость	0		
	ускорение	$a_2 = a$		
	Конечная координата	$-h$		
	Конечная скорость	$-v_1$		
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_1}{a_2} \right $		
Движение вверх между уровнями AB	Начальная скорость	$-v_1$		
	Ускорение	$a_2 = a$		
	Конечная координата	0		
	Конечная скорость	$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2ah}$		
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_2 - v_1}{a} \right $		
Движение от вверх от уровня A до верхней точки	Начальная скорость	v_2		
	Ускорение	$a_2 = -a$		
	Конечная скорость	0		
	Конечная координата	$y_{\max} = \frac{v_2^2}{2a}$		
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_2}{a} \right $		
Движение вниз от верхней точки до уровня A	Начальная скорость	0		
	Ускорение	$a_2 = -a$		
	Конечная скорость	$-v_2$		
	Конечная координата	0		
	Время движения	$\Delta t = \left \frac{v_2}{a} \right $		



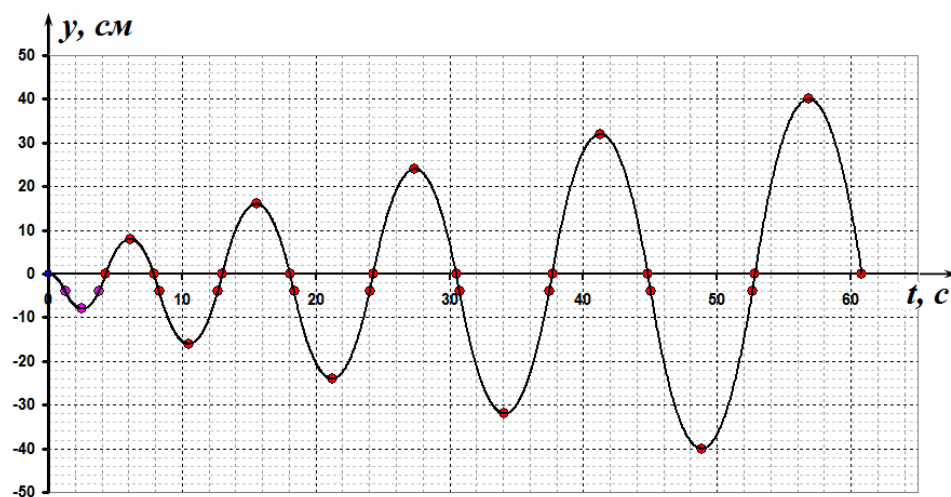


Результаты необходимых численных расчетов приведены в таблице 2. (координаты в см, время в с)

Таблица 2. Расчет закона движения

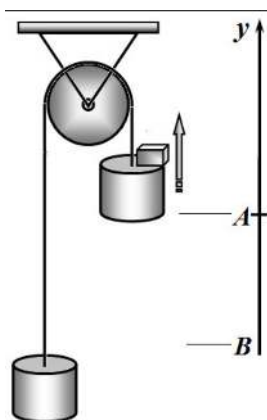
	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t
y_A	0,0	0,00	0,0	7,90	0,0	18,08	0,0	30,50	0,0	44,83
y_B	-4,0	1,26	-4,0	8,30	-4,0	18,38	-4,0	30,75	-4,0	45,05
$y_{\min}$	-8,0	2,53	-16,0	10,49	-24,0	21,21	-32,0	34,10	-40,0	48,84
y_B	-4,0	3,79	-4,0	12,68	-4,0	24,03	-4,0	37,44	-4,0	52,64
y_A	0,0	4,32	0,0	13,02	0,0	24,30	0,0	37,67	0,0	52,84
$y_{\max}$	8,0	6,11	16,0	15,55	24,0	27,40	32,0	41,25	40,0	56,84

График рассчитанной зависимости показан на рисунке.



Проведенные расчеты показывают, зависимости минимального и максимального смещения от номера цикла имеют простой вид

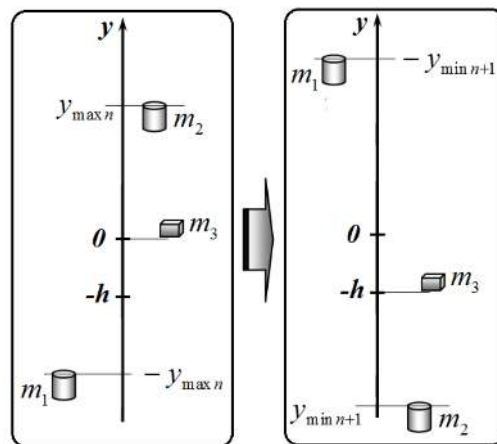
$$\begin{aligned} y_{\min} &= -8,0n \text{ (см)} \\ y_{\max} &= +8,0n \text{ (см)} \end{aligned} \quad (7)$$



Способ решения 2. «Энергетически-кинематический»

Полученные соотношения слишком просты, чтобы быть случайными – поэтому возможен второй, более «быстрый» способ решения, основанный не только на кинематических формулах. Заметим, что система получает дополнительную энергию при движении вниз с грузом m_3 .

Рассмотрим изменение энергии системы между крайними точками, в которых скорости грузов равны нулю.



а) Опускание: груз m_2 движется от крайнего верхнего положения $y_{\max n}$ до следующего крайнего нижнего положения $y_{\min n+1}$. На этом этапе груз m_3 опустился на высоту h (от уровня A до уровня B). Начальные и конечные положения всех грузов показаны на рисунке. Поэтому уравнение закона сохранения энергии имеет вид

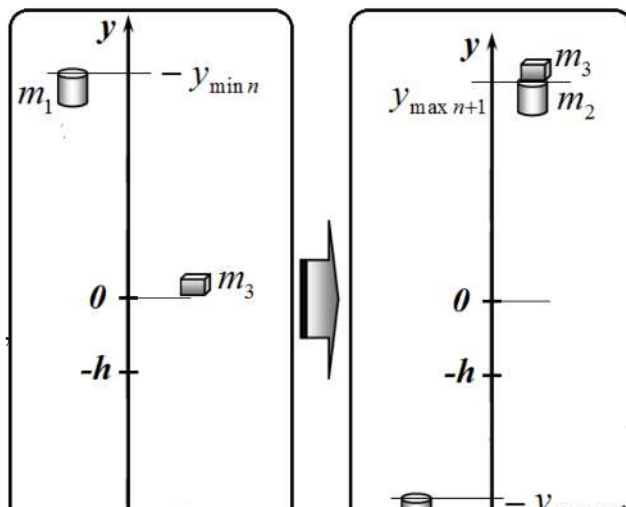
$$m_2 y_{\max n} - m_1 y_{\max n} = m_2 y_{\min n+1} - m_1 y_{\min n+1} - m_3 h,$$

из которого следует (с учетом численных значений масс грузов):

$$y_{\min n+1} = y_{\max n} + \frac{m_3}{m_2 - m_1} h = y_{\max n} - 2h.$$

Б) Подъем: груз m_2 поднимается от крайнего нижнего положения $y_{\min n}$ до следующего крайнего верхнего положения $y_{\max n+1}$. Учитывая, что груз m_3 кладут на уровне A , изобразим начальные и конечные положения грузов и запишем уравнение закона сохранения энергии в этом случае

$$m_2 y_{\min n} - m_2 y_{\min n} = (m_2 + m_3) y_{\max n+1} - m_1 y_{\max n+1}.$$



из которого находим (опять с учетом масс грузов)

$$y_{\max n+1} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_3 - m_1} y_{\min n} = -y_{\min n}.$$

Полученные формулы сразу приводят к полученным ранее формулам (7). Далее традиционным способом находим ускорения грузов при движении с грузом m_3 ($a_1 = -a = -5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$) и без него ($a_2 = +a = 5,0 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$).

Далее отмечаем, что движение без дополнительного груза m_3 происходит на участках $-h \rightarrow y_{\min} \rightarrow -h \rightarrow 0$, а движение с дополнительным грузом на участках $0 \rightarrow y_{\max} \rightarrow 0 \rightarrow -h$. Так как модули ускорений на этих участках одинаковы и максимальные смещения также одинаковы, то графики законов движения (параболы) на этих участках тоже одинаковы, только перевернуты. Эти рассуждения позволяют заметно сократить расчеты, начиная каждый цикл с момента прохождения вниз уровня B . Сначала следует «подойти» к началу первого цикла: рассчитать время первого прохождения точки $y = -h$ по формуле $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 4,0\text{с}$. После этого рассчитать максимальное смещение

груза в цикле по формуле $Y = 8n$ (см), а также три интервала времени прохождения соответствующих отрезков (они показаны на рисунке) по формулам

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y-h}{2a}} = \sqrt{8n-4} = 2\sqrt{2n-1}$$

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{Y}{2a}} = \sqrt{8n} = 2\sqrt{2n}$$

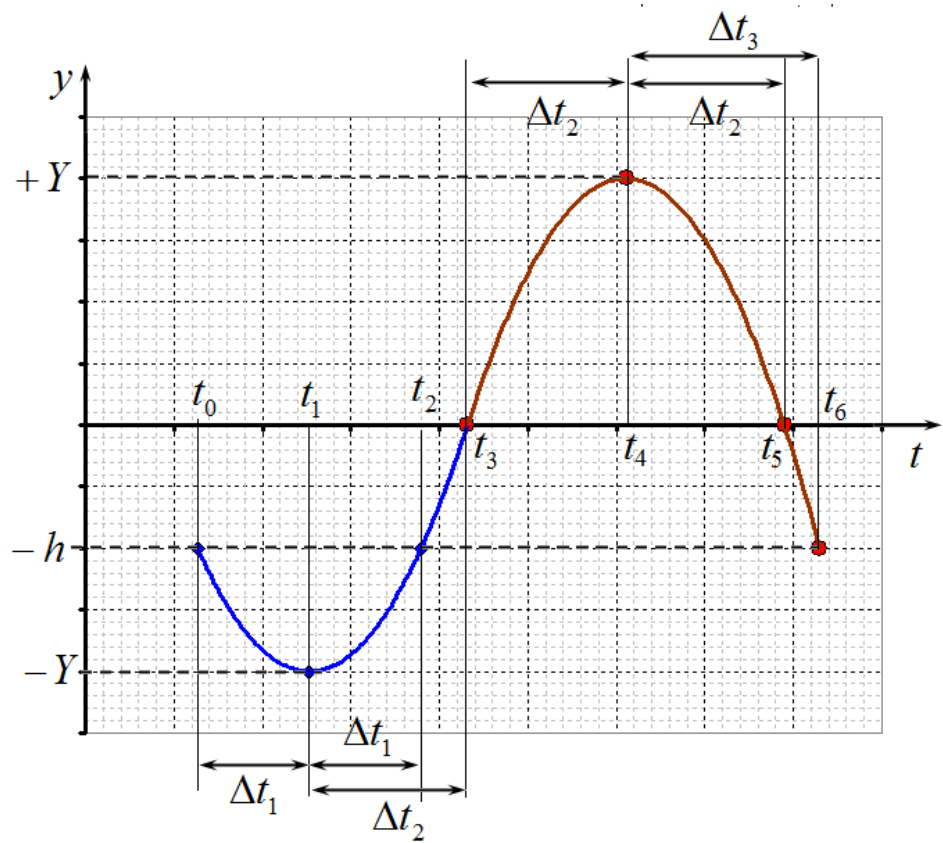
$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y+h}{2a}} = \sqrt{8n+4} = 2\sqrt{2n+1}$$

После чего вычисления времен прохождения каждой характерной точки рассчитываются простым суммированием (для удобства схема расчета сведена в таблицу 3.

Таблица 3. Схема расчета времен характерных точек.

$n =$	
	$Y = 8n =$
	$\Delta t_1 = 2\sqrt{2n-1}$
	$\Delta t_2 = 2\sqrt{2n}$
	$\Delta t_3 = 2\sqrt{2n+1}$
y	t
-4	$t_0 =$
$-Y$	$t_1 = t_0 + \Delta t_1$
-4	$t_2 = t_1 + \Delta t_1$
0	$t_3 = t_1 + \Delta t_2$
$+Y$	$t_4 = t_3 + \Delta t_2$
0	$t_5 = t_4 + \Delta t_2$
-4	$t_6 = t_4 + \Delta t_3$

$n =$	
	$Y = 8n =$
	$\Delta t_1 = 2\sqrt{2n-1}$
	$\Delta t_2 = 2\sqrt{2n}$
	$\Delta t_3 = 2\sqrt{2n+1}$
y	t
-4	$t_0 =$
$-Y$	$t_1 = t_0 + \Delta t_1$
-4	$t_2 = t_1 + \Delta t_1$
0	$t_3 = t_1 + \Delta t_2$
$+Y$	$t_4 = t_3 + \Delta t_2$
0	$t_5 = t_4 + \Delta t_2$
-4	$t_6 = t_4 + \Delta t_3$



Очевидно, что результаты расчетов по этой схеме приводят к тем же результатам.