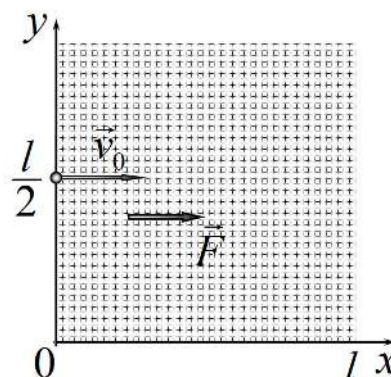


Условие

Задача 9- 1.

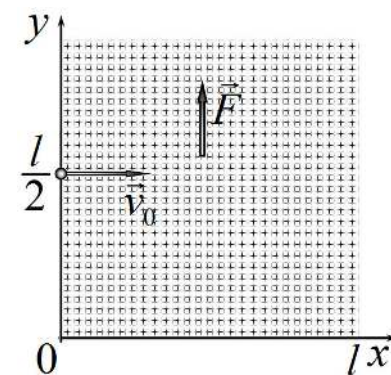
1.1 Частица массы m влетает с начальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной вдоль оси Ox , в квадратную область со стороной l в точке с координатами $x_0 = 0, y_0 = \frac{l}{2}$. Оси координат совпадают с границами выделенной области. В этой области на частицу действует постоянная сила $\vec{F}$, направленная вдоль оси Ox . Модуль начальной скорости частицы равен $v_0 = \frac{l}{\tau}$, а модуль действующей силы равен $F = \frac{2ml}{\tau^2}$ (в этих формулах τ - известный параметр).

Найдите координаты точки, в которой частица покинет выделенную область, и время, через которое это произойдет. Изобразите схематически траекторию движения частицы.



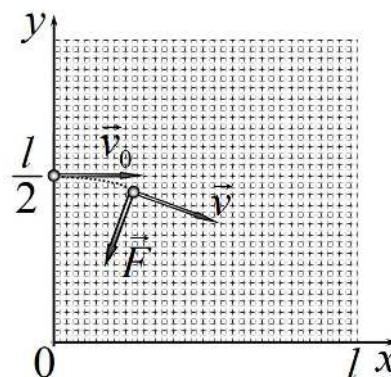
1.2 Частица массы m влетает с начальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной вдоль оси Ox , в квадратную область со стороной l в точке с координатами $x_0 = 0, y_0 = \frac{l}{2}$. Оси координат совпадают с границами выделенной области. В этой области на частицу действует постоянная сила $\vec{F}$, направленная вдоль оси Oy . Модуль начальной скорости частицы равен $v_0 = \frac{l}{\tau}$, а модуль действующей силы равен $F = \frac{2ml}{\tau^2}$ (в этих формулах τ - известный параметр).

Найдите координаты точки, в которой частица покинет выделенную область, и время, через которое это произойдет. Изобразите схематически траекторию движения частицы.

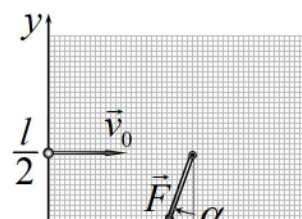


1.3 Частица массы m влетает с начальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной вдоль оси Ox , в квадратную область со стороной l в точке с координатами $x_0 = 0, y_0 = \frac{l}{2}$. Оси координат совпадают с границами выделенной области. В этой области на частицу действует сила $\vec{F}$, направленная все время перпендикулярно вектору скорости. Модуль начальной скорости частицы равен $v_0 = \frac{l}{\tau}$, а модуль действующей силы постоянен и равен $F = \frac{4mv_0^2}{l}$ (в этих формулах τ - известный параметр).

Найдите координаты точки, в которой частица покинет выделенную область, и время, через которое это произойдет. Изобразите схематически траекторию движения частицы.



1.4 Частица массы m влетает с начальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной вдоль оси Ox , в квадратную область со стороной l в точке с



координатами $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{l}{2}$. Оси координат совпадают с границами выделенной области. В этой области на частицу действует сила $\vec{F}$, направление которой изменяется по закону

$$\alpha = 2\frac{v_0}{l}t,$$

где угол α отсчитывается от направления, противоположного направлению оси Oy . Модуль начальной скорости частицы равен $v_0 = \frac{l}{\tau}$, а модуль действующей силы постоянен и равен $F = \frac{mv_0^2}{l}$ (в этих формулах τ - известный параметр).

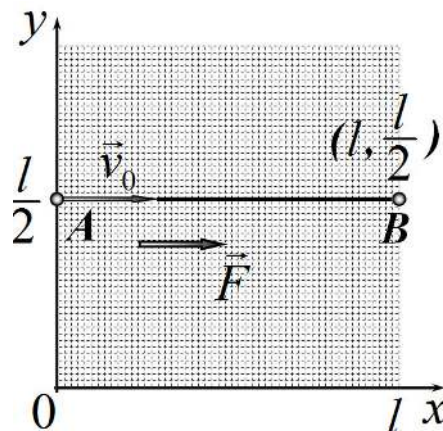
Найдите координаты точки, в которой частица достигнет границы выделенной области, и время, через которое это произойдет. Изобразите схематически траекторию движения частицы.

Решение

Задача 9- 1.

1.1 Поскольку вектор силы $\vec{F}$ сонаправлен с вектором начальной скорости $\vec{v}_0$ частицы, то ее движение будет прямолинейным и равноускоренным. В таком случае частица, двигаясь вдоль прямой АВ (траектория движения частицы), покинет выделенную область в точке В с координатами $B(l, \frac{l}{2})$. Для вычисления времени движения частицы найдем ее ускорение $a = \frac{F}{m} = \frac{2ml}{\tau^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{2l}{\tau^2}$ и запишем закон равноускоренного движения

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow l = \frac{l}{\tau} \cdot t + \frac{2l}{\tau^2} \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{t}{\tau}\right) - 1 = 0. \quad (1)$$



Решение квадратного уравнения (1) даёт два корня

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \tau, \quad (2)$$

Из которых нас интересует корень со знаком «+». Таким образом, частица покинет выделенную область в указанных координатах через промежуток времени

$$t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \tau = 0,62\tau. \quad (3)$$

1.2 Поскольку в данном случае вектор силы $\vec{F}$ не параллелен вектору начальной скорости $\vec{v}_0$ частицы, то её движение будет происходить по параболе, ветви которой направлены вверх. Движение вдоль оси Oy будет равноускоренным ($a = \frac{F}{m} = \frac{2l}{\tau^2}$) без начальной скорости, т.к. вектор $\vec{v}_0$ «горизонтален». Следовательно, частица достигнет верхней границы области за время

$$\frac{l}{2} = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

При этом смещение частицы вдоль оси Ox составит

$$x = v_0 t \Rightarrow x = \frac{l}{\tau} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0,71l. \quad (5)$$

Как следует из (5), частица покинет выделенную область, двигаясь по параболе, в точке B , координаты которой $B(\frac{l}{\sqrt{2}}, l)$ через промежуток времени $t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}$ (см. рис.). Отметим, что в данной задаче необходим анализ, через какую из сторон частица покинет данную область. При меньшем ускорении это было бы возможно и через сторону $x = l$.

1.3 Если при движении частицы на неё действует сила, которая все время перпендикулярна вектору скорости $\vec{v}_0$ частицы (т.е. сила «поворачивается» вместе с частицей), то эта сила не может изменить модуля скорости частицы, изменяя лишь её направление. Следовательно, траектория движения в данном случае будет представлять собой окружность некоторого радиуса R (см. рис.), по которой частица будет равномерно двигаться.

Согласно второму закону Ньютона для движения частицы по окружности запишем

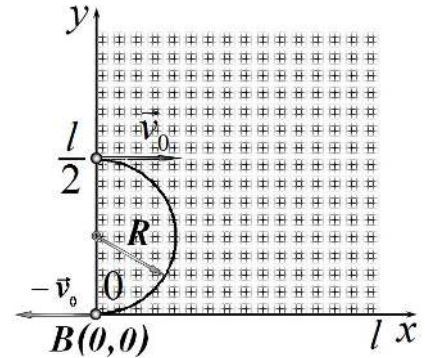
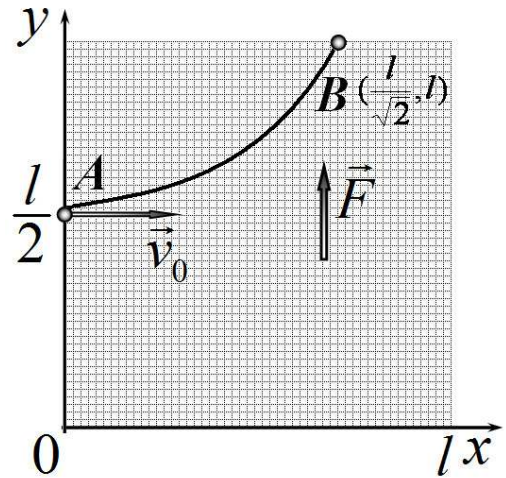
$$F = \frac{4mv_0^2}{l} = ma = m \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{l}{4}. \quad (6)$$

Как следует из (6), частица, совершив под действием силы пол-оборота, покинет выделенную область через точку начала координат (точка 0), имея тот же модуль скорости v_0 , но противоположное направление движения. Это произойдет через промежуток времени

$$\pi R = v_0 t \Rightarrow t = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi}{4} \tau = 0,78\tau. \quad (7)$$

Таким образом, траектория движения частицы в этом случае будет представлять собой полуокружность радиуса $R = \frac{l}{4}$, координаты точки выхода частицы — $B(0,0)$.

1.4 Данный пункт является самым «олимпиадным» вариантом движения частицы в данной задаче. Действительно, как следует из условия, в начальный момент времени вектор силы $\vec{F}$



перпендикулярен вектору начальной скорости $\vec{v}_0$ частицы. Однако мы не можем утверждать, что это свойство системы сохранится в любой момент времени и при дальнейшем движении частицы, поскольку возможен вариант «различных» поворотов векторов силы и скорости с течением времени.

В таком случае обратимся к методу аналогий и постараемся «угадать» необходимое решение, используя опыт рассмотрения различных кинематических задач. Если рассмотреть движение точки на ободе колеса, катящегося без проскальзывания со скоростью $\vec{v}$ по горизонтальной поверхности, то можно заметить, что ее скорость в верхней точке траектории равна $2v$, поскольку складываются скорости поступательного и вращательного движений.

Рассмотрим, колесо радиуса $R = \frac{l}{4}$, центр которого движется без проскальзывания со скоростью $\vec{v}_0/2$ по горизонтальной поверхности. Тогда скорость движения его верхней точки ($\vec{v}_0$) будет совпадать и по модулю и по направлению со скоростью частицы. Угловая скорость поворота колеса (соответственно и угловой скорости поворота колеса) в этом случае равна

$$\omega = \frac{v_0/2}{l/4} = 2\frac{v_0}{l}. \quad (8)$$

$$\frac{v_0}{2} \bigg/ \frac{l}{4}$$

Ускорение частицы будет обусловлено только вращением, следовательно, модуль силы, действующей на точку обода колеса массой m , будет равен

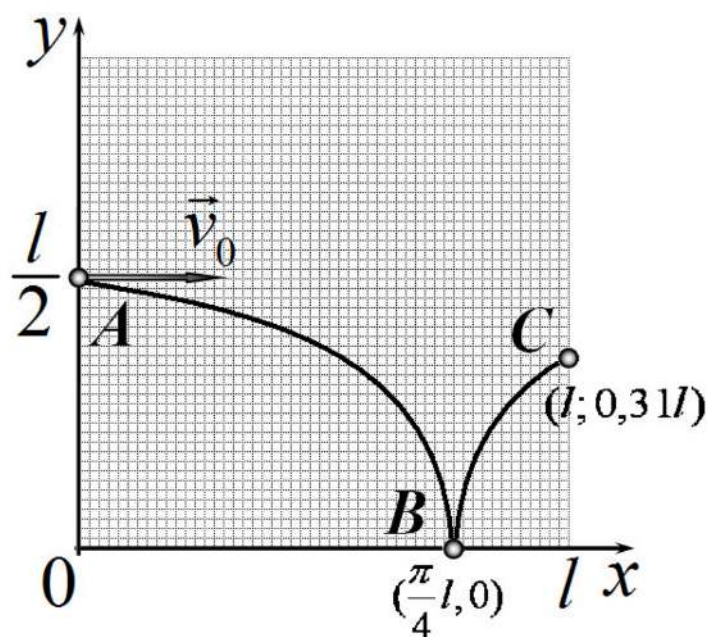
$$F = ma = m\omega^2 R = m \left(2\frac{v_0}{l}\right)^2 \frac{l}{4} = \frac{mv_0^2}{l}. \quad (9)$$

Проекции силы на оси координат равны

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{mv_0^2}{l} \sin\left(2\frac{v_0}{l}t\right) \\ F_y &= -\frac{mv_0^2}{l} \cos\left(2\frac{v_0}{l}t\right) \end{aligned} \quad (10)$$

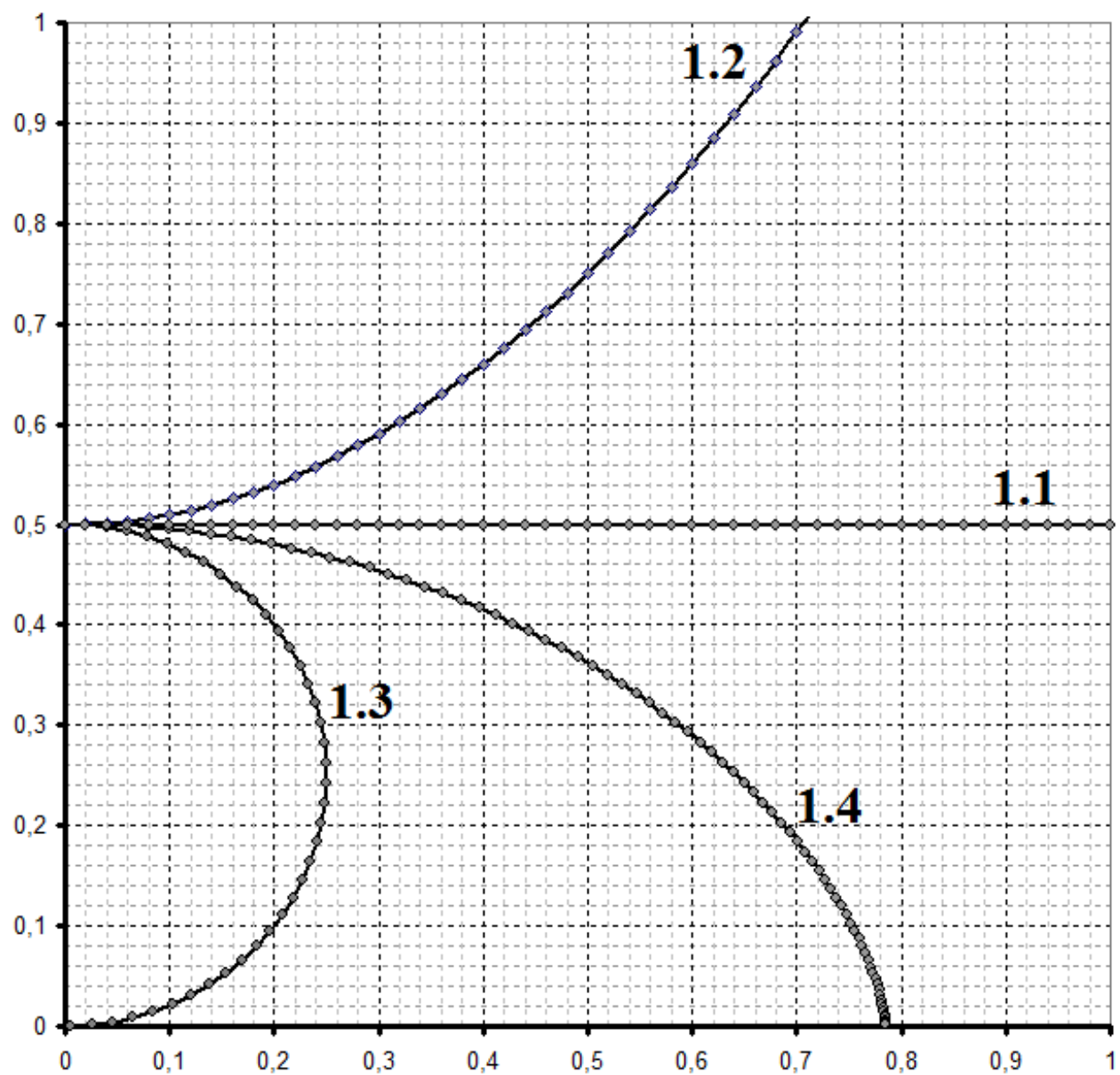
в дух задач совпадают, законы движения. Таким образом, траектория частицы в данном случае будет траекторией точки на ободе катящегося колеса – *циклоида*.

Частица в первый раз коснется границы в точке B (см. рис.) через время, равное половине оборота колеса $t = \frac{\pi l}{2v_0}$ в точке с координатами $(\frac{\pi}{4}l, 0)$.



Таким образом, начальные условия (координаты и скорости) и зависимости ускорений от времени в дух задач совпадают, поэтому совпадают и законы движения. Таким образом, траекторией движения частицы в данном случае будет траектория точки на ободе катящегося без проскальзывания колеса – *циклоида*.

Следовательно, частица в первый раз коснется границы выделенной области в точке B (см. рис.) через время, равное половине оборота колеса $t = \frac{\pi l}{2v_0}$ в точке с координатами $(\frac{\pi}{4}l, 0)$.



В заключение продемонстрируем все точные траектории движения точки, рассмотренные в данной задаче на отдельном рисунке.