

Решения задач.

Задача 9-1 Пружинки

Часть 1. Закон Гука.

Результаты измерений зависимости длины первой (l_1), второй (l_2) и сдвоенной ($l_{1,2}$) от числа подвешенных грузов (N) приведены в таблице. Измерены значения при нагрузке и разгрузке, что показать отсутствие остаточных деформаций.

Таблица 1.

N	l_1 , мм	l_2 , мм	$l_{1,2}$, мм
1	135	136	98
2	145	140,5	99
3	155	145,5	101,5
4	165	150,5	104,5
5	176	156	108
6	186	161	111,5
7	196	166	115
8	206	171	118
9	216	176	121,5
10	226	180,5	125
9	216	176	
8	206	171	
7	196	166	
6	186	161	
5	176	156	
4	165,5	151	
3	155,5	146	
2	145,5	140,5	
1	135,5	136	
a , мм	10,12	5,02	3,14
$k, \left(\frac{H}{м}\right)$	$49,4 \pm 0,2$	$99,6 \pm 0,8$	159 ± 10

Предпочтительнее строить зависимость удлинения от числа подвешенных грузов, потому, что именно в этом случае строго выполняются условия применимости метода наименьших квадратов.

Эта линейная зависимость описывается формулой

$$l = an + l_0. \quad (1)$$

По коэффициенту наклона этой зависимости следует найти коэффициент упругости в законе Гука

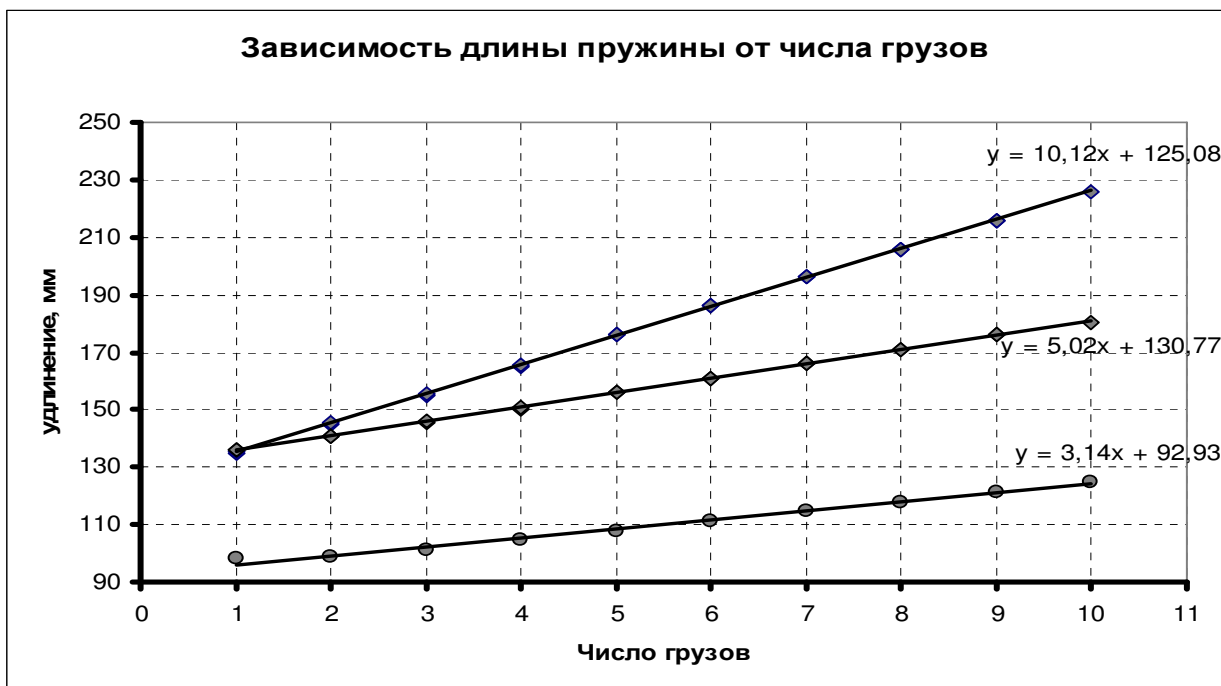
$$F = k\Delta l \quad (2)$$

Учитывая, что приложенной силой является сила тяжести¹ $F = mgn = 0,5n (H)$, коэффициент жесткости в системе СИ следует рассчитывать по формуле

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = 0,5 \frac{\Delta n}{10^{-3} \Delta l} = \frac{500}{a} \left(\frac{H}{м}\right). \quad (3)$$

¹ масса одного груза 50 г, поэтому сила тяжести одного груза 0,5 Н

Результаты расчетов этих коэффициентов приведены в последних строках таблицы 1. Ниже приведены графики полученных зависимостей.



Выводы:

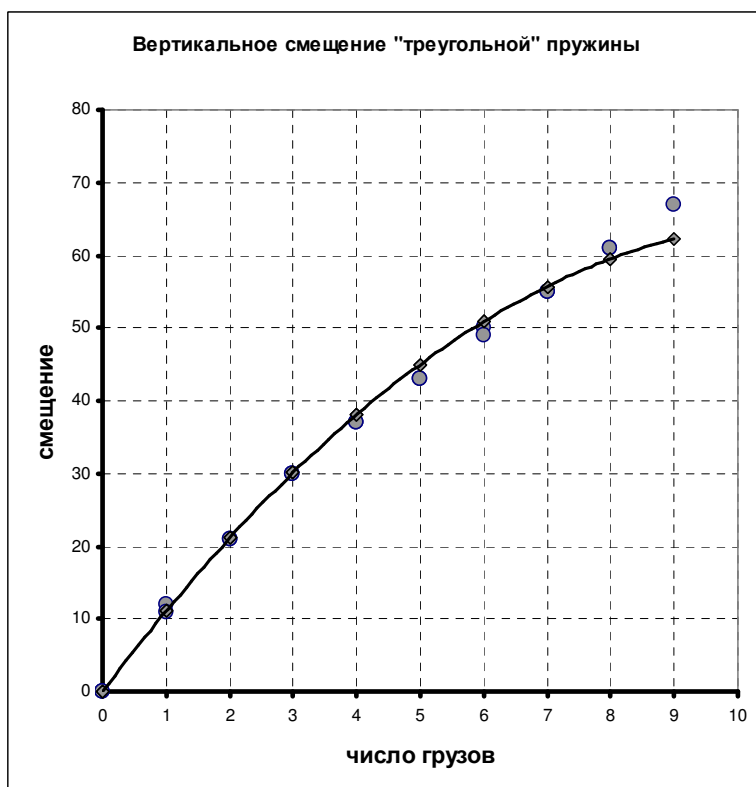
1. Так как полученные зависимости линейны, то закон Гука выполняется.
2. В пределах погрешности выполняется соотношение $k_{1,2} = k_1 + k_2$, что соответствует теоретическим выводам.

Часть 3. «Перпендикулярное соединение»

Результаты измерений вертикального смещения z , мм от числа подвешенных грузов приведены в таблице 2.

Таблица 2.

n	$z, \text{мм}$
1	0
2	12
3	21
4	30
5	37
6	43
7	50
8	55
9	61
10	67
9	61
8	55
7	49
6	43
5	37
4	30
3	21
2	11
1	0



Выводы.

1. Полученная зависимость нелинейная, причем при увеличении числа грузов изменение смещения уменьшается (жесткость возрастает).
2. Можно предложить различные варианты формул, описывающих полученные данные, например квадратичную, с отрицательным коэффициентом при квадрате: Так кривая проходит через начало координат, то квадратичную зависимость можно записать в виде:

$$z = (k_0 - \beta x)x .$$

На рисунке (отмечены ромбами) проведена такая зависимость.

Задача 9-2 Магнитные взаимодействия.

Часть 1. Точка отрыва.

Рассмотрим условия равновесия подвешенного магнита. Так сумма моментов сил, действующих на магнит, равна нулю, то должно выполняться условие:

$$mg \sin \alpha = F \sin(\beta - \alpha). \quad (1)$$

Так как длина подвеса L значительно больше высоты h , то угол отклонения маятника α мал. Поэтому

$$\sin \alpha \approx \frac{x_0}{L}, \quad \sin(\beta - \alpha) \approx \sin \beta = \frac{h}{r},$$

Где $r = \sqrt{h^2 + (x_1 - x_0)^2}$ - расстояние между центрами магнита и кольца. С учетом этих приближений, из формулы (1) выразим

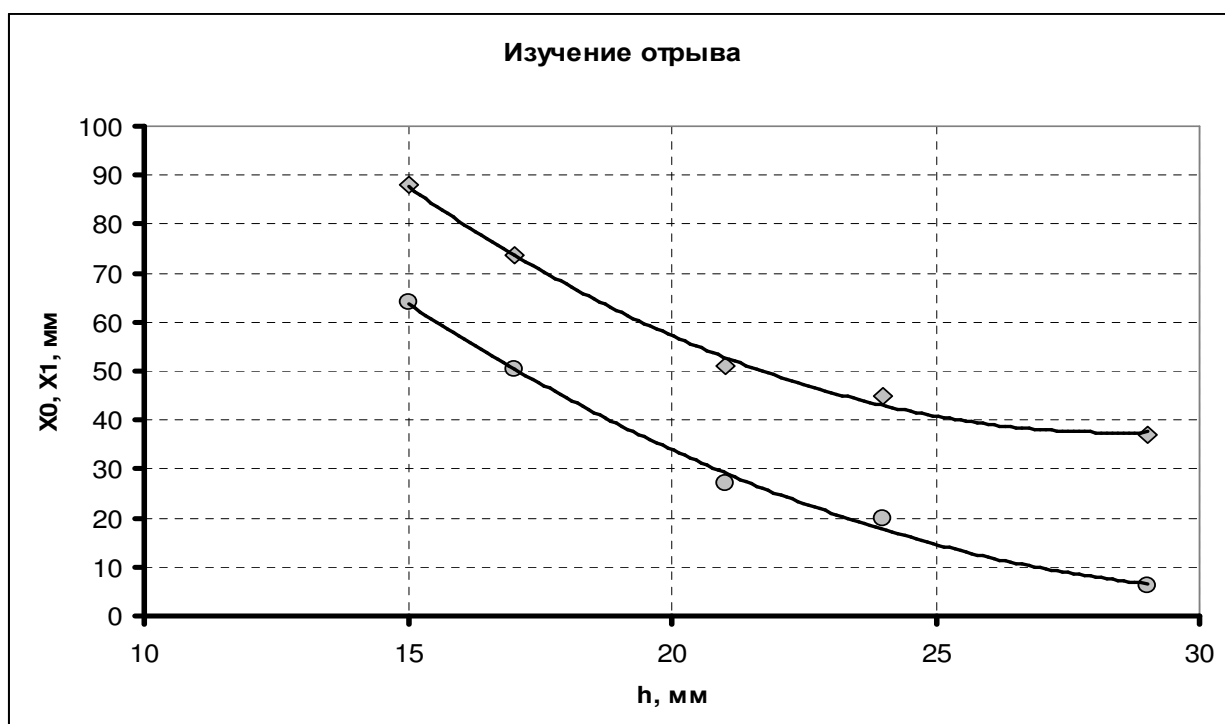
$$\frac{F}{mg} = \frac{x_0 r}{Lh}. \quad (2)$$

В таблице 1 приведены результаты измерений и необходимых расчетов.

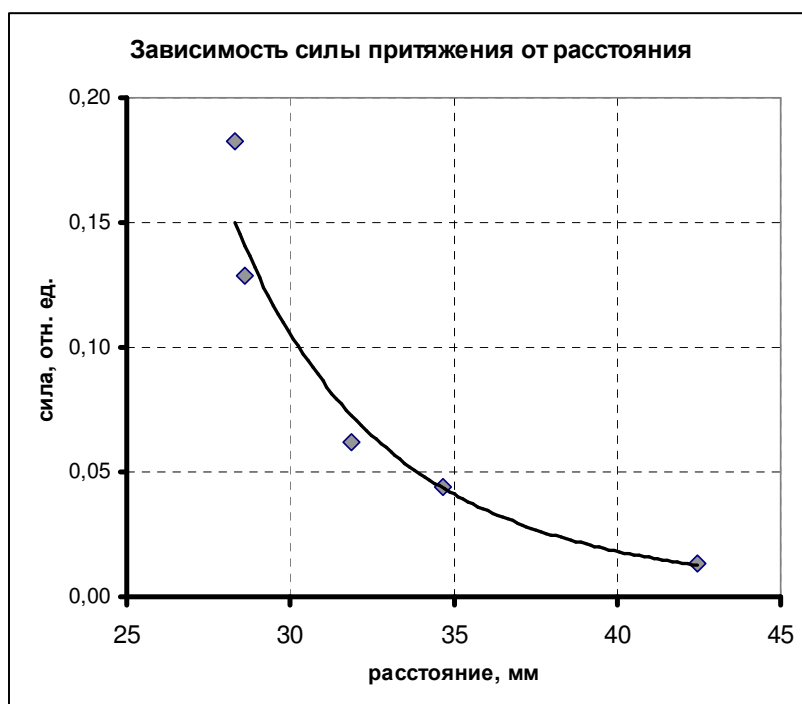
Таблица 1.

$h, \text{ мм}$	$X_0, \text{ мм}$	$X_1, \text{ мм}$	$r, \text{ мм}$	F
15	64	88	28,3	0,183
17	50,5	73,5	28,6	0,129
21	27	51	31,9	0,062
24	20	45	34,7	0,044
29	6	37	42,4	0,013

На рисунке представлен график полученной зависимости.



Ниже показан график зависимости силы притяжения магнита и кольца от расстояния между ними.



Интересно отметить, что эта зависимость хорошо описывается степенной зависимостью, причем сила обратно пропорциональна шестой степени расстояния.

Часть 2. Колебания.

Формулу для периода колебаний математического маятника с учетом постоянной силы магнитного притяжения можно преобразовать к виду

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + F}}. \quad (3)$$

Из этой формулы выразим силу взаимодействия

$$mg + F = \frac{4\pi^2 ml}{T^2}. \quad (4)$$

Запишем аналогичное выражение для колебаний без магнитного взаимодействия

$$mg = \frac{4\pi^2 ml}{T_0^2}. \quad (5)$$

Из этих формул легко получить формулу для расчета силы взаимодействия по измеренным значениям периода колебаний.

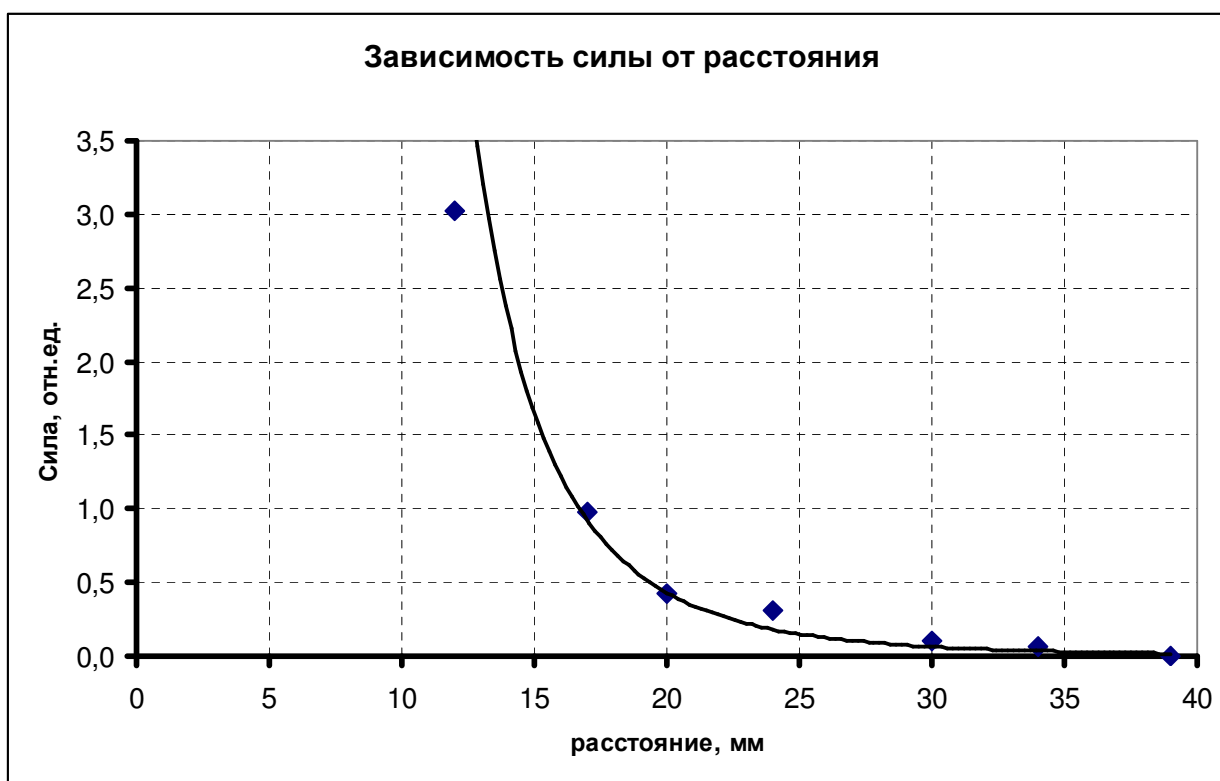
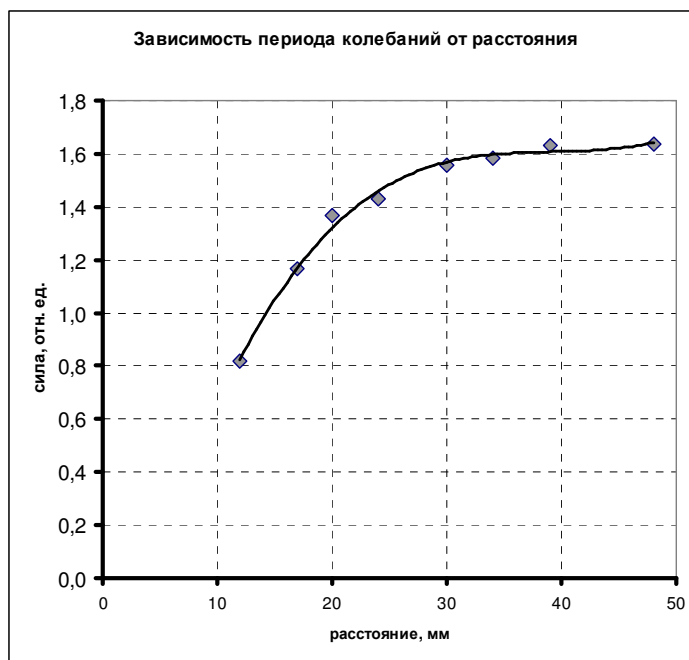
$$\frac{F}{mg} = \frac{T_0^2}{T^2} - 1. \quad (6)$$

В таблице 2. приведены результаты измерений периодов колебаний при различных расстояниях между магнитом и плитой. Рядом показан график полученной зависимости.

Таблица 2.

$H, \text{ мм}$	$T, \text{ с}$	F
48	1,637	
39	1,633	0,0049
34	1,585	0,0667
30	1,556	0,107
24	1,432	0,307
20	1,369	0,430
17	1,164	0,978
12	0,816	3,025

Также в таблице приведены результаты расчетов силы взаимодействия по формуле (6).
Ниже показан график зависимости силы притяжения от расстояния.
В данном случае зависимость близка к r^{-5}



Задача 10-1 Резисторы и конденсаторы.

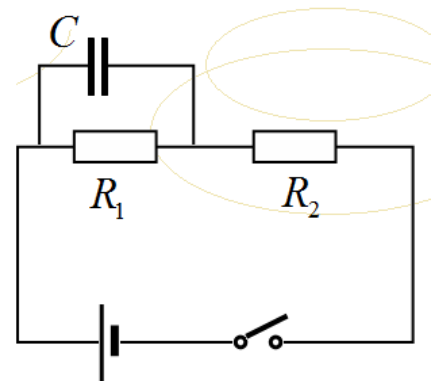
Часть 1. Время установления тока.

Теория процессов протекающих в данной цепи подробно рассмотрено в задаче 10-3 теоретического тура. Поэтому здесь приводятся только экспериментальные данные и результаты их обработки.

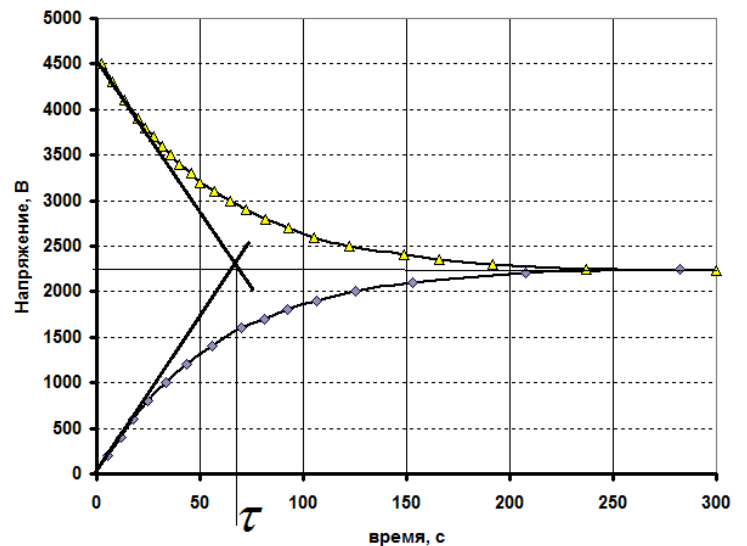
В таблице 1 приведены результаты измерений напряжений на резисторах в процессе зарядки конденсатора.

Таблица 1.

На R ₁		На R ₂	
U ₁ мВ	T, сек	U ₂ мВ	T сек
		200	5,58
4500	2,09	400	11,60
4300	7,69	600	17,88
4100	13,58	800	24,90
3900	19,80	1000	33,80
3800	23,40	1200	43,58
3700	27,50	1400	55,89
3600	31,80	1600	70,12
3500	35,70	1700	80,90
3400	39,90	1800	92,55
3300	45,60	1900	106,58
3200	50,08	2000	125,14
3100	57,10	2100	152,89
3000	64,50	2200	207,80
2900	72,56	2250	282,56
2800	81,62		
2700	92,68		
2600	105,09		
2500	122,38		
2400	148,59		
2350	165,68		
2300	191,60		
2250	236,81		
2230	299,90		



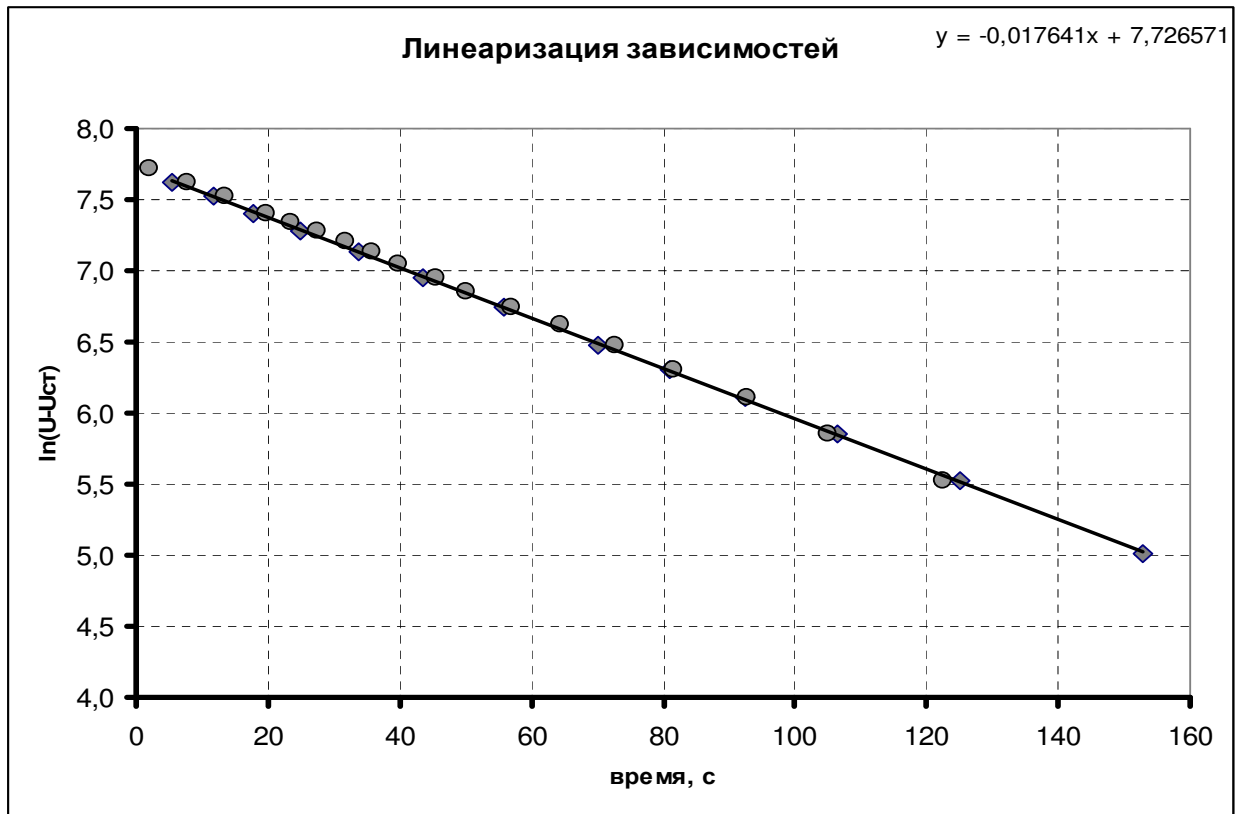
Зависимости напряжения на резисторах от времени



На графике проведены касательные к графикам в начальные моменты времени, позволяющие получить значения характерного времени зарядки. В данном случае оно составляет примерно 60 с.

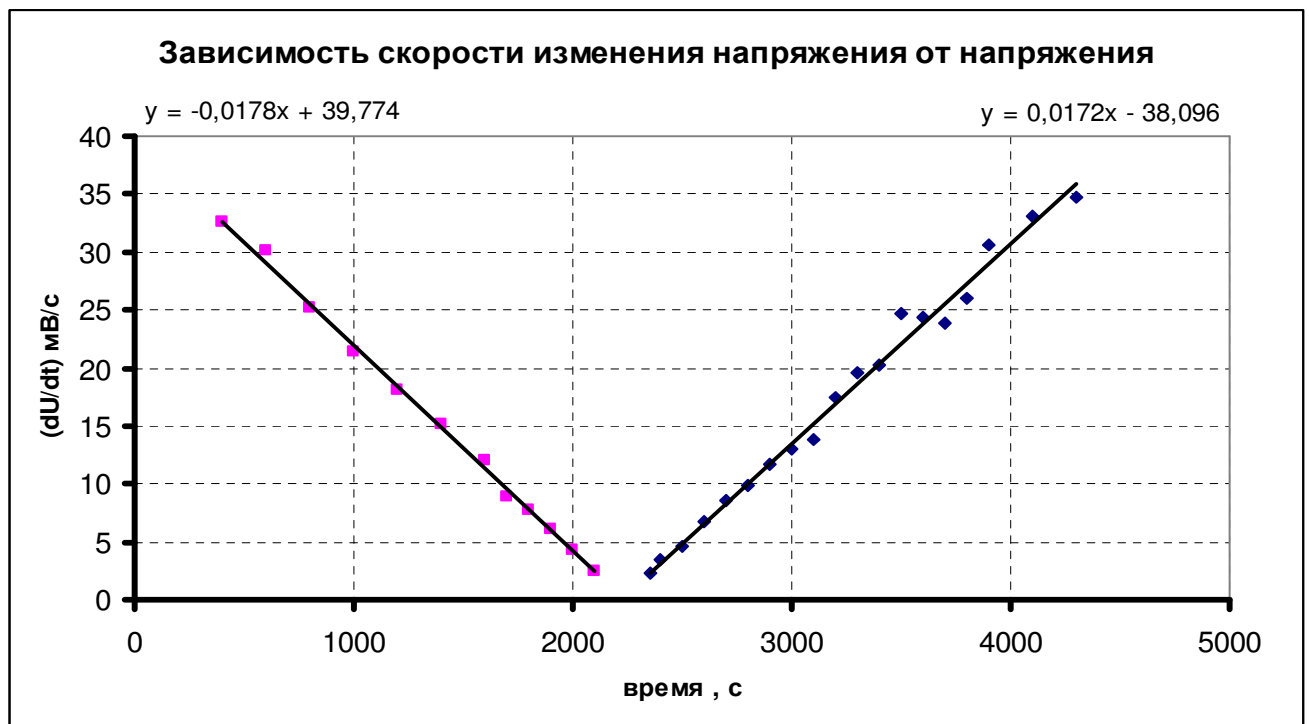
Из графиков следует, что предельные значения напряжений примерно равны, следовательно, сопротивления резисторов равны.

Более точные значения характерных времен можно получить, если построить графики зависимостей в полулогарифмическом масштабе, то есть зависимости логарифма отклонения от стационарного значения $\ln|U - \bar{U}|$ от времени. Ниже показаны эти графики.



Как видно, график для обоих напряжений практически совпадают, что полностью подтверждает вывод о том, что характерные времена установления равновесия совпадают.

Из этого графика следует, что характерное время установления для данных зависимостей равно $\tau_0 = 56,7c$. Следовательно, эффективное сопротивление через



которое идет зарядка конденсатора равно $R^* = \frac{\tau}{C} = 5,67 \cdot 10^5 \text{ Ом} = 0,57 \text{ МОм}$

Еще одним способом расчетов является изучение зависимостей скоростей изменения напряжений $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ от самого напряжения. При таком подходе коэффициенты наклона обратны характерным временам установления равновесия. Следующий график иллюстрирует этот подход. Как видно, и этот способ дает правильное значение характерных времен. Однако, операция численного дифференцирования приводит к достаточно большому разбросу точек графиков. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать полулогарифмический масштаб

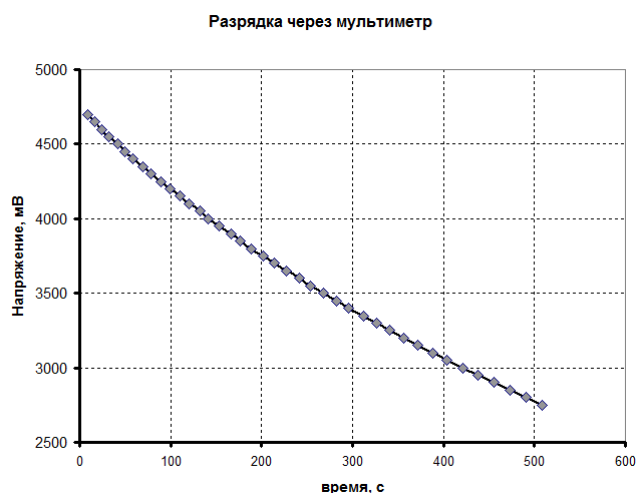
Часть 2. Параметры элементов цепей.

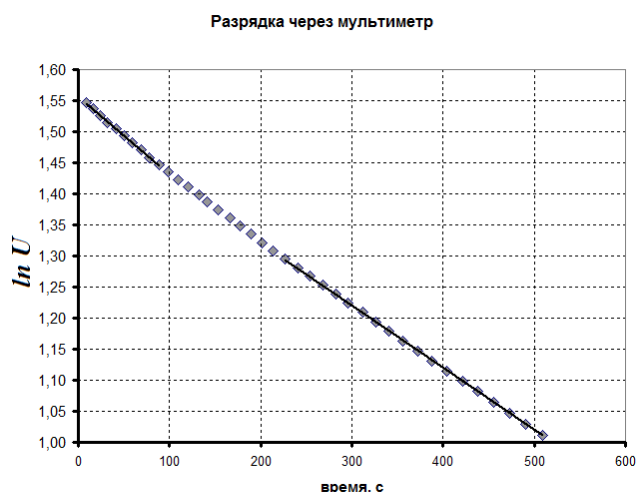
Результаты измерений зависимости напряжения на конденсаторе от времени при разрядке через мультиметр приведены в таблице 2.

Таблица 2.

U	t	lnU	U	t	lnU
4700	9	8,4553	3650	227	8,2025
4650	16	8,4446	3600	241	8,1887
4600	24	8,4338	3550	254	8,1747
4550	32	8,4229	3500	268	8,1605
4500	42	8,4118	3450	282	8,1461
4450	50	8,4007	3400	296	8,1315
4400	59	8,3894	3350	312	8,1167
4350	69	8,3779	3300	326	8,1017
4300	78	8,3664	3250	341	8,0864
4250	89	8,3547	3200	356	8,0709
4200	99	8,3428	3150	372	8,0552
4150	110	8,3309	3100	388	8,0392
4100	120	8,3187	3050	404	8,0229
4050	132	8,3065	3000	421	8,0064
4000	141	8,2940	2950	438	7,9896
3950	153	8,2815	2900	455	7,9725
3900	166	8,2687	2850	473	7,9551
3850	177	8,2558	2800	491	7,9374
3800	189	8,2428	2750	509	7,9194
3750	202	8,2295			

Графики полученной зависимости в обычном и полулогарифмическом масштабе показаны на следующем рисунке.





На графике в полупрологарифмическом масштабе видно, что коэффициенты наклона на участках больших и малых напряжений отличаются – что показывает наличие утечки тока через сам конденсатор. Так при малых напряжениях коэффициент наклона графика равен $9,98 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Следовательно, на этом участке характерное время разрядки равно $R_V C = 1,00 \cdot 10^3 \text{ с}$. Так как $C = 100 \text{ мкФ} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}$, то сопротивление мультиметра

$$R_V = 1,00 \cdot 10^7 \text{ Ом} = 10 \text{ МОм}.$$

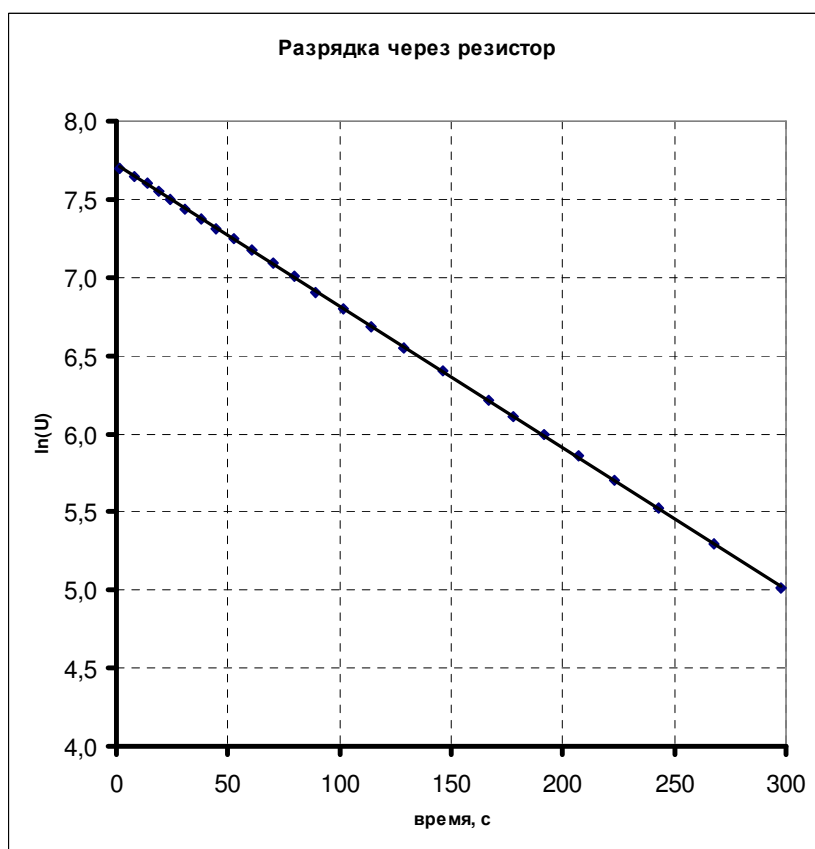
На участке больших напряжений время разрядки оказывается меньше. Здесь $RC \approx 800 \text{ с}$. Следовательно, общее сопротивление вольтметра и конденсатора равно $R = 8,0 \text{ МОм}$. Поэтим данным можно оценить сопротивление резистора

$$R_C = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1} \approx 40 \text{ МОм}$$

Зависимость напряжения на конденсаторе от времени при разрядке через резистор представлена в таблице 3 и на следующем графике в полупрологарифмическом масштабе.

Таблица 3.

$U_c \text{ мВ}$	$T \text{ сек}$	$\ln(U)$
2200	1,29	7,696
2100	8,10	7,650
2000	13,89	7,601
1900	18,88	7,550
1800	24,25	7,496
1700	31,03	7,438
1600	37,89	7,378
1500	44,89	7,313
1400	52,83	7,244
1300	60,68	7,170
1200	69,89	7,090
1100	79,63	7,003
1000	89,32	6,908
900	101,83	6,802
800	114,47	6,685
700	129,00	6,551
600	146,00	6,397
500	167,00	6,215
450	178,00	6,109
400	192,00	5,991
350	207,00	5,858
300	223,00	5,704
250	243,00	5,521
200	268,00	5,298
150	298,00	5,011



В данном случае точки почти идеально легли на прямую, следовательно в данном случае сопротивление разрядки постоянно. Время разрядки, найденное по наклону графика оказывается равным $1,1 \cdot 10^2 c$, следовательно, сопротивление параллельно соединенных резистора и вольтметра равно $R_i = 1,1 MO_m$.

Сопротивление резистора можно рассчитать по формуле

$$R_R = \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1} \approx 1,2 MO_m$$

Согласно, теоретическим расчетам эффективное сопротивление зарядки в два раза меньше чем сопротивление каждого из резисторов, что хорошо подтвердилось экспериментально.

Задача 10-2

Часть 1. Адиабатное и изотермическое сжатие

Проще и точнее можно исследовать процесс изотермического сжатия. При измерениях необходимо проявлять терпение каждый раз при изменении объема необходимо дождаться установления теплового равновесия. В таблице 1 приведены результаты измерения показаний манометра Δp от объема газа в шприце V' . Для вычисления всего объема, занимаемого газом, к показаниям по шкале шприца следует добавить объем соединительной трубки, который составляет $v_0 = 2,5 cm^3$.

Таблица 1.

V	p	V+Vo
58	20	60,5
56	44	58,5
55	61	57,5
53	84	55,5
51	113	53,5
50	125	52,5
48	162	50,5
46	194	48,5
45	210	47,5
43	250	45,5
41	298	43,5

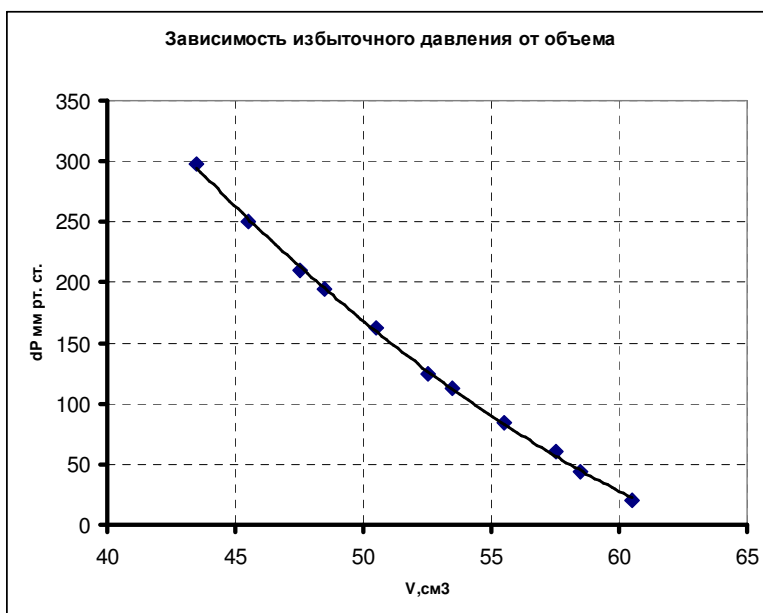


График полученной зависимости приведен на рисунке. Определить визуально, является ли данная зависимость гиперболической невозможно. Для проверки указанного закона можно использовать несколько методов.

Главной проблемой анализа зависимости является то, что нам неизвестно значение давления газа, ведь мы фактически измеряем только его изменение. Конечно, в первом приближении можно воспользоваться известным атмосферным давлением, но вполне возможно, что есть некоторый постоянный сдвиг показаний. Поэтому представим

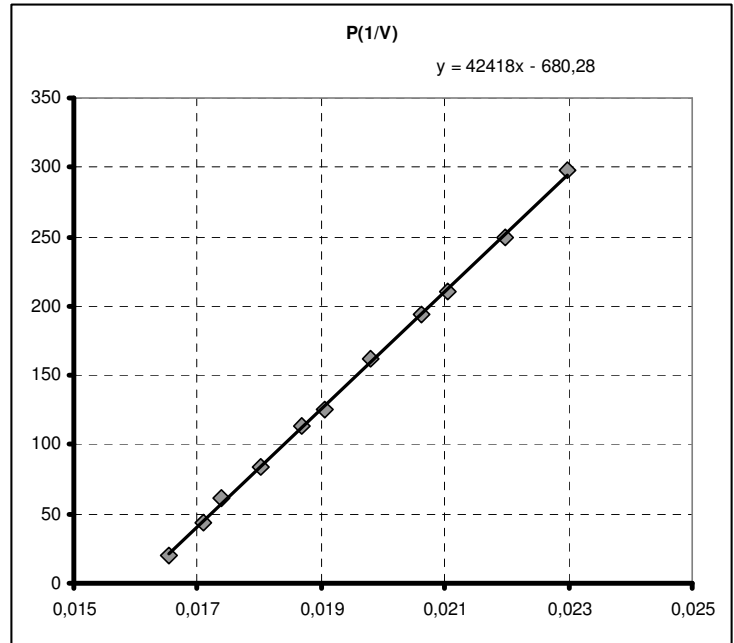
давление газа в виде некоторого постоянного значения P_0 и измеренного избыточного давления Δp . В этом случае уравнение закона Бойля записывается в виде

$$(P_0 + \Delta p)V = A, \quad (1)$$

Где A - некоторая постоянная. Из этого уравнения выразим измеренное избыточное давление

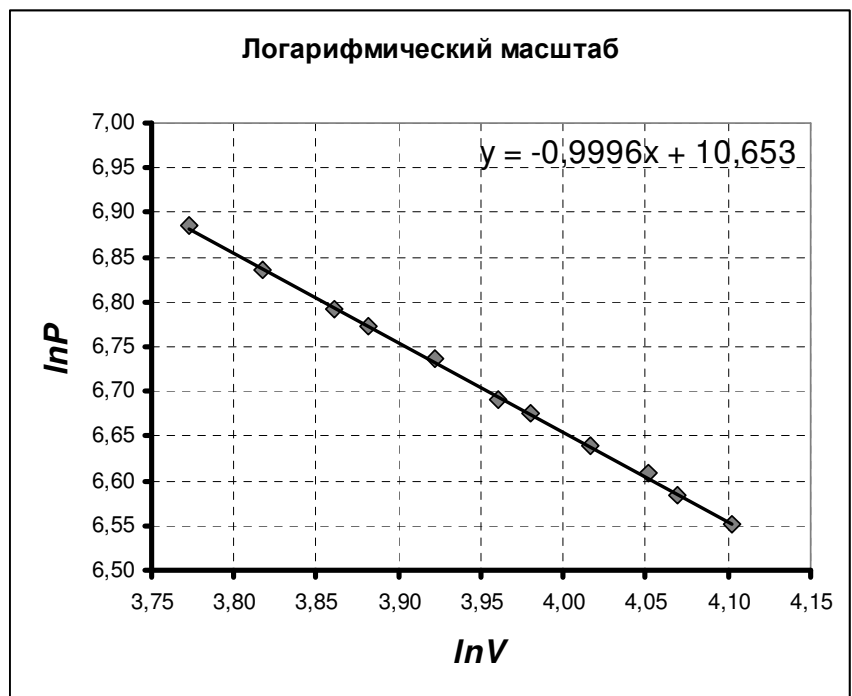
$$\Delta p = \frac{A}{V} - P_0 \quad (2)$$

График зависимости Δp от $1/V$ показан на рисунке. Во-первых, зависимость линейная; во-вторых по этому графику можно найти, что $P_0 = 680 \text{ Torr}$, что отличается от атмосферного давления. Поэтому это значение будем использовать в дальнейшем.



Вторая возможность проверить выполнение закона Бойля – построить зависимость давления (с учетом найденного значения P_0) от объема в логарифмическом масштабе (см. рис). Полученная зависимость очень близка к линейной, причем коэффициент наклона практически равен 1.

Можно также проверить выполнение условия постоянства произведения PV . Для приведенных данных отклонение этого произведения от среднего значения не превышает 0,5%.



«Адиабатный» процесс изучать гораздо сложнее, при быстром нажатии поршня следует внимательно фиксировать значение максимального давления, которое достаточно резко падает. Кроме того, при такой методике измерений, когда необходимо следить за давлением, а только потом измерять объем, начинает сказываться существенная

погрешность шкалы объема. В таблице 2. приведены измеренные значения максимального «адиабатного» давления P_1 , установившегося «изотермического» давления P_2 и объема газа.

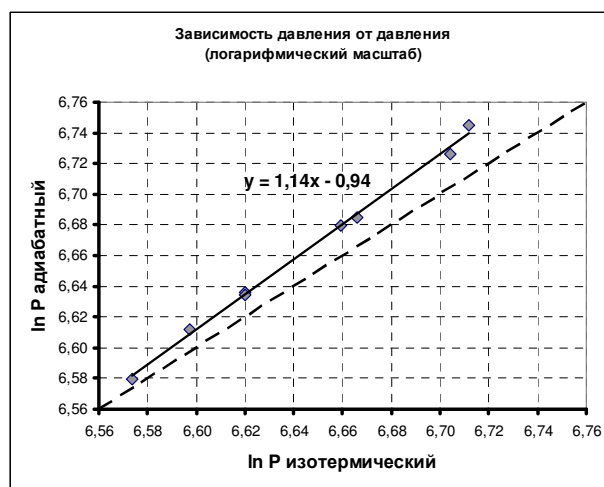
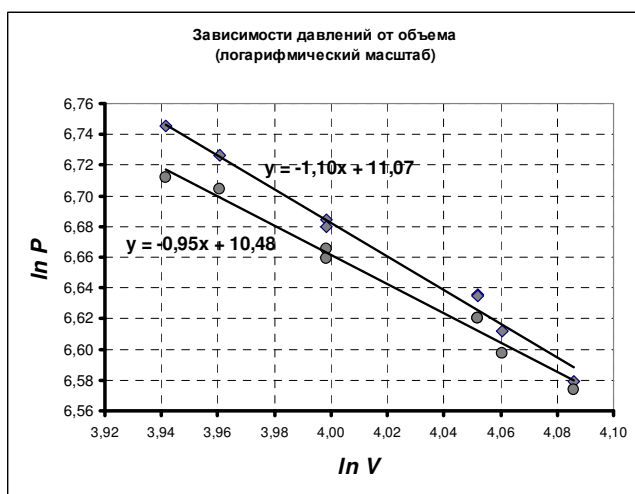
Таблица 2.

P1	P2	V+dv	ln(v)	ln(P1)	ln(P2)
170	142	51,5	3,942	6,745	6,712
154	136	52,5	3,961	6,726	6,704
120	105	54,5	3,998	6,685	6,666
116	100	54,5	3,998	6,680	6,659
82	70	57,5	4,052	6,636	6,620
81	70	57,5	4,052	6,635	6,620
64	53	58	4,060	6,612	6,597
40	36	59,5	4,086	6,579	6,574

Наиболее очевидный способ проверки уравнений процессов – построение зависимостей $P(V)$ в логарифмическом масштабе и нахождение коэффициентов наклона графиков (показателей степеней). Однако при таком подходе сказывается указанная неточность измерения объема. Но ведь у нас есть возможность вообще обойтись без измеренных значений объема! Действительно, запишем уравнения процессов:

$$\begin{cases} P_1 V^\gamma = const \\ P_2 V = const \end{cases} \Rightarrow P_1 = B P_2^\gamma. \quad (3)$$

Откуда следует, что коэффициент наклона графика зависимости $\ln P_1$ от $\ln P_2$ также равен показателю степени γ . На рисунке показаны графики предложенных зависимостей.



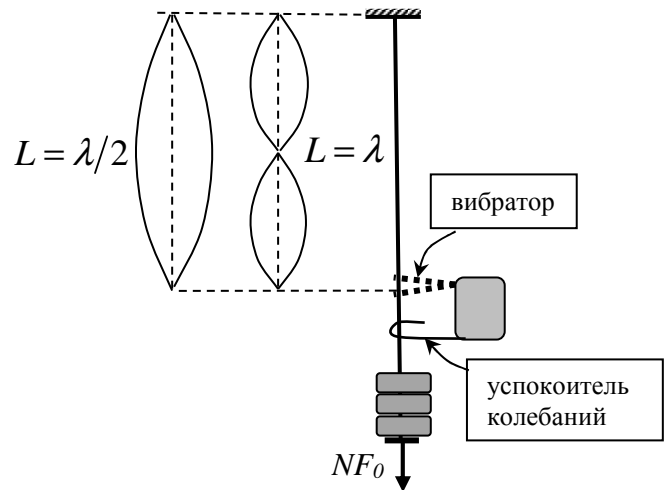
Как видно, действительно вторая зависимость имеет заметно меньший разброс точек. Однако найденной значение показателя степени не совпадает с показателем адиабаты. По-видимому, это связано с тем, что процесс не является адиабатным – теплообмен со стенками шприца играет заметную роль.

Задача 11-1

1. В натянутой нити, закрепленной с обоих концов, стоячая волна возможна только при определенных частотах. Это связано с тем, что на закрепленных концах нити амплитуда колебаний должна быть равна нулю, то есть концы нити должны быть узлами стоячей волны. Отсюда следует, что на длине нити L должно укладываться целое число n

полуволен. $L = n \frac{\lambda}{2}$

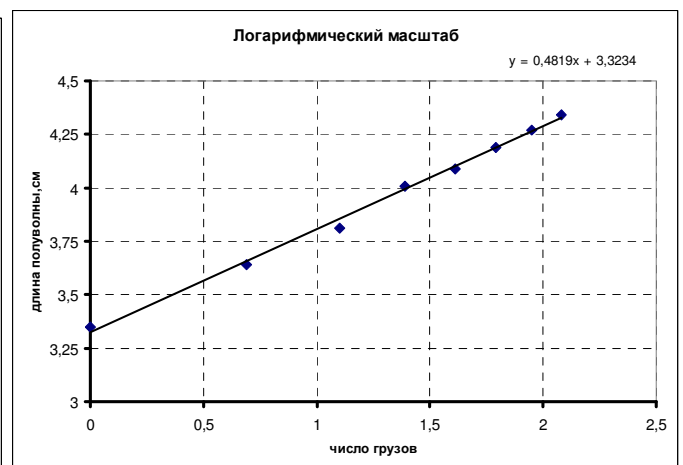
Перемещая вибратор вдоль нити, при разных нагрузках можно получить стоячую волну на расстоянии λ или $\lambda/2$ от точки подвеса нити.



$v = \nu \lambda = A(NF_0)^\alpha$, т. к. частота вибратора ν постоянна, $v \propto \lambda \propto N^\alpha$, где N – количество гаек весом F_0 , растягивающих нить.

$$\frac{\lambda}{2} = A'N^\alpha, \quad \ln \frac{\lambda}{2} = \ln A' + \alpha \cdot \ln N$$

$\lambda/2$ см	N	$\ln \frac{\lambda}{2}$	$\ln N$
28	1	3,35	0
38	2	3,64	0,69
45	3	3,81	1,1
55	4	4,01	1,39
60	5	4,09	1,61
66	6	4,19	1,79
71	7	4,27	1,95
77	8	4,34	2,08



Коэффициент наклона графика в логарифмическом масштабе равен 0,5 – следовательно $v \propto \sqrt{F}$

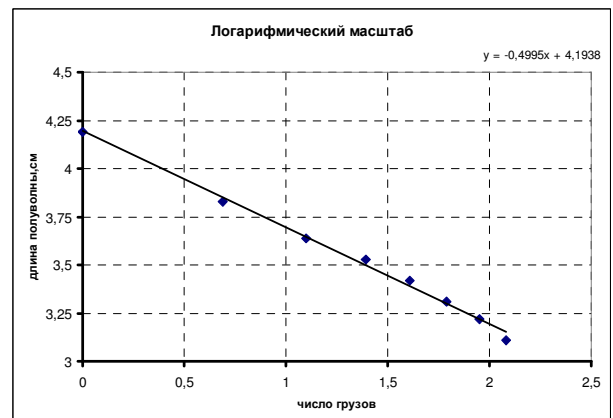
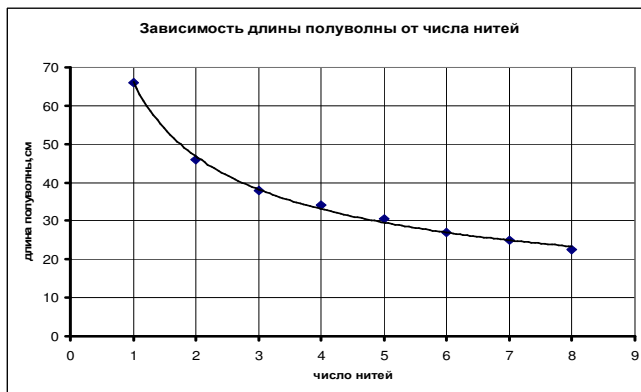
2. Нагрузим нить силой $6F_0$ и будем получать стоячие волны, изменяя сечение от S_0 до $8S_0$.

Перемещая вибратор вдоль нити, при разных сечениях нити можно получить стоячую волну на расстоянии λ или $\lambda/2$ от точки подвеса нити.

$v = \nu\lambda = B(NS_0)^\beta$, т. к. частота вибратора ν постоянна, $v \propto \lambda \propto N^\beta$, где N – количество нитей сечением S_0 соединенных параллельно в жгут.

$$\frac{\lambda}{2} = B'N^\beta \quad \ln \frac{\lambda}{2} = \ln B' + \beta \cdot \ln N$$

$\lambda/2$ см	N	$\ln \frac{\lambda}{2}$	$\ln N$
66	1	4,19	0
46	2	3,83	0,69
38	3	3,64	1,1
34	4	3,53	1,39
30,5	5	3,42	1,61
27	6	3,31	1,79
25	7	3,22	1,95
22,5	8	3,11	2,08



Коэффициент наклона графика в логарифмическом масштабе равен $-0,5$, следовательно,

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{S}}$$

Часть 3.

3. Способ №1 Использование метода размерностей дает зависимость

3. Способ №2

Предположим, что деформации натянутой нити (резинового шнура), связанные с поперечными колебаниями, малы.

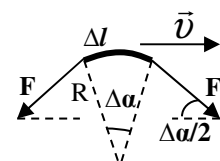
Следовательно, при малых колебаниях можно пренебречь изменениями величины силы натяжения нити (резинового шнура).

Выделим маленький участок нити площадью сечения S в ее амплитудной части массой Δm и длины дуги окружности $\Delta l = R\Delta\alpha$

радиуса R , распространяющейся со скоростью v вдоль нити с центростремительным ускорением v^2/R .

Тогда для малых деформаций нити можно записать:

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$



$$2F \frac{\Delta\alpha}{2} = \Delta m \frac{v^2}{R} = \rho S R \Delta\alpha \frac{v^2}{R}, \quad v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad v \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

4. Учитывая полученные результаты при выполнении пунктов №1,2,3 - можно

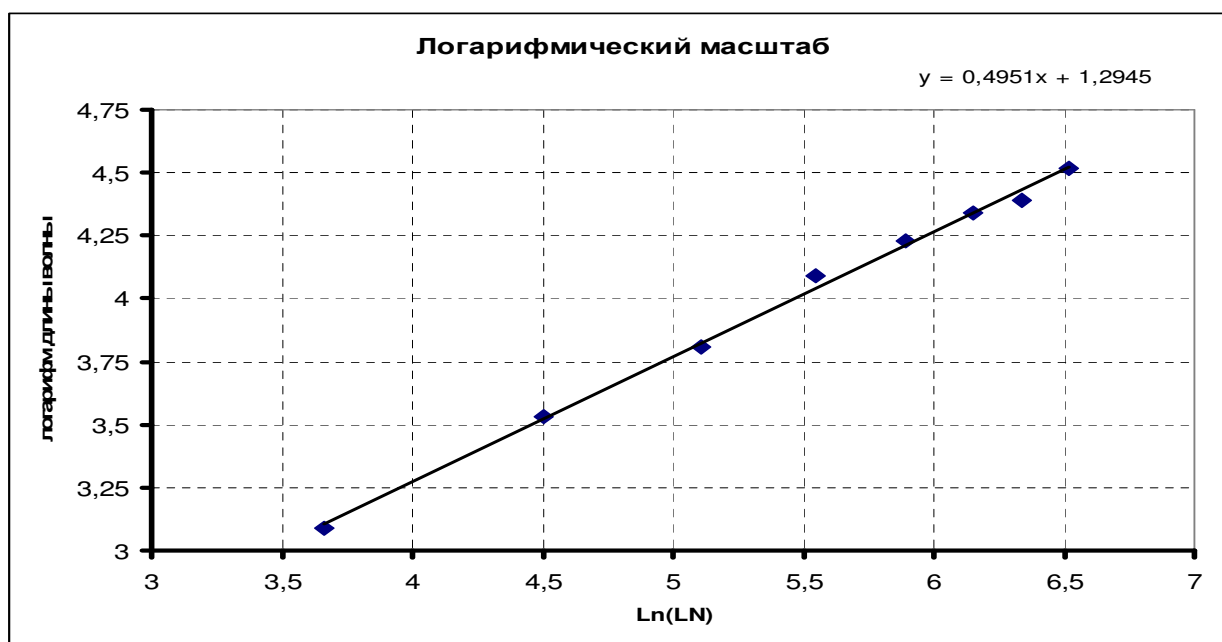
$$v \propto \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{NF_0}{\frac{m}{LS} S}} = \sqrt{\frac{NF_0 L}{m}} \propto \sqrt{NL}$$

записать: , где N – количество грузиков весом F₀ деформирующих шнур, L, S, m – длина, площадь сечения,

При увеличении нагрузки на резиновый шнур меняется его плотность и при этом должна выполняться зависимость: $v \propto \lambda \propto \sqrt{NL}$

$$\lambda = D(NL)^\varphi \quad \ln\lambda = \ln D + \varphi \cdot \ln(NL)$$

λ см	N	L см	NL см	$\ln\lambda$	$\ln(NL)$
22	1	39	39	3,09	3,66
34	2	45	90	3,53	4,5
45	3	55	165	3,81	5,11
59,5	4	64	256	4,09	5,55
69	5	72	360	4,23	5,89
76,5	6	78	468	4,34	6,15
80,5	7	81	567	4,39	6,34
92	8	85	680	4,52	6,52



Из графика следует, что $v \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

5. Нагрузим нить сечением $2S_0$ грузом весом $4F_0$. При этих параметрах шнура образуется стоячая волна $\lambda_1 = 77 \tilde{n}\tilde{i}$. При тех же параметрах нити, но при уменьшенной с помощью резистора силе тока через электродвигатель, длина стоячей волны равна $\lambda_2 = 91 \tilde{n}\tilde{i}$.

Так как скорость распространения поперечных колебаний по шнуру не зависит от частоты вибратора (частоты вращения моторчика), то можно записать:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{v}{v_1}}{\frac{v}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{v_1 - v_2}{v_1} = 1 - \frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 - \frac{77}{91} = 0,15, \quad \frac{\Delta v}{v} \approx 15\%$$

Итак, с помощью имеющегося у вас оборудования можно определять изменение частоты оборотов двигателя.

Назовем такое устройство ТАХО-МАНОМЕТР!