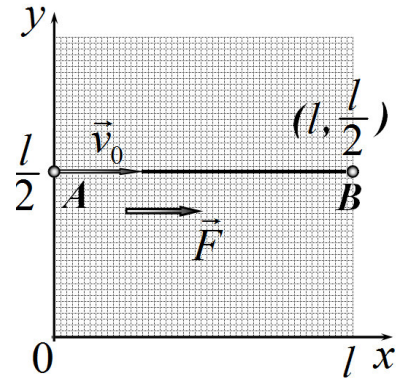


Задача 9- 1.

1.1 Поскольку вектор силы  $\vec{F}$  сонаправлен с вектором начальной скорости  $\vec{v}_0$  частицы, то ее движение будет прямолинейным и равноускоренным. В таком случае частица, двигаясь вдоль прямой  $AB$  (траектория движения частицы), покинет выделенную область в точке  $B$  с координатами  $B(l, \frac{l}{2})$ . Для вычисления времени движения



частицы найдем ее ускорение  $a = \frac{F}{m} = \frac{2ml}{\tau^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{2l}{\tau^2}$  и запишем закон равноускоренного движения

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow l = \frac{l}{\tau} \cdot t + \frac{2l}{\tau^2} \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{t}{\tau}\right) - 1 = 0. \quad (1)$$

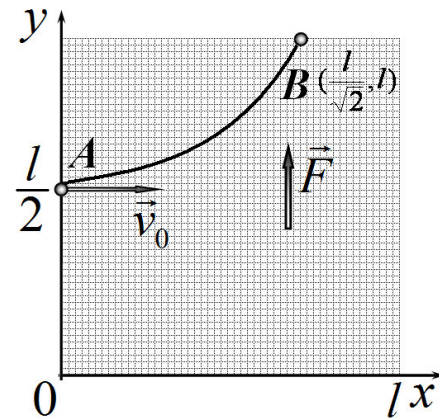
Решение квадратного уравнения (1) даёт два корня

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \tau, \quad (2)$$

Из которых нас интересует корень со знаком «+». Таким образом, частица покинет выделенную область в указанных координатах через промежуток времени

$$t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tau = 0,62 \tau. \quad (3)$$

1.2 Поскольку в данном случае вектор силы  $\vec{F}$  не параллелен вектору начальной скорости  $\vec{v}_0$  частицы, то её движение будет происходить по параболе, ветви которой направлены вверх. Движение вдоль оси  $Oy$  будет равноускоренным ( $a = \frac{F}{m} = \frac{2l}{\tau^2}$ ) без начальной скорости, т.к. вектор  $\vec{v}_0$  «горизонтален». Следовательно, частица достигнет верхней границы области за время



$$\frac{l}{2} = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

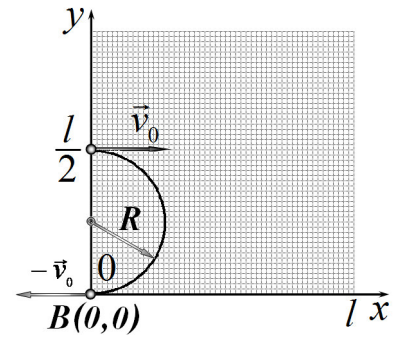
При этом смещение частицы вдоль оси  $Ox$  составит

$$x = v_0 t \Rightarrow x = \frac{l}{\tau} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0,71l. \quad (5)$$

Как следует из (5), частица покинет выделенную область, двигаясь по параболе, в точке  $B$ , координаты которой  $B(\frac{l}{\sqrt{2}}, l)$  через промежуток времени  $t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}$  (см. рис.).

Отметим, что в данной задаче необходим анализ, через какую из сторон частица покинет данную область. При меньшем ускорении это было бы возможно и через сторону  $x = l$ .

1.3 Если при движении частицы на неё действует сила, которая все время перпендикулярна вектору скорости  $\vec{v}_0$  частицы (т.е. сила «поворачивается» вместе с частицей), то эта сила не может изменить модуля скорости частицы, изменяя лишь её направление. Следовательно, траектория движения в данном случае будет представлять собой окружность некоторого радиуса  $R$  (см. рис.), по которой частица будет равномерно двигаться.



Согласно второму закону Ньютона для движения частицы по окружности запишем

$$F = \frac{4mv_0^2}{l} = ma = m \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{l}{4}. \quad (6)$$

Как следует из (6), частица, совершив под действием силы пол-оборота, покинет выделенную область через точку начала координат (точка 0), имея тот же модуль скорости  $v_0$ , но противоположное направление движения. Это произойдет через промежуток времени

$$\pi R = v_0 t \Rightarrow t = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi}{4} \tau = 0,78 \tau. \quad (7)$$

Таким образом, траектория движения частицы в этом случае будет представлять собой полуокружность радиуса  $R = \frac{l}{4}$ , координаты точки выхода частицы –  $B(0,0)$ .

1.4 Данный пункт является самым «олимпиадным» вариантом движения частицы в данной задаче. Действительно, как следует из условия, в начальный момент времени вектор силы  $\vec{F}$  перпендикулярен вектору начальной скорости  $\vec{v}_0$  частицы. Однако мы не можем утверждать, что это свойство системы сохранится в любой момент времени и при дальнейшем движении частицы, поскольку возможен вариант «различных» поворотов векторов силы и скорости с течением времени.

В таком случае обратимся к методу аналогий и постараемся «угадать» необходимое решение, используя опыт рассмотрения различных кинематических задач. Если рассмотреть движение точки на ободе колеса, катящегося без проскальзывания со скоростью  $\vec{v}$  по горизонтальной поверхности, то можно заметить, что ее скорость в верхней точке траектории равна  $2v$ , поскольку складываются скорости поступательного и вращательного движений.

Рассмотрим, колесо радиуса  $R = \frac{l}{4}$ , центр которого движется без проскальзывания со скоростью  $\vec{v}_0/2$  по горизонтальной поверхности. Тогда скорость движения его верхней точки ( $\vec{v}_0$ ) будет совпадать и по модулю и по направлению со скоростью частицы. Угловая скорость поворота колеса (соответственно и угловой скорости поворота колеса) в этом случае равна

$$\omega = \frac{v_0/2}{l/4} = 2 \frac{v_0}{l}. \quad (8)$$

Ускорение частицы будет обусловлено только вращением, следовательно, модуль силы, действующей на точку обода колеса массой  $m$ , будет равен

$$F = ma = m\omega^2 R = m \left( 2 \frac{v_0}{l} \right)^2 \frac{l}{4} = \frac{mv_0^2}{l}. \quad (9)$$

Проекции силы на оси координат равны

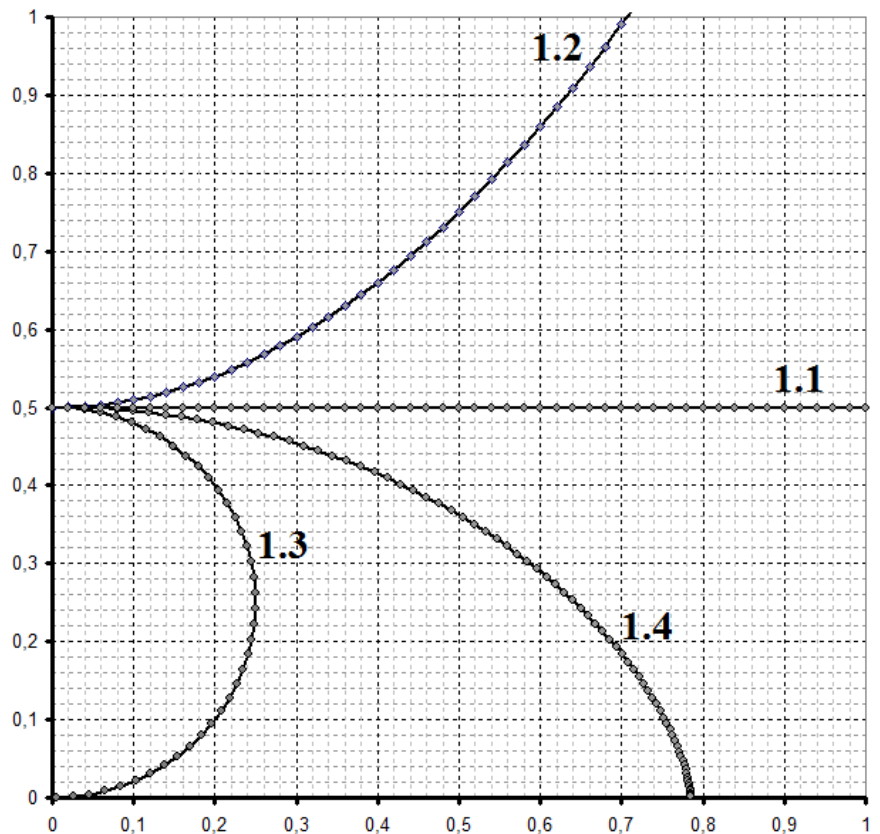
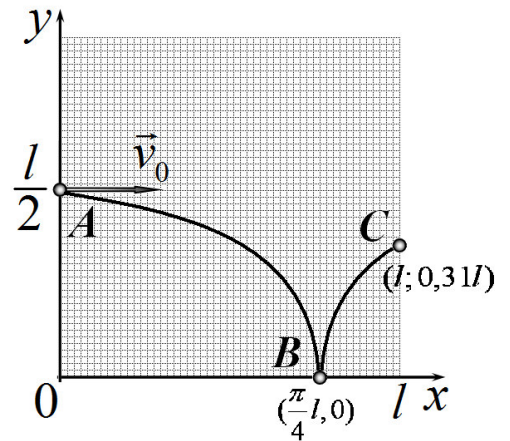
$$F_x = -\frac{mv_0^2}{l} \sin\left(2 \frac{v_0}{l} t\right) \quad (10)$$

$$F_y = -\frac{mv_0^2}{l} \cos\left(2 \frac{v_0}{l} t\right).$$

Таким образом, начальные условия (координаты и скорости) и зависимости ускорений от времени в дух задач совпадают, поэтому совпадают и законы движения. Таким образом, траекторией движения частицы в данном случае будет траектория точки на ободе катящегося без проскальзывания колеса – *циклоида*.

Следовательно, частица в первый раз коснется границы выделенной области в точке *B* (см. рис.) через время, равное половине оборота колеса  $t = \frac{\pi l}{2v_0}$  в

точке с координатами  $(\frac{\pi}{4}l, 0)$ .



В заключение продемонстрируем все точные траектории движения точки, рассмотренные в данной задаче на отдельном рисунке.

## Задача 9-2

### 1. Постоянные потери

- 1.1. За время  $t$  в сосуд от нагревателя поступит энергия  $E_{\text{н}} = Pt$ . Тепловые потери осуществляются через боковую поверхность сосуда и поверхность воды в сосуде. Тогда общая площадь механизма тепловых потерь:

$$S_{\text{пот}} = 2\pi rH + \pi r^2 = 707 \text{ см}^2$$

За время  $t$  на тепловые потери уйдет энергия  $E_{\text{пот}} = q_0 S_{\text{пот}} t$ .

Поступающая энергия идет на нагревание воды, массу которой можно определить через ее объем:

$$m_0 = \rho \pi r^2 H = 1,57 \text{ кг}$$

Тогда, записывая количество энергии, необходимое на нагрев воды, получаем:

$$E_{\text{н}} - E_{\text{пот}} = cm(T_2 - T_1)$$

Подставляя выражения для энергий, найдем время, необходимое для нагрева воды:

$$t = \frac{cm_0(T_2 - T_1)}{P - q_0 S_{\text{пот}}} = 141 \text{ с} = 2,36 \text{ мин}$$

- 1.2. Чтобы воду можно было нагревать, количество потерь энергии не должно превышать количество поступающей от нагревателя. Пограничный случай:  $E_{\text{н}} = E_{\text{пот}}$ , откуда при подстановке соответствующих выражений:

$$H_{\text{max}} = \frac{P/q_0 - \pi r^2}{2\pi r} = 72,4 \text{ см}$$

- 1.3. Пусть объем воды, приходящий в единицу времени равен  $\lambda_0$ . Тогда объем воды  $\lambda_0 t$ , или массу  $\rho \lambda_0 t$ , поступающую (и уходящую) за время  $t$ , необходимо успеть нагреть от температуры  $T_1$  до  $T_3$ , то есть:

$$E_{\text{н}} - E_{\text{пот}} = c(\rho \lambda_0 t)(T_3 - T_1)$$

Подставляя полученные ранее выражения для энергий, пренебрегая потерями теплоты и площадью подводющих и уводящих воду труб, получим:

$$\lambda_0 = \frac{P - q_0 S_{\text{пот}}}{c\rho(T_3 - T_1)} = 33,3 \text{ см}^3/\text{с} = 2,00 \text{ л/мин}$$

### 2. Переменные потери

- 2.1. Мощность тепловых потерь теперь определяется выражением  $P_{\text{пот}} = \beta(T - T_1)S_{\text{пот}}$ , где  $T$  – текущая температура воды. Когда вода оказывается при максимальной неизменной температуре  $T_{\text{max}}$ , ее нагрева больше не происходит, и вся мощность, получаемая от плитки, уходит в тепловые потери:

$$P = P_{\text{пот}} = \beta(T_{\text{max}} - T_1)S_{\text{пот}}$$

Отсюда максимальная температура:

$$T_{\text{max}} = \frac{P}{\beta S_{\text{пот}}} + T_1 = 114 \text{ }^\circ\text{C}$$

Однако при нормальном давлении вода может нагреться лишь до температуры кипения (за исключением некоторых «экзотических» случаев). Поэтому корректным ответом данного пункта будет: воду можно нагреть вплоть до температуры кипения  $T_{\text{кип}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- 2.2. Из графика видно, что в начальный момент времени температура жидкости  $T$  равна температуре окружающего воздуха  $T_1$ . Тогда мощность тепловых потерь  $P_{\text{пот}} = 0$ . Записывая уравнение теплового баланса для небольшого промежутка времени  $\Delta t$  в начале нагрева, когда вода успела нагреться на некоторую температуру  $\Delta T$ , получим:

$$P\Delta t - 0 = cm_0\Delta T$$

Откуда можно выразить искомую мощность плитки:

$$P = cm_0 \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Отношение  $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ , описывающее, как уже было отмечено, скорость нагрева/остывания воды, можно найти, построив касательную к графику зависимости температуры воды от времени в точке  $t = 0$ . Тогда, выбирая промежуточный отрезок  $\Delta t$  на оси температур, можно найти соответствующее приращение температуры  $\Delta T$  и найти отношение:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 22,5 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{мин}} = 0,375 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{с}}$$

Тогда полезная мощность плитки оказывается равной:

$$P = 2470 \text{ Вт}$$

Из графика также можно заметить, что максимальная температура нагрева воды составляет  $T_{\max 1} = 50^{\circ}\text{C}$ . Тогда, как и в пункте 2.1, получаем выражение

$$P = \beta_1 (T_{\max 1} - T_1) S_{\text{пот.}}$$

Отсюда коэффициент теплоотдачи:

$$\beta_1 = \frac{P}{(T_{\max 1} - T_1) S_{\text{пот.}}} = 1160 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

2.3. Вновь запишем уравнение теплового баланса при остывании жидкости на  $\Delta T$  за малый промежуток времени  $\Delta t$  в какой-то момент:

$$\beta_1 (T - T_1) S_{\text{пот.}} \Delta t = cm_0 \Delta T$$

Отсюда, зная значение  $\beta_1$  и остальных характеристик из предыдущих пунктов, можем выразить зависимость убывания температуры воды от ее температуры:  $\Delta T(T)$ :

$$\Delta T(T) = \frac{\beta_1 S_{\text{пот.}}}{cm_0} (T - T_1) \Delta t$$

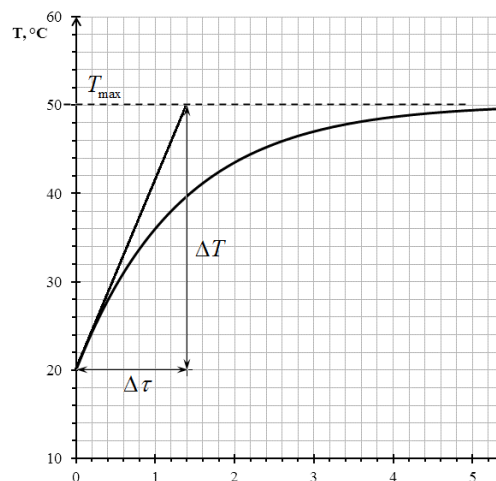
Выбирая за  $\Delta t$ , некоторый промежуток времени, например 0,5 мин, можем пошагово вычислять примерное изменение температуры и заносить данные в таблицу:

Таблица 1 – Пошаговое вычисление температуры воды от времени при остывании

$t$ , мин	$T$ , $^{\circ}\text{C}$	$\Delta T$ , $^{\circ}\text{C}$	$T - \Delta T$ , $^{\circ}\text{C}$
0	50	11,194	38,806
0,5	38,806	7,017	31,789
1	31,789	4,399	27,390
1,5	27,390	2,758	24,633
2	24,633	1,729	22,904
2,5	22,904	1,084	21,821
3	21,821	0,679	21,141
3,5	21,141	0,426	20,715
4	20,715	0,267	20,449
4,5	20,449	0,167	20,281
5	20,281	0,105	20,176

$t$ , мин	$T$ , $^{\circ}\text{C}$	$\Delta T$ , $^{\circ}\text{C}$	$T - \Delta T$ , $^{\circ}\text{C}$
5,5	20,176	0,066	20,110
6	20,110	0,041	20,069
6,5	20,069	0,026	20,043
7	20,043	0,016	20,027
7,5	20,027	0,010	20,017
8	20,017	0,006	20,011
8,5	20,011	0,004	20,007
9	20,007	0,003	20,004
9,5	20,004	0,001	20,003
10	20,003	0,001	20,002

На основании полученных данных можно нанести точки на искомый график зависимости и провести через них сглаживающую кривую:



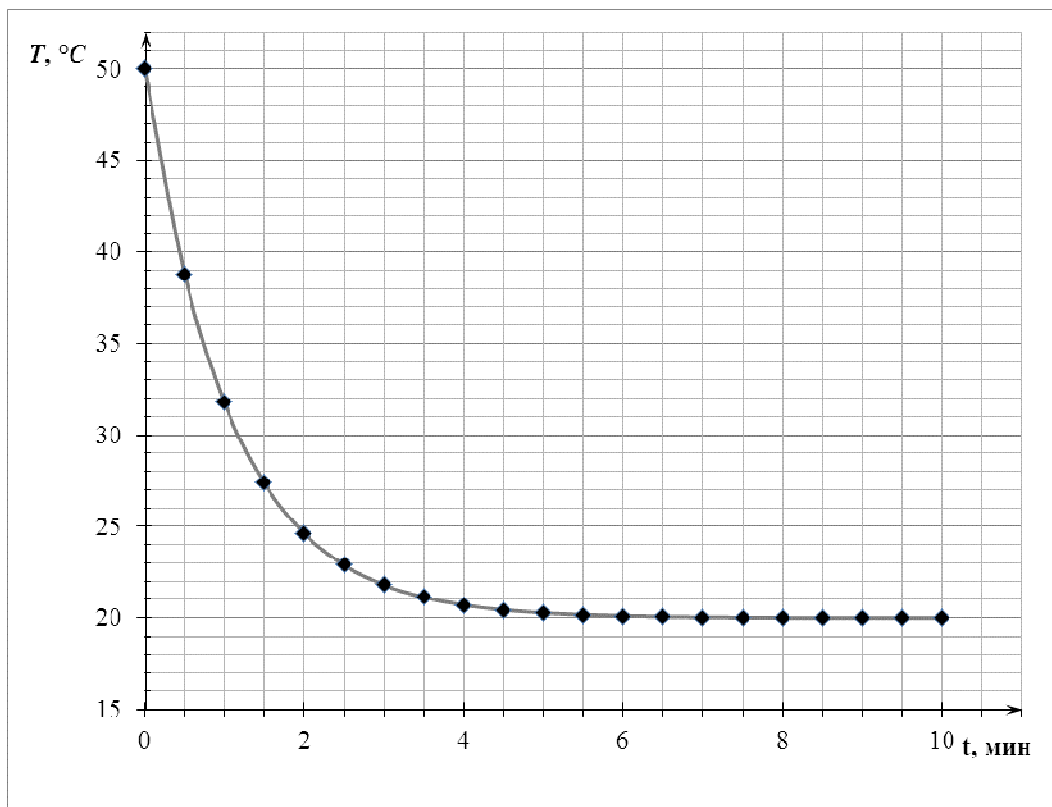
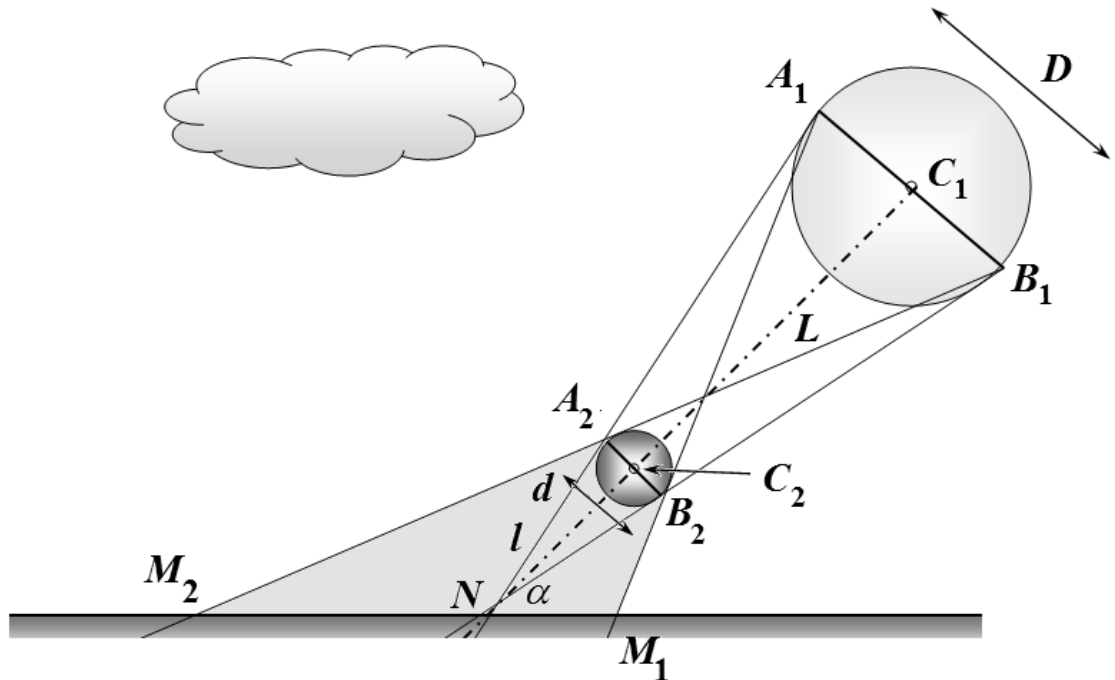


Рисунок 1 - Зависимость температуры воды от времени в ходе остывания

### Задача 9-3

Основная причина, приводящая к исчезновению тени – конечные размеры Солнца (т.е. Солнце не является точечным источником). Лучи, испущенные разными участками Солнца по разному перекрываются воздушным шаром. Поэтому за последним образуется область полной тени, куда не попадают никакие лучи, и область полутени, в которую не попадают некоторые солнечные лучи. Для оценки можно считать, что тень исчезает, когда область полной тени перестает простирается до поверхности земли.



Для построения областей полной тени и полутени следует построить области теней для лучей, испущенных крайними точками диска Солнца (см. рис, на котором поперечные размеры сильно увеличены). Таковыми являются конусы, ограниченные лучами  $A_1A_2N - A_1B_2M$  и  $B_1A_2M_2 - B_1B_2N$ . Из рисунка следует, что область полной тени является конус, сечение которого на рисунке -  $A_2NB_2$ . Высоту этого конуса легко найти, используя подобие треугольников  $A_2NB_2$  и  $A_1NB_1$ :

$$\frac{|A_2B_2|}{|C_2N|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1N|} \Rightarrow l = \frac{2R}{D} L \quad (1)$$

здесь обозначено  $l = |C_2N|$  - расстояние от центра шара до земли,  $L = |C_1N|$  - расстояние от Земли до Солнца,  $2R = |A_2B_2|$  - диаметр шара,  $D = |A_1B_1|$  - диаметр Солнца. Далее

учтем, что  $\frac{D}{L} = \delta\alpha$  - угловой размер Солнца, а высота шара над поверхностью земли

$h = l \sin \alpha$ . Следовательно, искомая высота равна

$$h = \frac{2R}{\delta\alpha} \sin \alpha. \quad (2)$$

Для численных расчетов необходимо угловой размер Солнца следует выразить в радианах:

$$h = \frac{2R}{\delta\alpha} \sin \alpha = \frac{40 \text{ м}}{\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 0,5^\circ} \sin 45^\circ \approx 3 \text{ км}. \quad (3)$$

## Задача 10-1.

### 1.1 Модуль Юнга и коэффициент жесткости.

1.1.1 Выразим силу упругости из определения механического напряжения  $F_{\text{упр}} = \sigma S$  и подставим в полученное выражение закон Гука в виде (1), тогда

$$F_{\text{упр}} = \sigma S = \epsilon ES = \frac{x}{l} ES = \left( E \frac{S}{l} \right) \cdot x = kx. \quad (1)$$

Из (1) следует, что коэффициент жесткости цилиндра выражается через его геометрические размеры следующим образом

$$k = E \frac{S}{l}. \quad (2)$$

1.1.2 Энергия упругих деформаций выражается по известной формуле  $E_{\text{II}} = \frac{kx^2}{2}$  (Физика – 9, с. 168). Во избежание путаницы с модулем Юнга будем в дальнейшем обозначать потенциальную энергию упругих деформаций через

$$E_{\text{II}} = W_{\text{II}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) полученное выражение (2) для коэффициента жесткости, находим

$$W_{\text{II}} = \frac{kx^2}{2} = E \frac{S}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{E}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \cdot (Sl) = \frac{E\epsilon^2}{2} \cdot V, \quad (4)$$

– где  $V = S \cdot l$  – объём рассматриваемого цилиндра.

Для нахождения объёмной плотности энергии  $\rho_E$  упругих деформаций (т.е. энергии упругих деформаций, заключенной в единице объёма деформированной среды) необходимо взять отношение (4) к рассматриваемому объёму

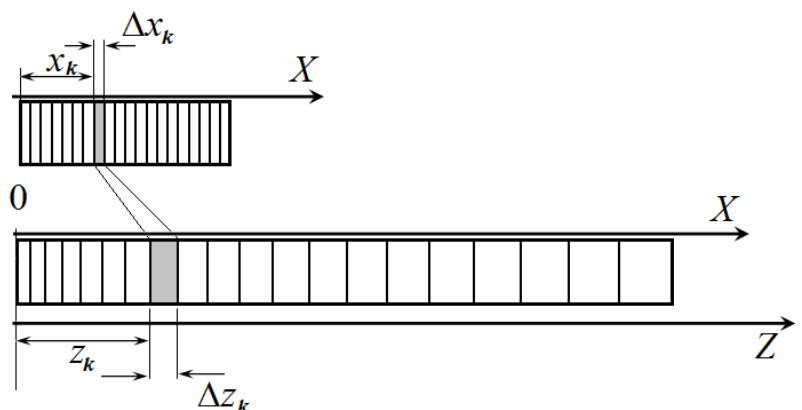
$$\rho_E = \frac{E\epsilon^2}{2} \cdot V / V = \frac{E\epsilon^2}{2} = \frac{\sigma \cdot \epsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (5)$$

Как следует из (5), плотность энергии упругих деформаций изменяется от точки к точке, если изменяется механическое напряжение или относительная деформация в образце.

## 2. Деформации и движение.

Поясним сначала, что следует понимать под относительной деформацией  $\epsilon(x)$ , которая является функцией координаты.

Свяжем ось  $Ox$  со стержнем, начало оси совместим с левым торцом стержня (см. рис). Мысленно разобьем недеформированный стержень на тонкие слои одинаковой толщины  $\Delta x$ . Пронумеруем эти слои индексом  $k$ . Выделим один из этих слоев, координату которого обозначим  $x_k$ .





Теперь представим, что стержень подвергся неоднородной деформации, например, удлинению под действием собственного веса. Тогда границы каждого слоя сместились, причем на разные расстояния. Введем новую неподвижную ось  $Oz$ , ось же  $Ox$ , по-прежнему, считаем связанной со стержнем, иными словами будем считать, что она деформировалась вместе со стержнем. Пусть координата левой стороны выделенного слоя приняла значение  $z_k$ , а его толщина стала равной  $\Delta z_k$ . Тогда абсолютная деформация этого слоя равна  $\delta x_k = \Delta z_k - \Delta x_k$ , соответственно относительная деформация

$$\varepsilon_k = \frac{\delta x_k}{\Delta x_k} = \frac{\Delta z_k - \Delta x_k}{\Delta x_k}. \quad (6)$$

Если толщины выделенных слоев считать бесконечно малыми, то вместо номера слоя  $k$ , можно его характеризовать координатой  $x$  и говорить об относительной деформации, как функции  $x$ .

Зная относительную деформацию как функцию координаты, не сложно найти удлинение всего стержня. Так удлинение выделенного участка равно  $\delta x_k = \varepsilon_k \Delta x_k$ , а полное удлинение находится суммированием по всем слоям, т.е.

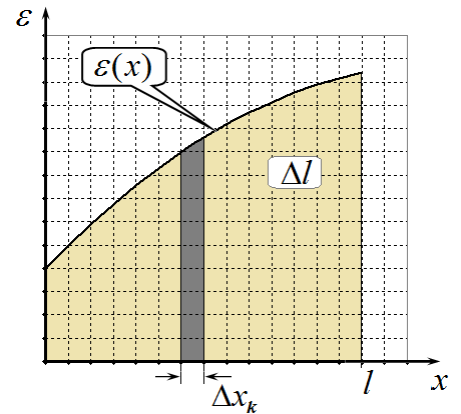
$$\Delta l = \sum_k \varepsilon_k \Delta x_k. \quad (7)$$

Если слои считать бесконечно тонкими, а деформацию функцией координаты, то полное удлинение станет равным площади под графиком зависимости  $\varepsilon(x)$ .

Также из формулы можно выразить зависимость новой координаты слоя через относительную деформацию  $\varepsilon(x)$ :

$$\begin{aligned} \Delta z_k &= \Delta x_k + \varepsilon_k \Delta x_k \Rightarrow \\ z_k &= \sum_{i=0}^k \Delta x_i + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \Delta x_i = x_k + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \Delta x_i \end{aligned} \quad (8)$$

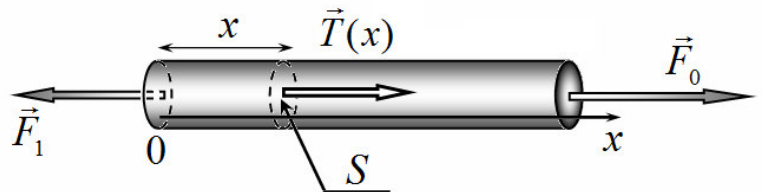
где суммирование ведется по всем предшествующим слоям. При бесконечно малых ширинах слоев сумма в формуле (8) может быть выражена, как площадь под графиком зависимости  $\varepsilon(x)$  в интервале от 0 до  $x$ .



Теперь можно приступить к непосредственному решению второй части задачи.

Решим эту задачу в общем виде (что не запрещает решать каждый случай отдельно).

Итак, к правому торцу стержня приложили силу  $F_0$ , а к левому  $F_1$ .



В течении некоторого промежутка времени разные части стержня будут двигаться с разными скоростями, что приведет к возникновению деформаций внутри стержня. По прошествии некоторого промежутка времени деформации стабилизируются, после чего скорости всех точек стержня будут одинаковы, следовательно, будут одинаковы и их ускорения. Исходя из этого условия и с помощью второго закона Ньютона, мы сможем найти распределение сил упругости внутри стержня. Далее с помощью закона Гука мы сможем найти распределение относительных деформаций, что позволит нам рассчитать все требуемые характеристики.

Выделим участок стержня длиной  $x$ , начиная от его левого торца. На основании 2 закона Ньютона можно записать уравнение

$$m(x)a = T(x) - F_1 \quad (9)$$

где  $m(x) = m \frac{x}{l}$  - масса выделенной части стержня ( $m$  - масса всего стержня),  $T(x)$  - сила упругости, действующая со стороны правой части стержня,  $a$  - ускорение стержня. Ускорение можно найти, записывая уравнение 2 закона Ньютона для всего стержня:

$$ma = F_0 - F_1 \Rightarrow a = \frac{F_0 - F_1}{m} \quad (10)$$

Теперь из уравнения (9) можно найти зависимость силы упругости внутри стержня, как функцию координаты

$$T(x) = ma \frac{x}{l} + F_1 = (F_0 - F_1) \frac{x}{l} + F_1 = F_0 \frac{x}{l} + F_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (11)$$

Переход к относительной деформации определяется очевидной цепочкой преобразований:

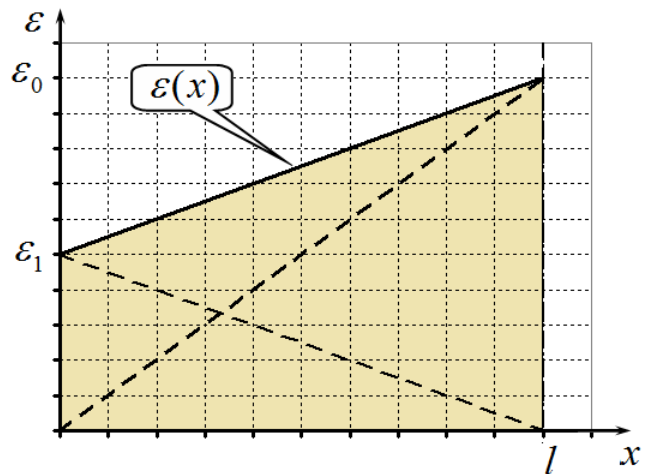
$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{T(x)}{SE} = \frac{F_0}{SE} \frac{x}{l} + \frac{F_1}{SE} \left(1 - \frac{x}{l}\right) = \\ &= \varepsilon_0 \frac{x}{l} + \varepsilon_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

где обозначено  $\varepsilon_0 = \frac{F_0}{SE}$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{F_1}{SE}$  - относительные деформации, создаваемые постоянными силами  $F_0, F_1$ , соответственно. График этой зависимости представляет собой прямую линию. Интересно отметить, что для относительных деформаций справедлив принцип суперпозиции (что следует из линейности закона Гука): сила  $F_0$  приводит к возникновению деформаций, линейно уменьшающихся от максимального значения  $\varepsilon_0$  в месте ее приложения (т.е. на правом торце) до нуля на противоположном торце; аналогично ведут себя деформации, создаваемые силой  $F_1$ : от максимального значения  $\varepsilon_1$  на левом торце, до нуля на правом.

Графики функции  $\varepsilon(x)$  и ее составляющих приведены на рисунке.

Как уже было отмечено, площадь под графиком равна полному удлинению стержня. В данном случае оно рассчитывается по формуле

$$\Delta l = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} l = \frac{F_0 + F_1}{2ES} l. \quad (13)$$



Для расчета энергии деформаций необходимо воспользоваться формулой для объемной плотности энергии (5). Полная энергия может быть найдена посредством вычисления суммы

$$W = \sum_k \frac{E \varepsilon_k^2}{2} S \Delta x_k \quad (14)$$

Подставляя выражение для зависимости  $\varepsilon(x)$ , получим

$$\begin{aligned} W &= \sum_k \frac{E \varepsilon_k^2}{2} S \Delta x_k = \frac{E}{2} S \sum_k \left( \varepsilon_0 \frac{x_k}{l} + \varepsilon_1 \left(1 - \frac{x_k}{l}\right) \right)^2 \Delta x_k = \\ &= \frac{E}{2} S \varepsilon_0^2 \sum_k \frac{x_k^2}{l^2} \Delta x_k + \frac{E}{2} S \varepsilon_1^2 \sum_k \left(1 - \frac{x_k}{l}\right)^2 \Delta x_k + 2 \frac{E}{2} S \varepsilon_0 \varepsilon_1 \sum_k \frac{x_k}{l} \left(1 - \frac{x_k}{l}\right) \Delta x_k \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим смысл полученного выражения. Первое слагаемое – полная энергия деформаций, обусловленных силой  $F_0$ ; второе – полная энергия деформаций, обусловленных силой  $F_1$ ; третье – дополнительное слагаемое, «перекрестный» член! Так как плотность энергии нелинейно зависит от относительной деформации, то для полной энергии принцип суперпозиции не «работает», что и иллюстрируется появлением третьего слагаемого!

Первая сумма может быть вычислена с помощью приведенной математической подсказки:

$\sum_k \frac{x_k^2}{l^2} \Delta x_k = \frac{1}{3} l$ . Вторая сумма имеет то же значение – какая разница суммировать слева

направо, или справа налево? Третья также может быть вычислена без особых проблем:

$$\sum_k \frac{x_k}{l} \left(1 - \frac{x_k}{l}\right) \Delta x_k = \sum_k \frac{x_k}{l} \Delta x_k - \sum_k \left(\frac{x_k}{l}\right)^2 \Delta x_k = \frac{1}{2} l - \frac{1}{3} l = \frac{1}{6} l.$$

Для полной энергии деформаций получаем формулу:

$$W = \frac{E}{2} S l \left( \frac{\varepsilon_0^2}{3} + \frac{\varepsilon_1^2}{3} + 2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{6} \right) = \frac{E \varepsilon_0^2}{6} \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) S l \quad (16)$$

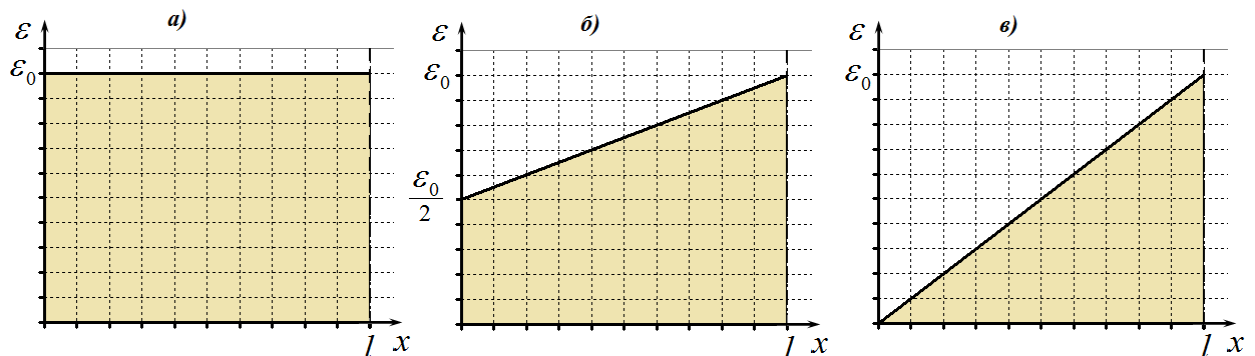
Если, наконец, подставить выражения для  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  через действующие силы, то получим окончательную формулу:

$$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{ES} \left( 1 + \frac{F_1}{F_0} + \left( \frac{F_1}{F_0} \right)^2 \right) \quad (17)$$

Три случая, приведенные в условии задачи различаются только значением силы  $F_1$ , поэтому требуемые ответы могут быть сведены в таблицу:

	а)	б)	в)	номер
$F_1$	$F_1 = F_0$	$F_1 = \frac{1}{2} F_0$	$F_1 = 0$	
$\varepsilon(x)$	$\varepsilon(x) = \frac{F_0}{ES} = const$	$\varepsilon(x) = \frac{F_0}{2ES} \left( 1 + \frac{x}{l} \right)$	$\varepsilon(x) = \frac{F_0}{ES} \frac{x}{l}$	(18)
$\Delta l$	$\Delta l = \frac{F_0 l}{ES}$	$\Delta l = \frac{3}{4} \frac{F_0 l}{ES}$	$\Delta l = \frac{1}{2} \frac{F_0 l}{ES}$	(19)
$W$	$W = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 l}{ES}$	$W = \frac{7}{24} \frac{F_0^2 l}{ES}$	$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{ES}$	(20)

Требуемые графики показаны на рисунке.



### 1.3 Разгон и деформации

1.3.1 Характерное время установления равновесия может быть оценено, как время распространения упругой волны по всему стержню:

$$\tau_0 = \frac{l}{c} = l \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (21)$$

где  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - скорость звука в материале стержня.

1.3.2 Сначала будем считать, что равновесные деформации стержня устанавливаются мгновенно. В этом случае энергия упругих деформаций определяется формулой (20в)

$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{ES}$ . Кинетическая энергия стержня изменяется по закону

$$E_{кин.} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(at)^2}{2} = \frac{m \left( \frac{F_0}{m} t \right)^2}{2} = \frac{F_0^2}{2m} t^2. \quad (22)$$

Приравнивая ее к потенциальной энергии деформаций, получим уравнение

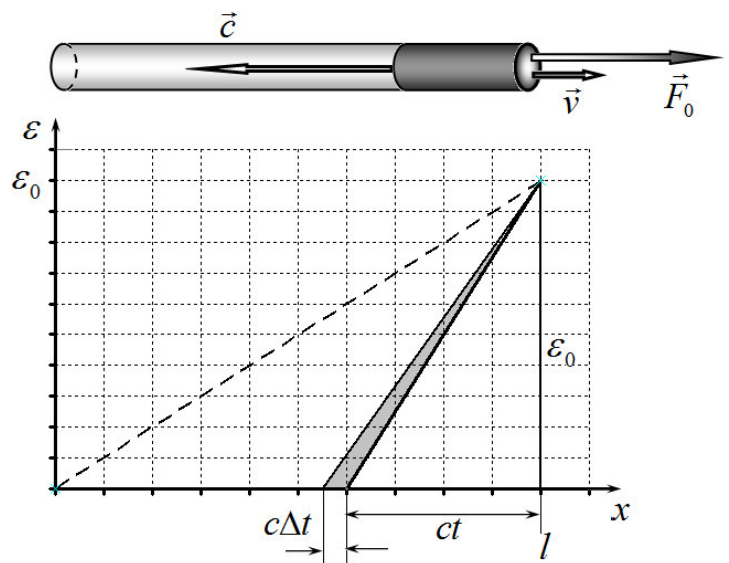
$$\frac{F_0^2}{2m} t^2 = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{ES} \quad (23)$$

Учитывая, что масса стержня  $m = \rho S l$ , из уравнения (23) найдем

$$t = \sqrt{\frac{ml}{3ES}} = \sqrt{\frac{\rho l^2}{3E}} = \frac{1}{\sqrt{3}} l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{3}} \quad (24)$$

Из полученной оценки следует, что равенство кинетической и потенциальной энергий достигается быстрее, чем волна деформаций достигнет конца стержня, то есть еще до того, как весь стержень придет в движение.

Следовательно, необходимо рассмотреть процесс распространения упругой волны в стержне. Для строго решения такой задачи следует решать волновое уравнение, описывающее процесс распространения деформаций. Однако для получения оценок можно предложить следующую упрощенную модель распространения: упругая волна движется вдоль стержня со скоростью звука  $\bar{c}$  от торца, к которому приложена сила  $\vec{F}_0$ . Этот торец стержня движется с некоторой скоростью  $\vec{v}$  (второй торец покоится до тех пор, пока волна деформаций его не достигнет!) В качестве основного упрощающего допущения, будем считать, что в возмущенной части стержня (длиной  $ct$ ) успевает произойти установление равновесного распределения относительных деформаций. Иными словами, график зависимости деформаций от координаты имеет вид отрезка прямой, нижний конец которого смещается к началу



координат со скоростью звука (см. рис). Как было показано ранее смещение конца стержня численно равно площади под графиком зависимости  $\varepsilon(x)$ . В рамках предложенной модели это смещение равно

$$\Delta z = \frac{1}{2} \varepsilon_0 ct \quad (25)$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{F_0}{SE}$ , по-прежнему.

Откуда следует, что конец стержня, к которому приложена сила, движется с постоянной скоростью

$$v = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \quad (26)$$

до тех пор, пока волна деформаций не достигнет противоположного конца стержня.

Другие точки стержня (до которых дошло возмущение) движутся с меньшими скоростями. Поэтому кинетическая энергия стержня, точнее его движущей части может быть записана в виде

$$E_{кин} = \frac{1}{2} \rho Sct \langle v^2 \rangle \quad (27)$$

где  $\rho Sct$  - масса движущейся части,  $\langle v^2 \rangle$  - средний квадрат скорости этой части стержня.

В принципе, в рамках нашей модели можно найти и распределение скоростей и вычислить точное значение среднего квадрата, но для оценки можно принять<sup>1</sup>

$\langle v^2 \rangle \approx \frac{1}{2} v_{\max}^2 = \frac{1}{8} \varepsilon_0^2 c^2$ , тогда кинетическая энергия стержня возрастает со временем по закону (с учетом выражения для скорости звука)

$$E_{кин} = \frac{1}{16} \rho Sct \varepsilon_0^2 c^2 = \frac{1}{16} E \varepsilon_0^2 Sct . \quad (28)$$

Для «треугольного» распределения деформаций потенциальная энергия была посчитана ранее (формула 20в)), которая в данном случае дает выражение

$$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2}{ES} ct = \frac{1}{6} E \varepsilon_0^2 Sct . \quad (29)$$

Сравнение эти двух выражение приводит к выводу: во время распространений волны потенциальная энергия деформаций всегда превышает кинетическую энергию!

К моменту  $\tau_0$ , когда волна достигает конца стержня, потенциальная энергия достигает своего максимального значения, а весь стержень приобретает скорость, рассчитанную по формуле (26). Далее, так как установилось равновесное распределение деформаций.

стержень начинает двигаться как единое целое с постоянным ускорением  $a = \frac{F_0}{m}$ . Чтобы

кинетическая энергия стержня стала равной его потенциальной энергии его скорость должна достичь величины  $v_1$ , которую можно найти из условия

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{6} E \varepsilon_0^2 Sl \Rightarrow \frac{1}{2} \rho S l v_1^2 = \frac{1}{6} E \varepsilon_0^2 Sl \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} c \varepsilon_0 . \quad (30)$$

Так как к моменту  $\tau_0$  скорость стержня определяется формулой (26), и стержень движется с ускорением

$$a = \frac{F_0}{m} = \frac{\varepsilon_0 ES}{\rho Sl} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{l} . \quad (31)$$

<sup>1</sup> Отметим, что точное значение  $\langle v^2 \rangle = 0,53 v_{\max}^2$

То время  $\tau_1$ , которое потребуется, чтобы достичь нужной скорости, находится из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{3}}c\varepsilon_0 - \frac{1}{2}c\varepsilon_0 = a\tau_1 \Rightarrow \tau_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)\frac{l}{c} \approx 0,1\frac{l}{c} \quad (32)$$

Прибавляя время разгона  $\tau_0$ , получим окончательную оценку искомого времени

$$\tau = 1,1\frac{l}{c}. \quad (33)$$

В заключение отметим, что результат зависит от используемой модели, однако можно считать, что оценка времени в общем виде имеет вид

$$\tau = A\frac{l}{c}. \quad (34)$$

Где  $A$  - безразмерный коэффициент незначительно превышающий 1.

## Задача 10-2

### 0. Уравнение адиабаты

С учётом уравнения состояния идеального газа уравнение адиабаты может быть преобразовано к виду

$$T^k \cdot p^{(1-k)} = \text{const} \quad \text{Или к виду} \quad T \cdot V^{(k-1)} = \text{const}$$

### 1. Цикл Отто

1.1 Найдем параметры рабочего тела во всех характерных точках цикла.

Точка 2

$$V_2 = \frac{V_1}{\varepsilon} \quad p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = p_1 \varepsilon^k \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \varepsilon^{k-1} \quad \text{откуда получаем}$$

$$T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}$$

Точка 3.

$$V_3 = V_2 = \frac{V_1}{\varepsilon} \quad p_3 = p_2 \lambda = p_1 \varepsilon^k \lambda \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = \lambda \quad \text{откуда получаем}$$

$$T_3 = T_2 \lambda = T_1 \varepsilon^{k-1} \lambda$$

Точка 4.

$$V_4 = V_1 \quad p_4 = p_3 \left(\frac{V_2}{V_4}\right)^k = p_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k = \frac{p_3}{\varepsilon^k} = p_1 \lambda$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \quad \text{откуда получаем}$$

$$T_4 = T_3 \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} = T_1 \varepsilon^{k-1} \lambda \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} = T_1 \lambda$$

1.2 Количество подведенной и отведенной теплоты определяются по формулам:

$$q_1 = C_V(T_3 - T_2), \quad |q_2| = C_V(T_4 - T_1)$$

или

$$q_1 = U_3 - U_2 = \frac{3}{2}(p_3 V_3 - p_2 V_2), \quad |q_2| = U_4 - U_1 = \frac{3}{2}(p_4 V_4 - p_1 V_1)$$

Подставляя эти значения теплот в формулу для термического КПД, получим:

$$\eta_t = 1 - \frac{|q_2|}{q_1} = 1 - \frac{C_V(T_4 - T_1)}{C_V(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad \text{или} \quad \eta_t = 1 - \frac{p_4 V_4 - p_1 V_1}{p_2 V_2 - p_1 V_1}$$

С учетом найденных значений параметров формула для КПД примет вид

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}$$

## 2. Цикл Дизеля

2.1 Параметры рабочего тела в характерных точках цикла будут:

Точка 2

$$V_2 = \frac{V_1}{\varepsilon}, \quad p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = p_1 \varepsilon^k, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \varepsilon^{k-1} \quad \text{откуда получаем}$$

$$T_2 = T_1 \varepsilon^{k-1}$$

Точка 3

$$V_3 = \rho V_2 = \frac{\rho V_1}{\varepsilon}, \quad p_3 = p_2 = p_1 \varepsilon^k, \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_2}{V_3} = \rho \quad \text{откуда получаем:}$$

$$T_3 = \rho T_2 = T_1 \rho \varepsilon^{k-1}$$

Точка 4

$$v_4 = v_1, \quad p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^k = p_1 \varepsilon^k \left(\frac{\rho V_1}{\varepsilon V_1}\right)^k = p_1 \rho^k,$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{k-1} \quad \text{Так как} \quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \text{то}$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{k-1} = T_1 \rho \varepsilon^{k-1} \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{k-1} = T_1 \rho^k$$

2.2 Количество подведенной и отведенной теплот определяются по формулам:

$$q_1 = C_p(T_3 - T_2), \quad |q_2| = C_V(T_4 - T_1)$$

$$\text{или} \quad q_1 = U_3 - U_2 + A_{23} = \frac{3}{2}(p_3 V_3 - p_2 V_2) + p_3(V_3 - V_2),$$

$$|q_2| = U_4 - U_1 = \frac{3}{2}(p_4 V_4 - p_1 V_1)$$

Термический кпд цикла в предположении постоянства теплоемкостей  $C_p$  и  $C_V$  и их отношения

$$k = \frac{C_p}{C_V} \quad \text{будет:} \quad \eta_t = 1 - \frac{|q_2|}{q_1} = 1 - \frac{C_V(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{k(T_3 - T_2)} \quad \text{или}$$

Подставляя полученные значения температур в формулу для термического КПД, получим

$$\eta_t = 1 - \frac{\rho^k - 1}{k \varepsilon^{k-1} (\rho - 1)}$$

## 3. Сравнение циклов Отто и Дизеля

4.1 Определим параметры  $P/P_0$  и  $V/V_0$  для характерных точек обоих циклов.

Цикл Отто

$\frac{V_1}{V_0} = 30,0$  - по условию,  $\frac{P_1}{P_0} = 1,00$  – по графику изотермы для  $T_{\min}$ , так как в точке 1 температура и давление должны быть минимальны.

Так как степень сжатия для цикла Отто  $\epsilon_V = 5,00$ , то  $\frac{V_2}{V_0} = \frac{V_3}{V_0} = 6,00$ . В точке 3 давление должно быть максимальным. В цикле Отто максимальному давлению соответствует максимальная температура. По графику изотермы для  $T_{\max}$  находим  $\frac{P_3}{P_0} = 30,0$

Используя уравнение адиабаты, найдём  $\frac{P_2}{P_0}$  и  $\frac{P_4}{P_0}$ .

$$\frac{P_2}{P_0} \left(\frac{V_2}{V_0}\right)^k = \frac{P_1}{P_0} \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^k, \quad \frac{P_2}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} \epsilon^k = 1,00 \cdot 5,00^{1,67} = 14,7$$

$$\frac{P_4}{P_0} \left(\frac{V_4}{V_0}\right)^k = \frac{P_3}{P_0} \left(\frac{V_3}{V_0}\right)^k, \quad \frac{P_4}{P_0} = \frac{P_3}{P_0} \frac{1}{\epsilon^k} = \frac{30,0}{5,00^{1,67}} = 2,04$$

$$\frac{V_4}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} = 30,0$$

Наносим точки с найденными параметрами на диаграмму и соединяем в цикл Отто. Точку 2 данного цикла обозначим  $2_V$ . Целесообразно просчитать по несколько промежуточных точек на адиабатах 1-2 и 3-4 для более точного изображения этих процессов.

### Цикл Дизеля.

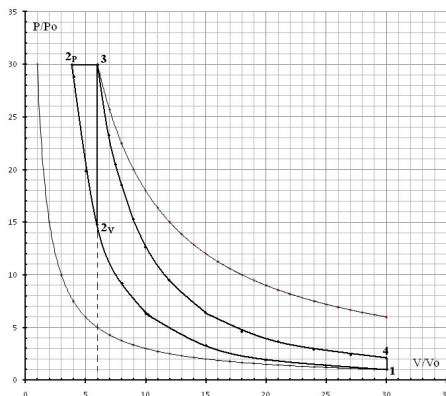
Исходя из условия, следует, что параметры точек 1, 3 и 4 циклов Отто и Дизеля будут совпадать. Для цикла Дизеля  $\frac{P_2}{P_0} = \frac{P_3}{P_0} = 30,0$ . Параметры объёма в точке 2 цикла Дизеля определим, используя уравнение адиабаты. Адиабата 1 – 2 цикла Отто должна лежать на адиабате 1 – 2 цикла Дизеля.

$$\frac{P_2}{P_0} \left(\frac{V_2}{V_0}\right)^k = \frac{P_1}{P_0} \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^k \quad \frac{V_2}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} \left(\frac{P_1 P_0}{P_0 P_2}\right)^{\frac{1}{k}} = 30,0 \cdot \left(\frac{1}{30,0}\right)^{\frac{1}{1,67}} = 3,91$$

Наносим точку 2 цикла Дизеля на диаграмму и достраиваем данный цикл. Точку 2 цикла Дизеля обозначим  $2_p$ .

4.2 Термический КПД цикла Отто:  $\eta_{iV} = 1 - \frac{1}{\epsilon^{k-1}} = 1 - \frac{1}{5,00^{1,67-1}} = 66,0\%$

Для расчёта термического КПД цикла Дизеля необходимо определить степень сжатия  $\epsilon_p$  и степень предварительного расширения  $\rho$ .



$$\epsilon_p = \frac{V_1}{V_0} \cdot \frac{V_0}{V_{2p}} = \frac{30,0}{3,91} = 7,67$$

$$\rho = \frac{V_2}{V_{2p}} = \frac{6,00}{3,91} = 1,53$$



$$\eta_{tp} = 1 - \frac{\rho^k - 1}{k\varepsilon^{k-1}(\rho - 1)} = 1 - \frac{1,53^{1,67} - 1}{1,67 \cdot 7,67^{1,67-1} \cdot (1,53 - 1)} = 70,2$$

## Задача 10-3 Установление равновесия.

### Часть 1. Лодка.

1.1 Уравнение движения лодки, следующее из 2 закона Ньютона имеет вид

$$ma = -\beta v, \quad (1)$$

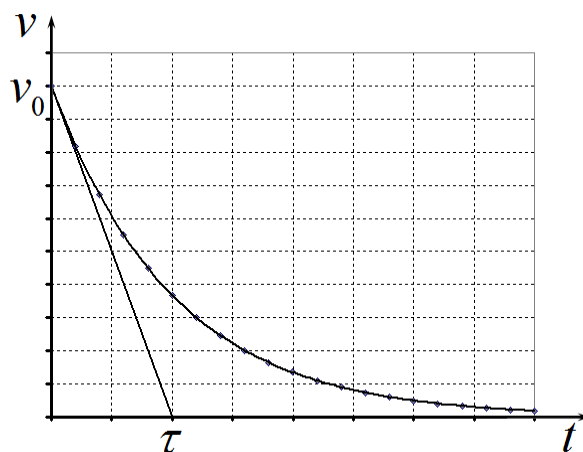
Которое очевидным образом приводится к виду уравнения (M1) из «математического введения»:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} v. \quad (2)$$

Из этого уравнения следует, что зависимость скорости от времени имеет вид монотонно убывающей функции (экспоненты) с характерным временем торможения

$$\tau = \frac{m}{\beta}. \quad (3)$$

График этой функции и метод нахождения характерного времени торможения показан на рисунке.



Для определения пути, пройденного лодкой, преобразуем уравнение (2):

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = -\frac{m}{\beta} \Delta v. \quad (4)$$

Так как скорость меняет от начального значения до нуля, то  $\Delta v = -v_0$ , то полный путь пройденный лодкой оказывается равным

$$L = \frac{m}{\beta} v_0 \quad (5)$$

Заметим, что формально этот конечный путь лодка пройдет за бесконечно большое время.

1.2 В этом случае лодка будет разгоняться с уменьшающимся ускорением. Уравнение движение имеет вид

$$ma = F_0 - \beta v. \quad (6)$$

Ускорение станет равным нулю, когда скорость лодки достигнет скорости установившегося движения, которую можно найти из уравнения (6), полагая  $a = 0$ :

$$\bar{v} = \frac{F_0}{\beta}. \quad (7)$$

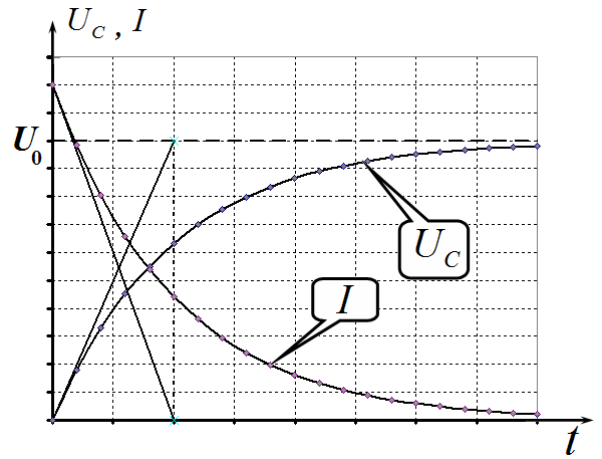
Перепишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} \left( v - \frac{F_0}{\beta} \right). \quad (6)$$

Если ввести новую переменную  $X = v - \bar{v}$ , имеющую смысл отклонения модуля скорости от скорости установившегося движения, то уравнение (7) преобразуется к известному виду

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} X. \quad (7)$$

Решение этого уравнения имеет вид монотонно возрастающей функции, стремящейся к предельному значению (установившейся скорости) с характерным временем разгона, определяемым формулой (3). График этой функции показан на рисунке.



## Часть 2 Конденсатор.

2.1 На основании закона для силы тока через резистор можно записать уравнение

$$U_0 - U_c = IR \quad (8)$$

Сила тока в цепи равна скорости изменения заряда на конденсаторе, поэтому ее можно выразить через напряжение на конденсаторе

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C \frac{\Delta U_c}{\Delta t} \quad (9)$$

С учетом этого соотношения уравнение (8) преобразуется к знакомому виду:

$$RC \frac{\Delta U_c}{\Delta t} = U_0 - U_c \Rightarrow \frac{\Delta U_c}{\Delta t} = -\frac{1}{RC} (U_c - U_0) \quad (10)$$

Это уравнение, с точностью до обозначений совпадает с уравнением разгона лодки (6), поэтому оно будет иметь такое же решение. Из анализа этого уравнения следует, что характерное время зарядки конденсатора в данной цепи определяется формулой

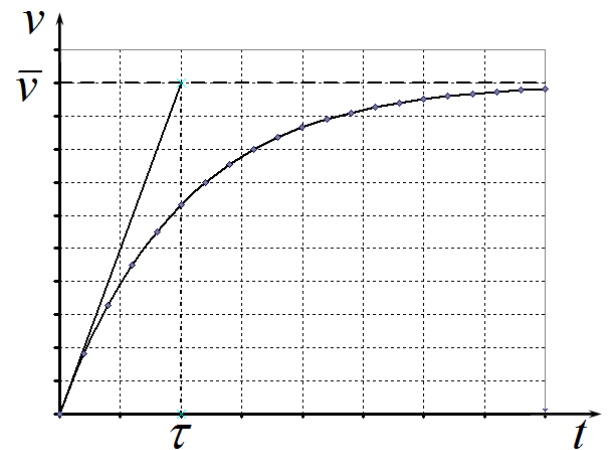
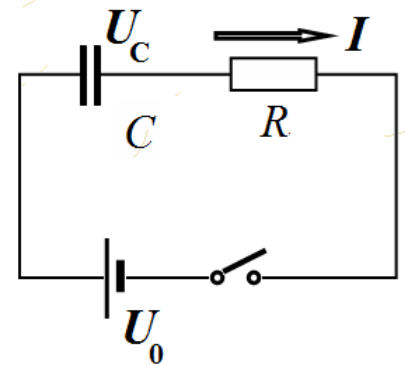
$$\tau = RC. \quad (11)$$

Для определения зависимости силы тока от времени выразим, скорость ее изменения из уравнения (8). После очевидных подстановок получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I}{\Delta t} &= \frac{1}{R} \frac{\Delta(U_0 - U_c)}{\Delta t} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta U_c}{\Delta t} = \\ &= -\frac{1}{RC} \frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC} I \end{aligned} \quad (12)$$

Которое совпадает с уравнением торможения лодки, с характерным временем также описываем формулой (11).

Графики зависимостей силы тока и напряжения на конденсаторе от времени показаны на рисунке.



2.2 Для описания протекания токов в цепи получим уравнения для напряжения на конденсаторе  $U_1$  (равное напряжению на резисторе  $R_1$ ). Для этого запишем выражения для силы тока на резисторе  $R_2$ :

$$I_2 = \frac{U_0 - U_1}{R_2}. \quad (13)$$

С другой стороны эта сила тока равна сумме сил токов через резистор  $R_1$  и через конденсатор

$$I_2 = I_1 + I_C, \quad (14)$$

которые в свою очередь могут выражены через напряжение  $U_1$ :

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \quad I_C = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C \frac{\Delta U_1}{\Delta t}. \quad (15)$$

Из этих выражений следует уравнение, описывающее изменение напряжения на конденсаторе

$$\frac{U_0 - U_1}{R_2} = \frac{U_1}{R_1} + C \frac{\Delta U_1}{\Delta t}. \quad (16)$$

В очередной раз мы получили уравнение, в котором скорость изменения некоторой величины (в данном случае  $U_1$ ) линейно зависит от этой величины. Приведем его к стандартному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_1}{\Delta t} &= -U_1 \frac{1}{C} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{U_0}{R_2 C}, \\ \frac{\Delta U_1}{\Delta t} &= -\frac{1}{\tau} (U_1 - \bar{U}_1) \end{aligned} \quad (17)$$

где обозначено  $\tau = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  - характерное время установления тока в цепи, или время

зарядки конденсатора.  $\bar{U}_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  - стационарное значение напряжения  $U_1$ . В

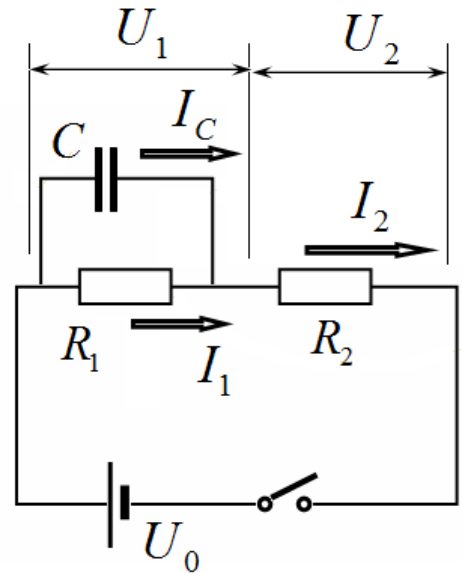
начальный момент конденсатор не заряжен, поэтому напряжение на нем равно нулю; ток протекающий через резистор  $R_2$  начинает заряжать конденсатор. После того, как конденсатор зарядится до предельного значения (когда выровняются силы токов через резисторы), напряжение на конденсаторе перестанет изменяться. Интересно отметить, что время зарядки также может быть записано, как  $RC$ , но только в качестве  $R$  следует брать сопротивление двух резисторов, соединенных параллельно!

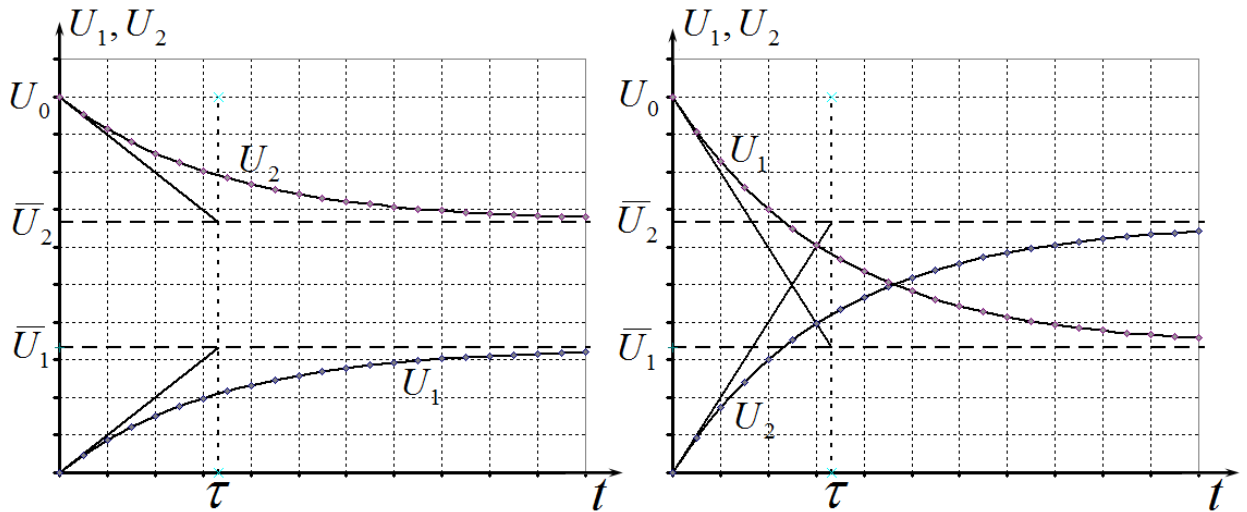
Напряжение на резисторе  $R_2$  может быть рассчитано по простой формуле

$$U_2 = U_0 - U_1 \quad (18)$$

Графики зависимостей напряжений от времени приведены на рисунке. Показано два случая: а)  $R_2 = 2R_1$ , б)  $R_1 = 2R_2$ .

2.3 При отключении источника конденсатор будет разряжаться только через резистор  $R_1$ . Поэтому характерное время разрядки будет равно  $\tau_2 = R_1 C$ .





### Задача 11-1

#### 1. Край соленоида

1.1 Для бесконечного соленоида

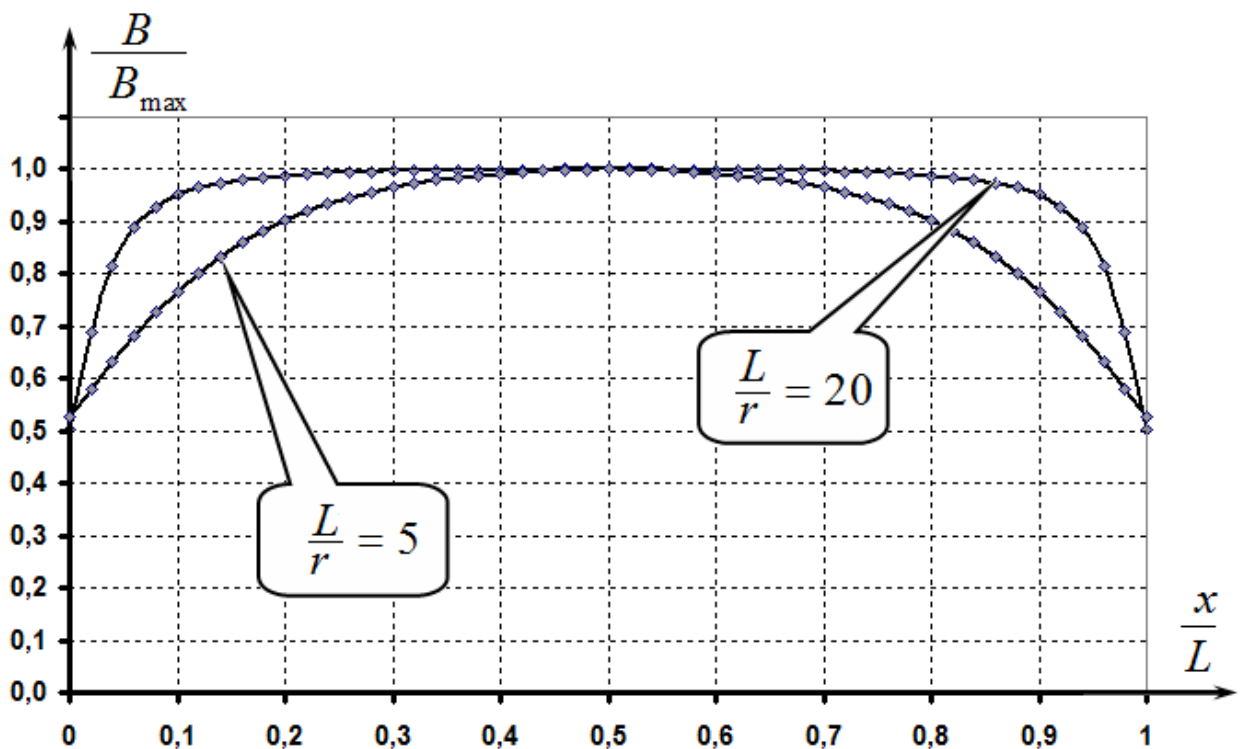
$$B_{\infty} = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos 0^0 + \cos 0^0) = \frac{\mu_0 IN}{L}$$

1.2 Для индукции в произвольной точке внутри соленоида

$$B_x = \frac{\mu_0 IN}{2L} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + r^2}} \right)$$

На рисунке показан график этой функции (от учеников его построение не требуется). Видно, что при увеличении отношения длины к радиусу соленоида влияние его краев на поле уменьшается. Можно сказать, что краевые эффекты распространяются на глубину порядка диаметра соленоида.

Индукция магнитного поля на краю соленоида равна:



$$B_0 = B_L = \frac{\mu_0 IN}{2L} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 IN}{2L\sqrt{1 + \frac{r^2}{L^2}}} \approx \frac{\mu_0 IN}{2L} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{L^2}\right) \approx \frac{\mu_0 IN}{2L} = \frac{1}{2} B_\infty$$

Индукция магнитного поля в центре соленоида ( $\tilde{\sigma} = L/2$ ) равна:

$$\hat{A}_{L/2} = \frac{\mu_0 IN}{2L} \cdot 2 \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}} = \frac{\mu_0 IN}{L\sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}} \approx \frac{\mu_0 IN}{L} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2}{L^2}\right) \approx \frac{\mu_0 IN}{L} = B_\infty$$

Индукция магнитного поля  $B_x$  вдоль оси соленоида конечной длины  $L \gg r$  принимает

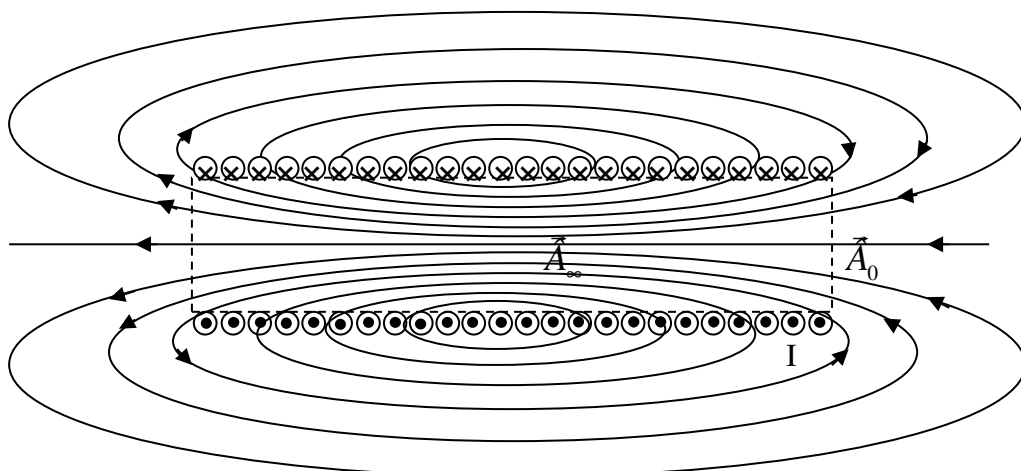
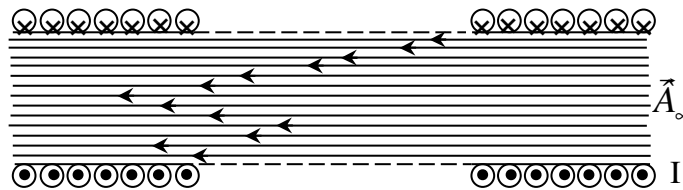
максимальное значения в центре соленоида  $\hat{A}_{L/2} = \frac{\mu_0 IN}{L} = B_\infty = B_{x(\max)}$  и минимальное

$$B_0 = B_L = \frac{\mu_0 IN}{2L} = \frac{1}{2} B_\infty = B_{x(\min)}$$

значения на краях соленоида

1.3 Если смотреть справа на соленоид, то направление тока совпадает с направлением вращения буравчика по часовой стрелке. Количество силовых линий магнитного поля  $K$  пропорционально модулю вектора магнитной индукции  $B$  ( $K \propto B$ ). В центре соленоида  $K_1=13$ , на краю соленоида  $K_2=7$ .

При конечной длине соленоида начинают сказываться краевые эффекты: поле внутри соленоида перестает быть однородным, меняется радиальная  $B_r$  и осевая  $B_x$  составляющие магнитного поля.



## 2. Край стола

2.1 Из условия равновесия цепочки,

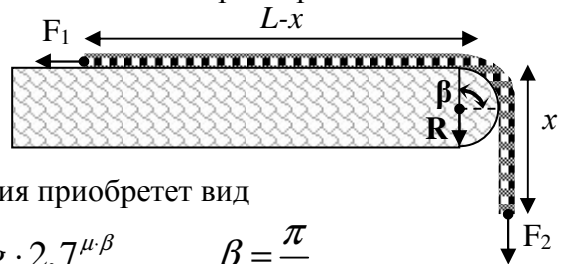
$$\frac{m}{L}x_1g = \mu \frac{m}{L}(L-x_1)g$$

следует, что максимально возможная длина свисающей части цепочки равна

$$x_1 = \frac{L}{\frac{1}{\mu} + 1} = \frac{L}{2,57} \approx 0,39L$$

2.2 Так как  $R \ll L$ , то массой цепочки на изгибе стола можно пренебречь:

$$\Delta m = \frac{m}{L}R\frac{\pi}{2} \approx 0$$



Тогда условие равновесия с учетом силы трения приобретет вид

$$\frac{m}{L}x_2g = \mu \frac{m}{L}(L-x_2)g \cdot 2,7^{\mu\beta}, \quad \text{где } \beta = \frac{\pi}{2}$$

Подстановка численных значений дает результат

$$x_2 = \frac{L}{\frac{1}{\mu 2,7^{\mu\beta}} + 1} = \frac{L}{\frac{\pi}{2 \cdot 2,7} + 1} = \frac{L}{1,582} \approx 0,63L$$

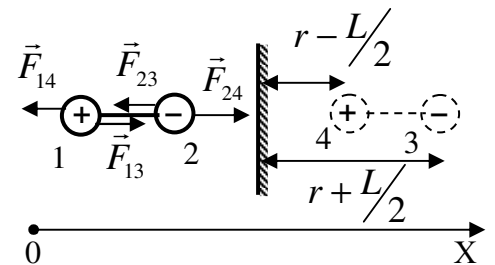
Учет действия края стола на цепочку увеличивает значение x более чем в полтора раза!

$$\frac{\tilde{\delta}_2}{\tilde{\delta}_1} \approx 1,63$$

## 3. «Край» электрического диполя

3.1 Для определения силы взаимодействия диполя с проводящей плоскостью воспользуемся методом электростатических изображений.

$$\vec{F}_\perp = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{23}$$



$$F_\perp = kq^2 \left( -\frac{1}{4r^2} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4\left(r + \frac{L}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\left(r - \frac{L}{2}\right)^2} \right) = \frac{kq^2}{4} \left( -\frac{2}{r^2} + \frac{2r^2 + \frac{L^2}{2}}{r^4 \left(1 - \frac{L^2}{4r^2}\right)^2} \right)$$

$$\left(1 - \frac{L^2}{4r^2}\right)^{-2} \approx 1 - (-2)\frac{L^2}{4r^2} = 1 + \frac{L^2}{2r^2}$$

Учтем формулу приближения:

$$F_{\perp} = \frac{kq^2}{4} \left( -\frac{2}{r^2} + \frac{\left(2r^2 + \frac{L^2}{2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{2r^2}\right)}{r^4} \right) \approx \frac{3kq^2 L^2}{8r^4}$$

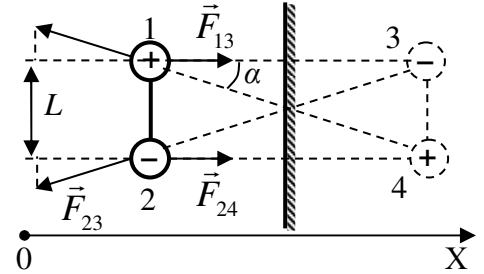
Учтено, что  $\frac{L^4}{2r^2} \approx 0$ , т. к.  $L \gg r$ .  $\vec{F}_{14}$

3.2 Из симметрии задачи следует, что

$$F_{14} = F_{23} = k \frac{q^2}{L^2 + 4r^2}, \quad F_{13} = F_{24} = k \frac{q^2}{4r^2}$$

Сила взаимодействия диполя с проводящей плоскостью при параллельной ориентации равна:

$$F_{\square} = 2F_{13} - 2F_{14} \cos \alpha$$



$$F_{\square} = 2kq^2 \left( \frac{1}{4r^2} - \frac{1}{L^2 + 4r^2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{L^2 + 4r^2}} \right) = 2kq^2 \left( \frac{1}{4r^2} - \frac{2r}{8r^3 \left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{3/2}} \right)$$

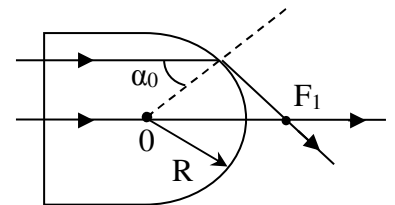
По формуле приближения  $\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{L^2}{4r^2}$

$$F_{\square} = 2kq^2 \left( \frac{1}{4r^2} - \frac{1}{4r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{L^2}{4r^2}\right) \right) = \frac{3kq^2 L^2}{4r^4} \quad F_{\perp} = \frac{1}{2} F_{\square}$$

#### 4. Край сферической линзы

4.1 Расстояние крайнего фокуса от центра сферической поверхности OF<sub>1</sub> для плосковыпуклой поверхности определим из условия полного внутреннего отражения.

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}, \quad OF_1 = \frac{R}{\cos \alpha_0} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{Rn}{\sqrt{n^2 - 1}}$$



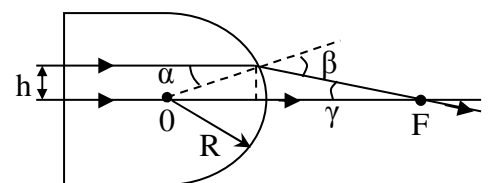
Расстояние параксиального фокуса от центра сферической поверхности OF для плосковыпуклой поверхности определим для очень узкого пучка лучей.

Для малых углов можно считать  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$

$$n\alpha = \beta \quad (1), \quad \frac{h}{R} = \alpha \quad (2), \quad \frac{h}{OF - R} = \gamma \quad (3), \quad \beta = \alpha + \gamma \quad (4)$$

Решая систему уравнений (1) – (4), получаем:

$$OF = \frac{Rn}{n - 1}$$





$$\Delta F = Rn \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right)$$

4.2 Расстояние крайнего фокуса от центра сферической поверхности OF<sub>1</sub> для плосковогнутой поверхности определим из условия полного внутреннего отражения.

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}$$

$$OF_1 = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{R}{\sqrt{n^2-1}}$$

Расстояние параксиального фокуса от центра сферической поверхности OF для плосковогнутой поверхности определим для очень узкого пучка лучей.

Для малых углов можно считать  $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$

$$n\alpha = \beta \quad (1), \quad \frac{h}{R} = \alpha \quad (2), \quad \frac{h}{OF-R} = \gamma \quad (3), \quad \beta = \alpha + \gamma \quad (4)$$

$$OF = \frac{Rn}{n-1}$$

Решая систему уравнений (1) – (4), получаем:

$$\Delta F' = R \left( \frac{n}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right)$$

4.3 Можно предложить несколько способов уменьшения сферической aberrации сферической поверхности линзы:

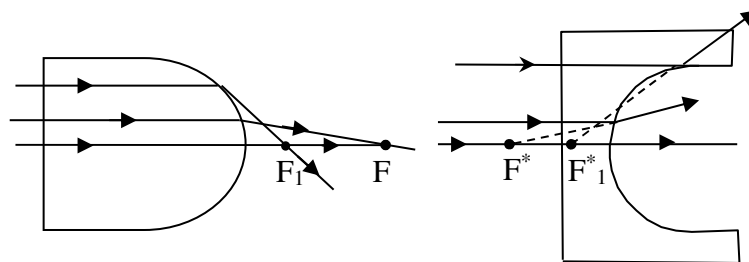
А) С увеличением показателя преломления материала линзы уменьшается  $\Delta F$ .

$$\Delta F = Rn \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right) \quad \Delta F' = R \left( \frac{n}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right)$$

n	$\Delta F$	$\Delta F^*$
1,5	2R	2,41R
2	0,85R	1,42R

В) Уменьшение ширины пучка света приближает значение крайнего фокуса к параксиальному, что приводит к уменьшению значения  $\Delta F$ . Ширину пучка света можно регулировать диафрагмой.

С) Можно заметить, что плосковыпуклая сферическая поверхность смещает крайний фокус по ходу лучей, а плосковогнутая поверхность смещает крайний фокус против хода лучей!



фокус по ходу лучей, а плосковогнутая поверхность смещает крайний фокус против хода лучей!

## Задача 11-2

### 1. Меняем волну

1.1 Из графика для пробной волны находим:  $U_{з\text{ проб}} = 2,0 \text{ В}$ ,  $I_{\text{макс проб}} = 6,0 \text{ мкА}$ . Из уравнения фотоэффекта:

$$eU_{з\text{ проб}} = E_{\text{кин макс}} = h\nu_{\text{проб}} - A_{\text{вых}} = h \frac{\omega_{\text{проб}}}{2\pi} - A_{\text{вых}} \quad (1)$$

Отсюда можно заметить, что задерживающее напряжение для одной и той же пластины зависит только от частоты падающего излучения, потому в данном пункте задерживающее напряжение останется таким же:

$$U_{з\text{ 1.1}} = U_{з\text{ проб}} = 2,0 \text{ В}$$

Ток насыщения пропорционален количеству вылетевших электронов, которое пропорционально количеству падающих фотонов. Количество фотонов, падающих на пластину, можно определить, разделив энергию падающего поля на энергию одного фотона. Энергия же падающего поля, как сказано в условии, пропорциональна квадрату напряженности поля. Данную связь можно записать следующим образом (знак  $\propto$  означает прямую пропорциональность):

$$I_{\text{макс}} \propto N_e \propto N_{\phi} \propto \frac{w}{h\nu} \propto \frac{E_0^2}{\omega} \quad (2)$$

Зная ток насыщения и характеристики поля пробной волны, можем записать пропорцию:

$$\frac{I_{\text{макс проб}}}{I_{\text{макс 1.1}}} = \frac{E_0^2 / \omega}{E_1^2 / \omega} = \frac{E_0^2}{E_1^2}$$

Отсюда находим ток насыщения:

$$I_{\text{макс 1.1}} = I_{\text{макс проб}} \frac{E_1^2}{E_0^2} = 16,7 \text{ мкА}$$

Заметим, что начальная фаза  $\varphi_0$  никакого влияния на ток насыщения или задерживающее напряжение не оказывает.

1.2 Из уравнения (1) можно найти работу выхода пластины, используя характеристики пробной волны:

$$A_{\text{вых}} = h \frac{\omega_{\text{проб}}}{2\pi} - eU_{з\text{ проб}} = 6,82 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,26 \text{ эВ}$$

Тогда, аналогично, задерживающее напряжение можно рассчитать следующим образом:

$$U_{з\text{ 1.2}} = \frac{1}{e} \left( h \frac{\omega'}{2\pi} - A_{\text{вых}} \right) = 1,01 \text{ В}$$

Используя отношения (2) составим пропорцию для нахождения тока насыщения:

$$\frac{I_{\text{макс проб}}}{I_{\text{макс 1.2}}} = \frac{E_0^2 / \omega}{E_0^2 / \omega'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

Откуда находим ток насыщения:

$$I_{\max 1.2} = I_{\max \text{проб}} \frac{\omega}{\omega'} = 7,13 \text{ мкА}$$

## 2. Сложные волны

### 2.1. Задерживающее напряжение и ток насыщения.

2.1.a) Используя формулу приведения:  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ , получаем, что падающее поле можно представить в виде суммы двух плоских волн с амплитудой  $E_0/2$ :

$$E(t) = \frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2)$$

Задерживающее напряжение определяется максимальной кинетической энергией вылетающих электронов, которые будут обусловлены волной с максимальной частотой. Из уравнения фотоэффекта получим:

$$U_{з 2.1} = \frac{1}{e} \left( h \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi} - A_{\text{вык}} \right) = 2,10 \text{ В}$$

Аналогично соотношению (2) получаем пропорциональность (здесь важно помнить, что квантовый выход считаем не зависящим от частоты):

$$I_{\max 2.1} \propto N_e \propto N_{\Phi} \propto \frac{w_1}{h(\nu_1 + \nu_2)} + \frac{w_2}{h(\nu_1 - \nu_2)} \propto \frac{(E_0/2)^2}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{(E_0/2)^2}{\omega_1 - \omega_2}$$

Приводя выражение к общему знаменателю и составляя пропорцию:

$$\frac{I_{\max 2.1}}{I_{\max \text{проб}}} = \frac{\frac{E_0^2 \omega_1}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}}{E_0^2 / \omega} = \frac{\omega_1 \omega}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

Отсюда находим ток насыщения:

$$I_{\max 2.1} = \frac{\omega_1 \omega I_{\max \text{проб}}}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} = 3,00 \text{ мкА}$$

2.1.b) Снова используя формулу для произведения косинусов, как в пункте 2.1, получим:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{E_0}{2} \cos(2\omega t + \varphi_0) + \frac{E_0}{2} \cos(\varphi_0)$$

Не учитывая последнюю постоянную «фооновую» составляющую, получаем, как и в пункте 2.1 суперпозицию двух плоских волн с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ , амплитудами  $E_0$  и  $E_0/2$  соответственно.

Аналогично пункту 2.1 задерживающее напряжение определяется максимальной частотой:

$$U_{з 2.2} = \frac{1}{e} \left( h \frac{2\omega}{2\pi} - A_{\text{вык}} \right) = 8,25 \text{ В}$$

Так же аналогичную пропорцию получаем и для тока насыщения:

$$\frac{I_{\max 2.2}}{I_{\max \text{проб}}} = \frac{\frac{E_0^2}{\omega} + \frac{(E_0/2)^2}{2\omega}}{E_0^2 / \omega} = \frac{9}{8}$$

Отсюда ток насыщения равен:

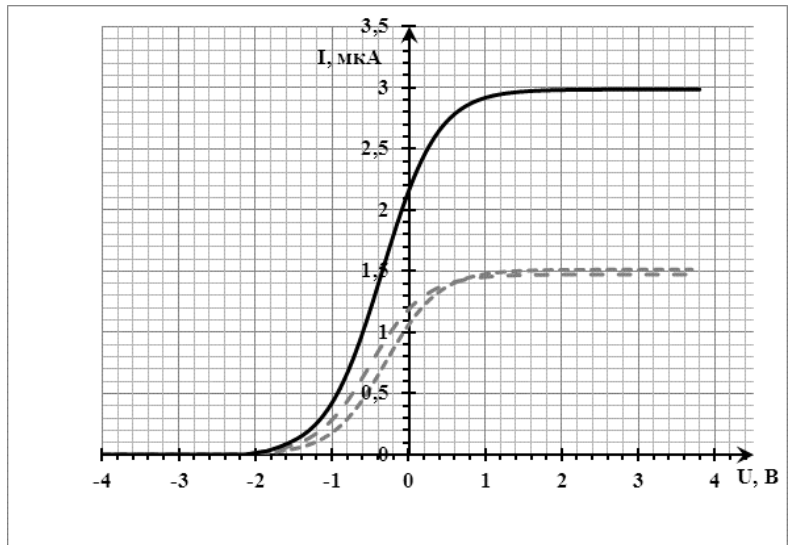
$$I_{\max 2.2} = \frac{9}{8} I_{\max \text{проб}} = 6,75 \text{ мкА}$$

2.2. Для каждой отдельной плоской волны зависимость тока в цепи от напряжения будет иметь вид, аналогичный представленному в условии для пробной волны, но со своими значениями тока насыщения и задерживающего напряжения. График для суперпозиции волн можно получить, просуммировав значения графиков отдельных волн.

В пункте 2.1.a) способом, описанным в предыдущих пунктах, можно получить:

- Для составляющей  $\frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2)$ :  
 Задерживающее напряжение  $U_{31} = 2,10$  В  
 Ток насыщения  $I_{\max 1} = 1,48$  мкА
- Для составляющей  $\frac{E_0}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2)$ :  
 Задерживающее напряжение  $U_{32} = 1,90$  В  
 Ток насыщения  $I_{\max 2} = 1,52$  мкА

На рисунке 1 пунктирными линиями изображены зависимости тока в цепи от приложенного напряжения для каждой из двух составляющих, сплошной линией – искомая «полная» зависимость.



**Рисунок 2 - Примерная зависимость силы тока в цепи от приложенного напряжения для случая 2.1.a**

Все ключевые значения уже указаны и легко находятся на рисунке из указанного масштаба осей.

В пункте 2.1.b):

Для составляющей  $E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , полностью совпадающей с пробной волной:

Задерживающее напряжение  $U_{31} = 2,0$  В

Ток насыщения

$I_{\max 1} = 6,0$  мкА

Для составляющей

$\frac{E_0}{2} \cos(2\omega t + \varphi_0)$ :

Задерживающее

напряжение  $U_{31} = 8,25$  В

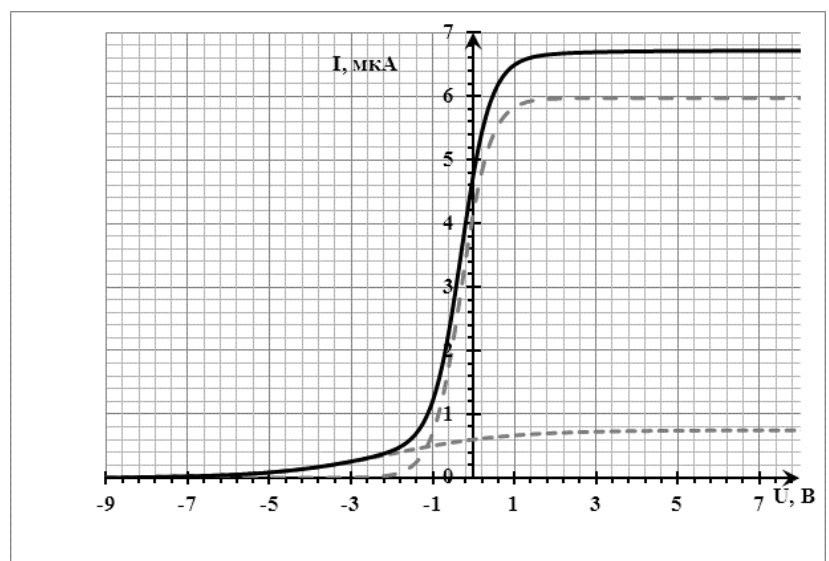
Ток насыщения

$I_{\max 1} = 0,75$  мкА

Примерный вид

зависимости для пункта

2.1.b приведен на рисунке 2.



### 3. Квантовый выход

3.1. По определению, квантовый выход – отношение количества вылетевших электронов к количеству падающих фотонов. Количество вылетевших электронов за некоторое время  $t$  можно найти, используя значение тока насыщения:

$$N_{эл} = \frac{Q}{e} = \frac{I_{max}t}{e}$$

Где  $Q$  – заряд, прошедший по цепи за время  $t$  в режиме насыщения,  $e$  – заряд электрона.

Найдем количество падающих за некоторое время  $t$  фотонов. Плотность энергии электромагнитного поля для пробной волны равна  $W = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$ , тогда в единице объема находится  $n_{\phi} = \frac{W}{h\nu} = \frac{\pi\epsilon_0 E_0^2}{h\omega}$  фотонов. Они падают на пластину площадью  $S$  со скоростью света  $c$  под углом  $\alpha$  к пластине, тогда за время  $t$  количество попавших на пластину фотонов равно:

$$N_{\phi} = n_{\phi} \cdot ct \cdot S \sin \alpha = \frac{\pi\epsilon_0 E_0^2 ctS \sin \alpha}{h\omega}$$

Тогда квантовый выход можно рассчитать по формуле:

$$Y = \frac{N_{эл}}{N_{\phi}} = \frac{h\omega I_{max}}{e\pi\epsilon_0 E_0^2 cS \sin \alpha} \quad (3)$$

Подставляя характеристики пробной волны, получим:

$$Y = 0,00503$$

3.2. По данным измерения задерживающего напряжения можно получить частоты падающего излучения. Действительно, из уравнения (1):

$$\omega = \frac{2\pi}{h} (eU_s + A_{вых})$$

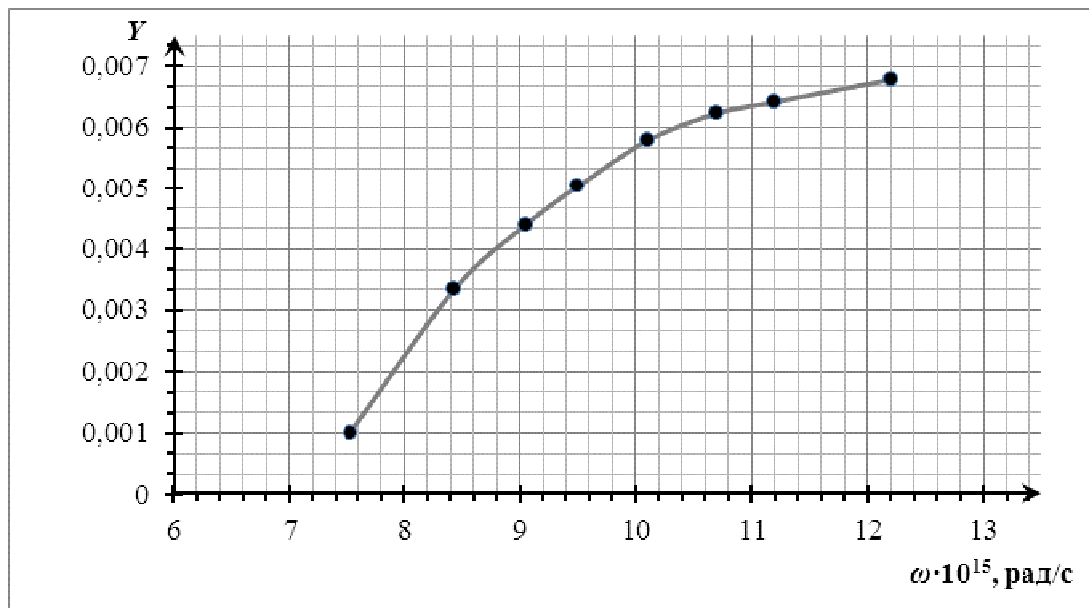
Работа выхода определяется из характеристик пробной волны и уже была найдена в пункте 1.2.

Найденные значения частоты для каждого измерения можно записать в таблицу. Далее, зная частоту излучения, его амплитуду (она по условию постоянна и равна 15 В/м) и частоту, а также ток насыщения, по формуле (3) можем рассчитать квантовый выход для каждой падающей волны. Данные вычислений занесем в таблицу:

**Таблица 1 - Результаты вычислений квантового выхода**

№ опыта	$U_s, \text{В}$	$I_{max}, \text{мкА}$	$\omega \cdot 10^{15}, \text{рад/с}$	$Y$
1	0,7	1,5	7,53	0,000996
2	1,3	4,5	8,44	0,00335
3	1,7	5,5	9,05	0,00439
4	2,0	6,0	9,50	0,00503
5	2,4	6,5	10,1	0,00579
6	2,8	6,6	10,7	0,00623
7	3,1	6,5	11,2	0,00642
8	3,8	6,3	12,2	0,00678

По имеющимся данным построим график зависимости квантового выхода фотоэффекта от частоты.



**Рисунок 3 - График зависимости квантового выхода фотоэффекта от частоты**

Видно, что квантовый выход увеличивается с увеличением частоты в заданном диапазоне, но темп этого роста уменьшается.

### Задача 11-3

#### Часть 1. Переменная диэлектрическая проницаемость.

1.1.1 Описанную систему можно рассматривать как два конденсатора, соединенных последовательно. Используя формулу для емкости плоского конденсатора, запишем емкость составного конденсатора

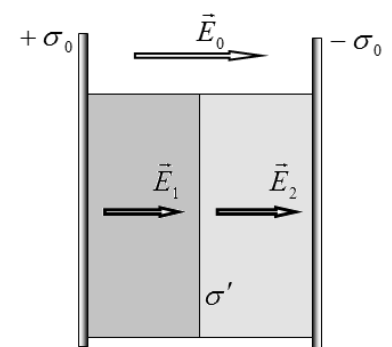
$$\frac{1}{C} = \frac{h}{2\varepsilon_1\varepsilon_0S} + \frac{h}{2\varepsilon_2\varepsilon_0S} = \frac{h}{2\varepsilon_0S} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \Rightarrow C = \frac{2\varepsilon_0S}{h} \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (1)$$

1.1.2 При помещении диэлектрика во внешнее поле на нем возникают поляризационные заряды, которые изменяют поле внутри диэлектрика. Если силовые линии поля перпендикулярны границам диэлектрика, то напряженность поля внутри диэлектрика оказывается в  $\varepsilon$  раз меньше.

Обозначим напряженность поля, создаваемого только зарядами на пластинах  $\vec{E}_0$ , модуль которой связан с поверхностной плотностью зарядов на пластинах соотношением

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 E_0. \quad (2)$$

Тогда напряженности полей внутри диэлектриков будут равны  $\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_1}$ ,  $\vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_2}$ . Разность потенциалов между



пластинами (напряжение) может быть выражена через напряженности полей следующим образом

$$U_0 = E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = \frac{E_0}{\varepsilon_1} \frac{h}{2} + \frac{E_0}{\varepsilon_2} \frac{h}{2} = E_0 \frac{h}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}. \quad (3)$$

Откуда следует, что

$$E_0 = U_0 \frac{2}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (4)$$

А поверхностная плотность зарядов на пластинах

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 U_0 \frac{2}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (5)$$

Впрочем, эта формула может быть получена непосредственно из формулы (1), как  $q = CU_0$ .

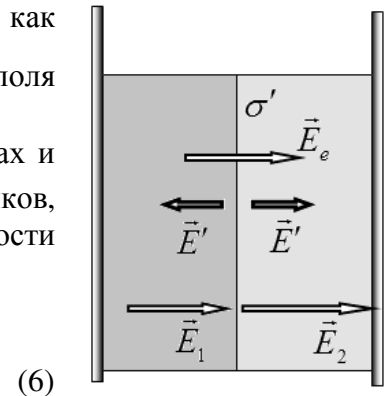
Поверхностная плотность поляризованных зарядов на границе диэлектриков  $\sigma'$  может быть найдена различными способами.

Способ 1. Представим поля внутри диэлектриков как суперпозицию поля  $E' = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$ , создаваемого зарядами  $\sigma'$  и поля

$\vec{E}_e$ , создаваемого всеми остальными зарядами (на пластинах и поляризованных зарядах на границах диэлектриков, примыкающих к пластинам). В этом случае напряженности полей внутри диэлектриков описываются формулами

$$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_e - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon_2} = E_e + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$$



(6)

Из этих формул следует

$$\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma' = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} E_0 \quad (7)$$

Подставляя выражение (4), окончательно получим

$$\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{2\varepsilon_0}{h} U_0 \quad (8)$$

Способ 2. Поле внутри диэлектрика

$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_1}$  может быть представлено как сумма

внешнего поля  $\vec{E}_0$  и поля  $E'_1 = \frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}$ ,

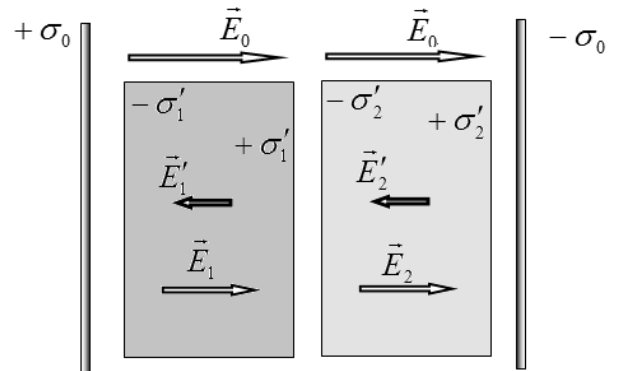
создаваемого поляризованными зарядами:

$$\frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_0 - \frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}. \quad (9)$$

Откуда находим

$$\sigma'_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} E_0. \quad (10)$$

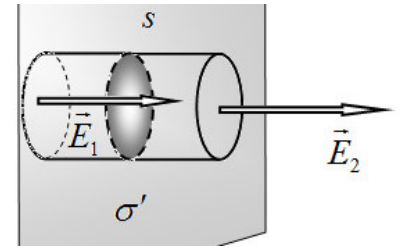
Поверхностная плотность зарядов на втором диэлектрике описывается аналогичной формулой. Суммарная плотность заряда на границе равна  $\sigma' = \sigma'_1 - \sigma'_2 = \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ , что совпадает с формулой (7).



Способ 3. Используем теорему Гаусса для поверхности изображенной на рисунке.

$$E_2 s - E_1 s = \frac{\sigma' s}{\epsilon_0}.$$

Из этой формулы следует  $\sigma' = \epsilon_0 \left( \frac{E_2}{\epsilon_2} - \frac{E_1}{\epsilon_1} \right)$ , что



приводит, как это не странно, к тому же результату (10).

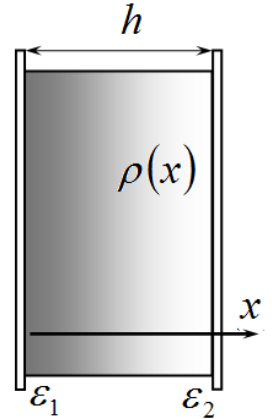
1.2 Решение этой части задачи, в принципе, аналогично решению предыдущей части.

1.2.1 Сначала выразим параметры зависимости диэлектрической проницаемости от координаты

$$\epsilon(x) = \frac{1}{ax + b} \quad (11)$$

через граничные значения. Для этого запишем и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon_1} = b \\ \frac{1}{\epsilon_2} = ah + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{\epsilon_1} \\ a = \frac{1}{h} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \end{cases} \quad (12)$$



1.2.2 Для расчета емкости конденсатора представим его как совокупность последовательно соединенных конденсаторов малой толщины  $\Delta x_i$ , емкости которых равны

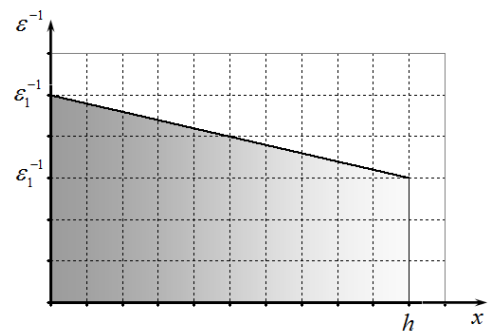
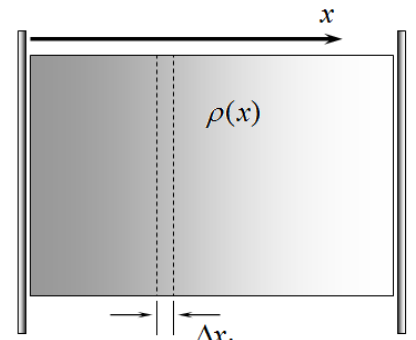
$$C_i = \frac{\epsilon(x) \epsilon_0 S}{\Delta x_i}. \quad (13)$$

При последовательном соединении суммарная емкость рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \sum_i \frac{1}{\epsilon(x) \epsilon_0 S} \Delta x_i = \frac{1}{\epsilon_0 S} \sum_i \frac{\Delta x_i}{\epsilon(x)}. \quad (14)$$

При малых  $\Delta x_i$  сумма в выражении (14) равна площади под графиком зависимости  $\epsilon^{-1}(x)$ . Так как эта зависимость линейна, то в результате суммирования получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{1}{\epsilon_0 S} \sum_i \frac{\Delta x_i}{\epsilon(x)} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{h}{2} (\epsilon_1^{-1} + \epsilon_2^{-1}) = \\ &= \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{h}{2} \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2}. \end{aligned}$$



Тогда емкость конденсатора оказывается равной

$$C = 2 \frac{\epsilon_0 S}{h} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad (15)$$

Для расчета объемной плотности поляризованных зарядов запишем выражение для напряженности электрического поля

$$E(x) = \epsilon^{-1}(x) E_0, \quad (16)$$



где  $E_0$  - как и ранее напряженность поля создаваемого только зарядами на пластинах.

Разность потенциалов между пластинами в данном случае определяется формулой

$$U_0 = \sum_i E(x) \Delta x_i = E_0 \sum_i \varepsilon^{-1}(x) \Delta x_i. \quad (17)$$

Эту сумму мы уже вычисляли, поэтому сразу запишем

$$U_0 = E_0 \sum_i \varepsilon^{-1}(x) \Delta x_i = E_0 \frac{h}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Rightarrow$$

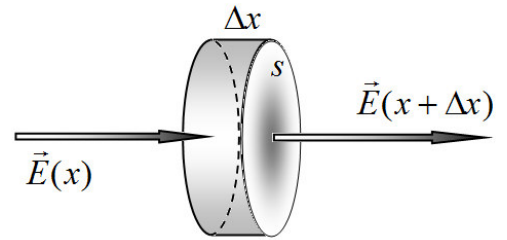
$$E_0 = 2 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (18)$$

Таким образом, зависимость напряженности от координаты имеет вид

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon(x)} = 2 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \varepsilon^{-1}(x). \quad (19)$$

Для расчета зависимости плотности заряда от координаты воспользуемся самым коротким способом, основанном на теореме Гаусса (хотя приемлем и любой из ранее рассмотренных). Так для тонкого цилиндра толщиной  $\Delta x$ , основания которого параллельны пластинам, имеем:

$$E(x + \Delta x)s - E(x)s = \frac{\rho(x)\Delta x}{\varepsilon_0}. \quad (20)$$



Из этой формулы следует, что

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\Delta \varepsilon^{-1}(x)}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a$$

где  $a$  - коэффициент, найденный ранее (формула (12)). С учетом этой формулы получим

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\Delta \varepsilon^{-1}(x)}{\Delta x} = 2\varepsilon_0 \frac{U_0}{h^2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (21)$$

Отметим, что объемная плотность поляризационных зарядов постоянна по объему диэлектрика.

## Часть 2. Переменная проводимость.

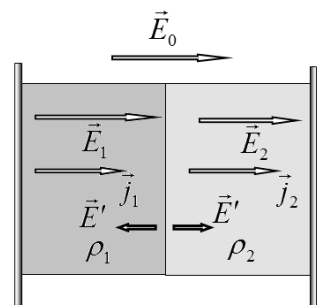
2.1.1 Сопротивление резистора найдем как сумму двух последовательно соединенных резисторов

$$R = \rho_1 \frac{h}{2S} + \rho_2 \frac{h}{2S} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \frac{h}{S}. \quad (22)$$

2.1.2 Поясним причину возникновения заряда в этом случае. При включении внешнего поля плотности токов будут различным, что приведет к накоплению зарядов на границе раздела. Эти заряды будут изменять плотности токов в разных материалах до тех пор, пока плотности токов не сравняются. Итак, в установившемся режиме будет выполняться условие

$$j_1 = j_2 \Rightarrow \frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2} \quad (23)$$

Как уже было отмечено, различия в напряженностях полей обусловлены полем, создаваемым зарядами на границе, поэтому



$$E_1 = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \quad E_2 = E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}.$$

Здесь  $E_0$  - напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, кроме зарядов на границе.

Из уравнений (23)-(24) найдем

$$\frac{1}{\rho_1} \left( E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\rho_2} \left( E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \right) \Rightarrow \sigma' = 2\varepsilon_0 E_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (24)$$

Из формул (24) и определения напряжения следует, что величина  $E_0$  может быть легко найдена

$$U_0 = E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = E_0 h \Rightarrow E_0 = \frac{U_0}{h} \quad (25)$$

Поэтому поверхностная плотность зарядов на границе равна

$$\sigma' = 2\varepsilon_0 E_0 \frac{U_0}{h} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (26)$$

2.2 Основная идея решения этой части заключается в постоянстве плотности тока, т.е.

$$j = \frac{E}{\rho} = const. \quad (27)$$

Поэтому напряженность поля внутри проводника изменяется по закону

$$E(x) = j\rho(x) \quad (28)$$

Зависимость удельного сопротивления от координаты линейна, с учетом значений на границе эта зависимость имеет вид

$$\rho(x) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{h} x. \quad (29)$$

Для определения плотности тока запишем выражение для напряжения между пластинами резистора

$$U_0 = \sum_i E(x) \Delta x = \sum_i j\rho(x) \Delta x = j \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} h. \quad (30)$$

из которого выразим

$$j = \frac{2U_0}{h(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (31)$$

Ранее было получено, что плотность<sup>2</sup> заряда определяется формулой  $\gamma(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x}$ .

Используя эту формулу, а также выражения (28), (29), (31), найдем

$$\gamma(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x} = \varepsilon_0 j \frac{\Delta \rho}{\Delta x} = \varepsilon_0 \frac{2U_0}{h(\rho_1 + \rho_2)} \frac{\rho_2 - \rho_1}{h} = \frac{2\varepsilon_0 U_0}{h^2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (32)$$

Как и в первой части, объемная плотность заряда оказалась постоянной.

**Последнее замечание.** Вторую часть задачи можно было и не решать!

В первой части расчет электрического поля сводился к решению системы уравнений

$$E(x) = \varepsilon^{-1}(x) E_0 = (ax + b) E_0, \quad \sum_i E(x) \Delta x = U_0,$$

А во второй

$$E(x) = \rho(x) j = (ax + b) j, \quad \sum_i E(x) \Delta x = U_0,$$

Эти систему уравнений полностью совпадают, если  $E_0$  заменить на  $j$ ,  $\varepsilon^{-1}$  заменить на  $\rho$ . Достаточно было просто переписать формулы с учетом этих замен!

<sup>2</sup> Чтобы не путать с удельным электрическим сопротивлением, обозначим плотность заряда  $\gamma$ .