

Условие

Задача 9-2

Если оставить на столе кружку с горячим чаем, то через некоторое время напиток остынет. Это происходит вследствие потерь теплоты в окружающую среду, которыми в школьных задачах по физике нередко пренебрегают. В данной задаче мы рассмотрим процесс подогрева воды, учитывая данные потери в рамках двух моделей.

Воду для разогрева налили до уровня $H = 20$ см в цилиндрический тонкостенный сосуд радиусом $r = 5,0$ см, теплоемкостью которого можно пренебречь. Сосуд расположен на плитке, полезную мощность которой в данных условиях считайте равной $P = 2,0$ кВт. Изначально температура воды была равна температуре окружающего воздуха $T_1 = 20$ °С. Считайте, что при нагреве температура воды достаточно быстро выравнивается по всему объему.

Табличные данные для воды: плотность $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, удельная теплоемкость $c = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}$.

Потоком теплоты называют количество теплоты, переходящее за одну секунду через единицу площади: $q = \frac{Q}{St}$. Единица измерения потока теплоты в СИ – Вт/м².

1. Постоянные потери

В данной части задачи будем считать, что поток тепловых потерь постоянный и равен $q_0 = 8,5$ кВт/м². Будем также считать, что он одинаков как для поверхности воды в сосуде, так и для стенок сосуда.

1.1. Найдите время, необходимое для нагрева воды в сосуде до температуры $T_2 = 50$ °С.

1.2. До какой высоты H_{max} можно налить воду в сосуд, чтобы ее еще возможно было нагреть до температуры $T_2 = 50$ °С? Предполагаем, что цилиндрический сосуд достаточно высокий.

1.3. Пусть сосуд на плитке используют, как подогреватель проточной воды: каждую секунду в сосуд приходит некоторый объем воды при температуре T_1 и уходит такой же объем при температуре T_3 , уровень H при этом остается постоянным. Определите, с какой скоростью (в литрах в минуту) необходимо подавать и забирать воду, чтобы она успевала подогреваться до температуры $T_3 = 30$ °С.

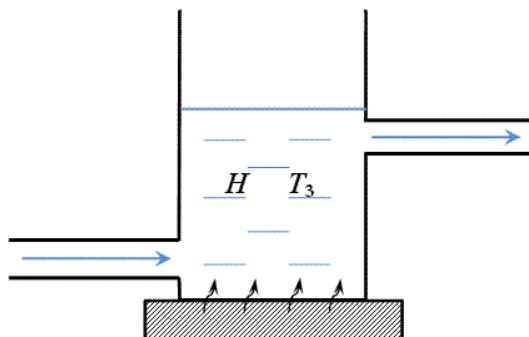


Рисунок 1 - К пункту 1.3

2. Переменные потери На самом деле поток тепловых потерь будет расти с увеличением температуры воды относительно температуры воздуха. В простейшем случае эту зависимость можно записать в линейном виде: $q = \beta(T - T_1)$, где T – температура воды, T_1 – температура окружающего воздуха, β – так называемый коэффициент теплоотдачи. Как и прежде будем считать, что он одинаков как для теплоотдачи с поверхности жидкости, так и со стенок сосуда. 2.1 Пусть коэффициент теплоотдачи для изучаемого сосуда с водой равен $\beta = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. Определите, до какой максимальной температуры T_{max} возможно нагреть воду.

2.2 Заранее узнать значение коэффициента теплоотдачи, как, вообще говоря, и полезной мощности плитки для конкретного сосуда, не так легко. Проще их получить, анализируя экспериментальные данные. В данном пункте предполагаем, что полезная мощность плитки заранее неизвестна. Используя график зависимости температуры воды от времени (рис. 1), определите полезную мощность плитки и коэффициент теплоотдачи.

2.3 Пусть после 10 минут нагревания, изображенного на рис. 1, плитку отключили. Постройте график зависимости температуры воды от времени в ходе дальнейших 10 минут остывания.

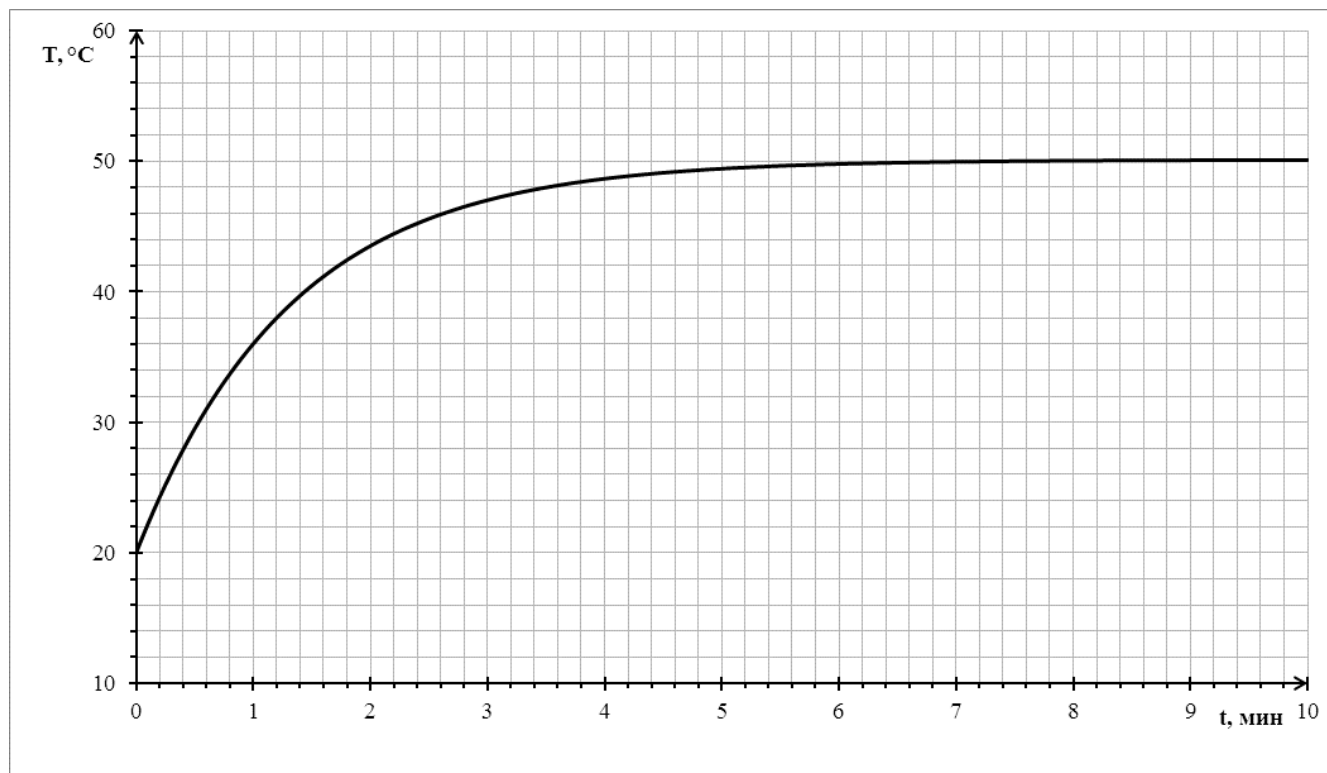


Рисунок 2 - Зависимость температуры воды в сосуде от времени

Решение

Задача 9-2

1. Постоянные потери

1.1. За время t в сосуд от нагревателя поступит энергия $E_n = Pt$. Тепловые потери осуществляются через боковую поверхность сосуда и поверхность воды в сосуде. Тогда общая площадь механизма тепловых потерь:

$$S_{\text{пот}} = 2\pi rH + \pi r^2 = 707 \text{ см}^2$$

За время t на тепловые потери уйдет энергия $E_{\text{пот}} = q_0 S_{\text{пот}} t$. Поступающая энергия идет на нагревание воды, массу которой можно определить через ее объем:

$$m_0 = \rho \pi r^2 H = 1,57 \text{ кг}$$

Тогда, записывая количество энергии, необходимое на нагрев воды, получаем:

$$E_n - E_{\text{пот}} = cm(T_2 - T_1)$$

Подставляя выражения для энергий, найдем время, необходимое для нагрева воды:

$$t = \frac{cm_0(T_2 - T_1)}{P - q_0 S_{\text{пот}}} = 14$$

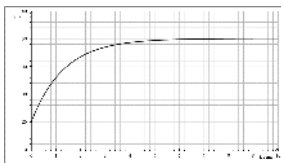
1.2. Чтобы воду можно было нагревать, количество потерь энергии не должно превышать количество поступающей от нагревателя. Пограничный случай: $E_n = E_{\text{пот}}$, откуда при подстановке соответствующих выражений:

$$H_{\text{max}} = \frac{q_0 / \pi r}{2\pi r} = 72,4 \text{ см}$$

1.3. Пусть объем воды, приходящий в единицу времени равен λ_0 . Тогда объем воды $\lambda_0 t$, или массу $\rho \lambda_0 t$, поступающую (и уходящую) за время t , необходимо успеть нагреть от температуры T_1 до T_3 , то есть:

$$E_n - E_{\text{пот}} = c(\rho \lambda_0 t)(T_3 - T_1)$$

Подставляя полученные ранее выражения для энергий, пренебрегая потерями теплоты и площадью подводящих и уводящих воду труб, получим:



2. Переменные потери

2.1. Мощность тепловых потерь теперь определяется выражением $P_{\text{пот}} = \beta(T - T_1)S_{\text{пот}}$, где T – текущая температура воды. Когда вода оказывается при максимальной неизменной температуре T_{max} , ее нагрева больше не происходит, и вся мощность, получаемая от плитки, уходит в тепловые потери:

$$P = P_{\text{пот}} = \beta(T_{\text{max}} - T_1)S_{\text{пот}}$$

Отсюда максимальная температура:

$$T_{\text{max}} = \frac{P}{\beta S_{\text{пот}}} + T_1 = 114$$

Однако при нормальном давлении вода может нагреться лишь до температуры кипения (за исключением некоторых «экзотических» случаев). Поэтому корректным ответом данного пункта будет: воду можно нагреть вплоть до температуры кипения $T_{\text{кип}} = 100^\circ\text{C}$.

2.2. Из графика видно, что в начальный момент времени температура жидкости T равна температуре окружающего воздуха T_1 . Тогда мощность тепловых потерь $P_{\text{пот}} = 0$. Записывая уравнение теплового баланса для небольшого промежутка времени Δt в начале нагрева, когда вода успела нагреться на некоторую температуру ΔT , получим:

$$P\Delta t - 0 = cm_0\Delta T$$

$$P = cm_0 \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

$$P = cm_0 \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

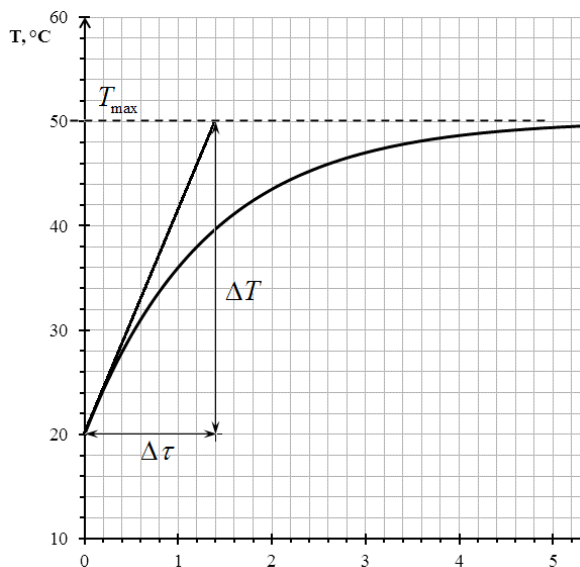
Отношение $\frac{\Delta T}{\Delta t}$, описывающее, как уже было отмечено, скорость нагрева/остывания воды, можно найти, построив касательную к графику зависимости температуры воды от времени в точке $t = 0$. Тогда, выбирая промежуточный отрезок Δt на оси температур, можно найти соответствующее приращение температуры ΔT и найти отношение:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 22,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{мин}} = 0,375 \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 22,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{мин}} =$$

Тогда полезная мощность плитки оказывается равной:

$$P = 2470 \text{ Вт}$$



Из графика также можно заметить, что максимальная температура нагрева воды составляет $T_{\max 1} = 50^{\circ}\text{C}$. Тогда, как и в пункте 2.1, получаем выражение $P = \beta_1(T_{\max 1} - T_1)S_{\text{пот}}$. Отсюда коэффициент теплоотдачи:

$P = \beta_1(T_{\max 1} - T_1)S_{\text{пот}}$. Отсюда коэф

$$\beta_1 = \frac{P}{(T_{\max 1} - T_1)S_{\text{пот}}} = 1160 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

$$\beta_1 = \frac{P}{(T_{\max 1} - T_1)S_{\text{пот}}} = 1160 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

2.3. Вновь запишем уравнение теплового баланса при остывании жидкости на ΔT за малый промежуток времени Δt в какой-то момент:

$$\beta_1(T - T_1)S_{\text{пот}}\Delta t = cm_0\Delta T$$

$$(T - T_1)S_{\text{пот}}\Delta t = cm_0\Delta T$$

Отсюда, зная значение β_1 и остальных характеристик из предыдущих пунктов, можем выразить зависимость убывания температуры воды от ее температуры: $\Delta T(T)$:

$$\Delta T(T) = \frac{\beta_1 S_{\text{пот}}}{cm_0}(T - T_1)\Delta t$$

$$\Delta T(T) = \frac{\beta_1 S_{\text{пот}}}{cm_0}(T - T_1)\Delta t$$

Выбирая за Δt , некоторый промежуток времени, например 0,5 мин, можем пошагово вычислять примерное изменение температуры и заносить данные в таблицу: Таблица 1 – Пошаговое вычисление температуры воды от времени при остывании

t , мин	T , °C	ΔT , °C	$T - \Delta T$, °C
0	50	11,194	38,806
0,5	38,806	7,017	31,789
1	31,789	4,399	27,390
1,5	27,390	2,758	24,633
2	24,633	1,729	22,904
2,5	22,904	1,084	21,821
3	21,821	0,679	21,141
3,5	21,141	0,426	20,715
4	20,715	0,267	20,449
4,5	20,449	0,167	20,281
5	20,281	0,105	20,176
t , мин	T , °C	ΔT , °C	$T - \Delta T$, °C
5,5	20,176	0,066	20,110
6	20,110	0,041	20,069
6,5	20,069	0,026	20,043
7	20,043	0,016	20,027
7,5	20,027	0,010	20,017
8	20,017	0,006	20,011
8,5	20,011	0,004	20,007
9	20,007	0,003	20,004
9,5	20,004	0,001	20,003
10	20,003	0,001	20,002

На основании полученных данных можно нанести точки на искомый график зависимости и провести через них сглаживающую кривую:

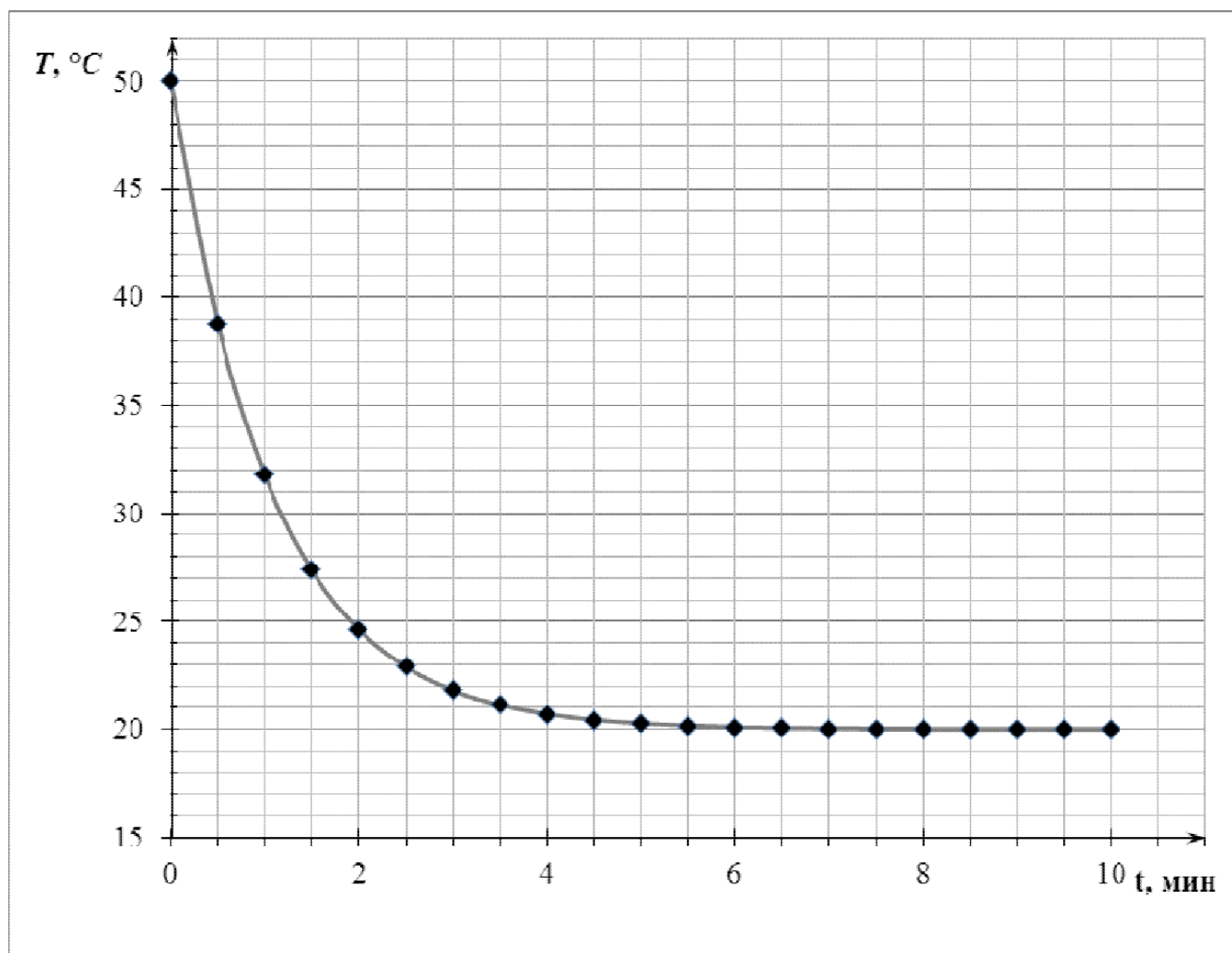


Рисунок 1 - Зависимость температуры воды от времени в ходе остывания