

-1 1. Край соленоида

Условие

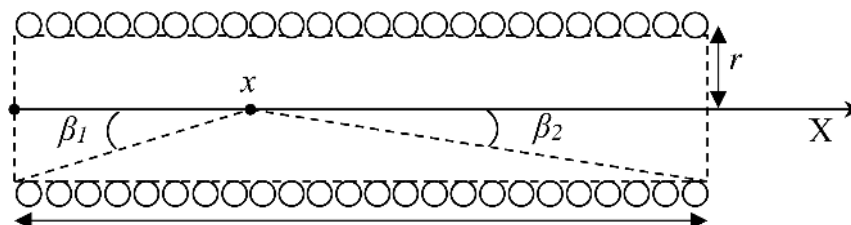
Задача 11-1

1. Край соленоида

В цилиндрической катушке длины L и радиуса r с числом витков N индукция магнитного поля в любой точке с координатой x на оси катушки определяется по формуле

$$B_x = \frac{\mu_0 I N}{2L} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2),$$

где I – сила тока в катушке, β_1, β_2 – углы под которыми видны края катушки из точки, в которой рассчитывается индукция поля.



1.1 Определите индукцию магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида $\hat{A}_\infty$. 1.2 Определите максимальное $B_{x(max)}$ и минимальное $B_{x(min)}$ значение индукции магнитного поля соленоида конечной длины L ($L \gg r$).

*Рекомендуем использовать формулу приближения: $(1 + \delta)^n \approx 1 + n \cdot \delta$

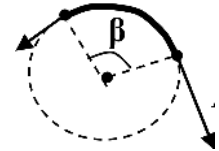
1.3 Изобразите примерную картину силовых линий магнитного поля бесконечного соленоида и соленоида конечной длины L ($L \gg r$) при одинаковых значениях $I, \frac{N}{L}, r$.

2. Край стола

Гибкая цепочка длины L и массы m лежит на горизонтальной поверхности стола. Край стола представляет собой полуокружность радиуса R ($R \ll L$). Коэффициент трения цепочки о стол равен $\mu = \frac{2}{\pi}$.

2.1 Определите минимальную длину цепочки, свисающую с края стола, при которой цепочка начинает соскальзывать без учета взаимодействия цепочки с краем стола.

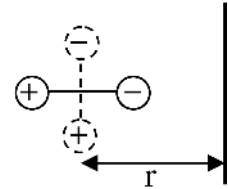
2.2 При протягивании цепочки по закруглению сила натяжения цепочки изменяется по закону: $F_2 = F_1 e^{\mu\beta}$. Определите минимальную длину цепочки, свисающую с края стола, при которой цепочка начинает соскальзывать с учетом взаимодействия цепочки с краем стола.



3. «Край» электрического диполя

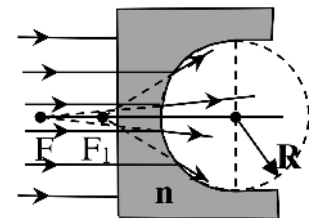
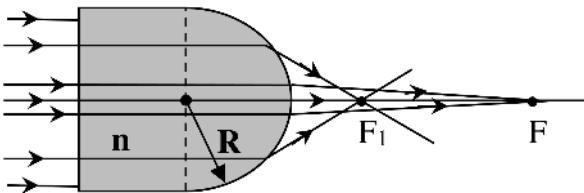
Система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние между которыми L , называется электрическим диполем. Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя.

Определите силу взаимодействия диполя с бесконечной проводящей плоскостью: 3.1 ось диполя перпендикулярна плоскости; 3.2 ось диполя параллельна плоскости. *Примечание:* * r – расстояние от центра диполя до проводящей плоскости, $r \gg L$. Рекомендуем использовать формулу приближения: $(1 + \delta)^n \approx 1 + n \cdot \delta$



4. Край сферической линзы

Широкий пучок монохроматических параллельных лучей падает из вакуума перпендикулярно на плосковыпуклую и плосковогнутую сферическую поверхность с показателем преломления n .



4.1 Определите максимальную сферическую aberrацию $\Delta F = |F - F_1|$ вдоль главной оптической оси для двух поверхностей.

4.2 Предложите способы устранения сферической aberrации для сферической поверхности раздела двух сред с разными показателями преломления.

Примечание:

* F – параксиальный фокус (фокус для узкого пучка лучей вблизи оси). * F_1 – краевой фокус (фокус для крайних лучей пучка)

Решение

Задача 11-1 1. Край соленоида 1.1 Для бесконечного соленоида

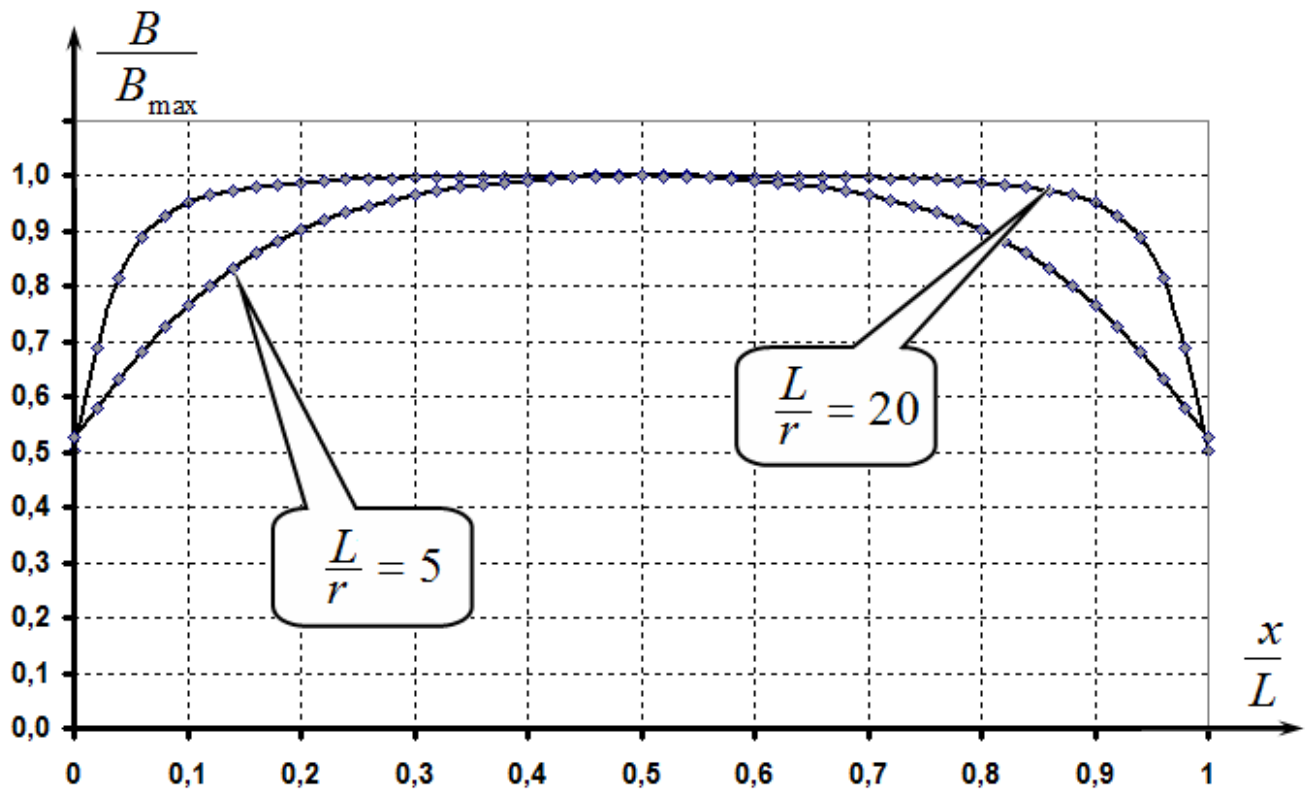
$$B_{\infty} = \frac{\mu_0 I N}{2L} (\cos 0^0 + \cos 0^0) = \frac{\mu_0 I N}{L}$$

1.2 Для индукции в произвольной точке внутри соленоида

$$B_x = \frac{\mu_0 I N}{2L} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + r^2}} \right)$$

На рисунке показан график этой функции (от учеников его построение не требуется). Видно, что при увеличении отношения длины к радиусу соленоида влияние его краев на поле уменьшается. Можно сказать, что краевые эффекты распространяются на глубину порядка диаметра соленоида. Индукция магнитного поля на краю соленоида равна:

$$B_0 = B_L = \frac{\mu_0 I N}{2L} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 I N}{2L \sqrt{1 + \frac{r^2}{L^2}}} \approx \frac{\mu_0 I N}{2L} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{L^2} \right) \approx \frac{\mu_0 I N}{2L} = \frac{1}{2} B_{\infty}$$



Индукция магнитного поля в центре соленоида ($\tilde{\sigma} = L/2$) равна:

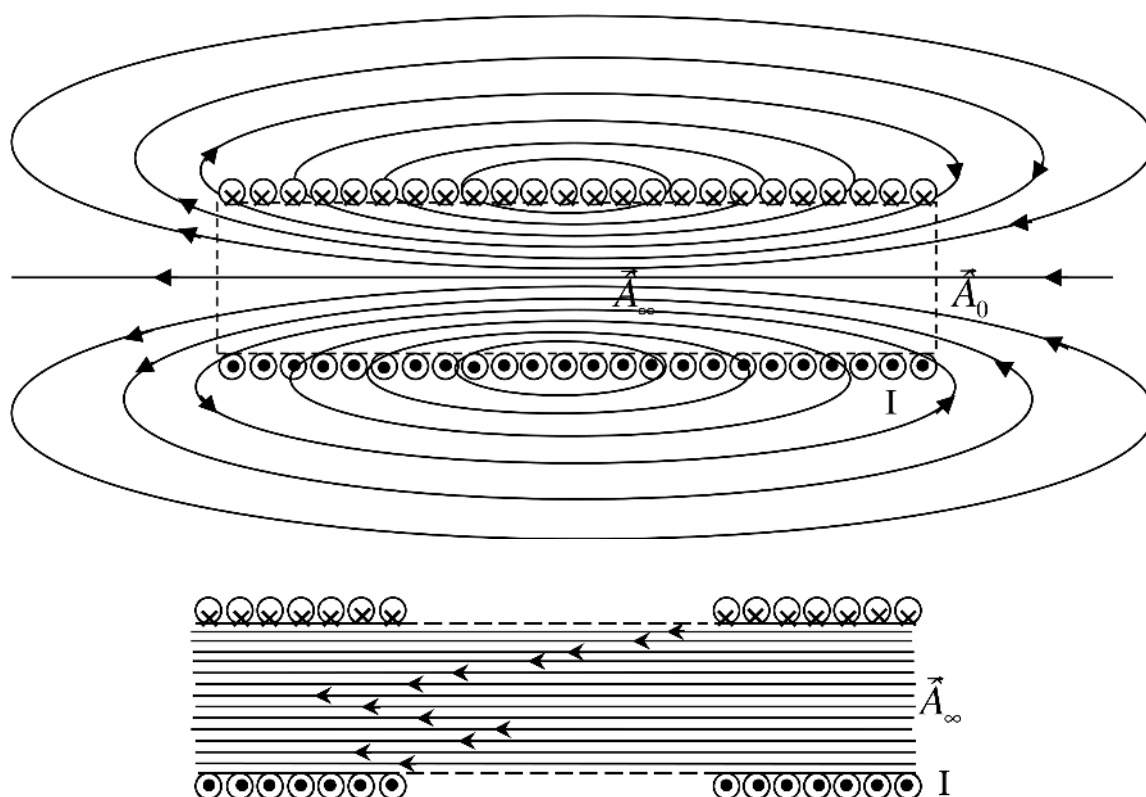
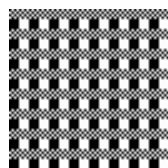
$$\hat{A}_{L/2} = \frac{\mu_0 I N}{2L} \cdot 2 \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}} = \frac{\mu_0 I N}{L \sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}} \approx \frac{\mu_0 I N}{L} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2}{L^2} \right) \approx \frac{\mu_0 I N}{L} = B_\infty$$

$$\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}$$

Индукция магнитного поля B_x вдоль оси соленоида конечной длины $L \gg r$ принимает максимальные значения в центре соленоида $\hat{A}_{L/2} = \frac{\mu_0 I N}{L} = B_\infty = B_{x(\max)}$ и минимальные значения на краях соленоида $B_0 = B_L = \frac{\mu_0 I N}{2L} = \frac{1}{2} B_\infty = B_{x(\min)}$

1.3 Если смотреть справа на соленоид, то направление тока совпадает с направлением вращения буравчика по часовой стрелке. Количество силовых линий магнитного поля K пропорционально модулю вектора магнитной индукции B ($K \propto B$). В центре соленоида $K1 = 13$, на краю соленоида $K2 = 7$.

При конечной длине соленоида начинают сказываться краевые эффекты: поле внутри соленоида перестает быть однородным, меняется радиальная B_r и осевая B_x составляющие магнитного поля.



2.1 Из условия равновесия цепочки,

$$\frac{m}{L}x_1g = \mu \frac{m}{L}(L - x_1)g$$

следует, что максимально возможная длина свисающей части цепочки равна

$$x_1 = \frac{L}{\frac{1}{\mu} + 1} = \frac{L}{2,57} \approx 0,39L$$



2.2 Так как $R \ll L$, то массой цепочки на изгибе стола можно пренебречь:

$$\Delta m = \frac{m}{L}R\frac{\pi}{2} \approx 0$$

Тогда условие равновесия с учетом силы трения приобретает вид

$$\frac{m}{L}x_2g = \mu \frac{m}{L}(L - x_2)g \cdot 2,7^{\mu \cdot \beta}, \quad \text{где } \beta = \frac{\pi}{2}$$

Подстановка численных значений дает результат

$$x_2 = \frac{L}{\frac{1}{\mu 2,7^{\mu \cdot \beta}} + 1} = \frac{L}{\frac{\pi}{2 \cdot 2,7} + 1} = \frac{L}{1,582} \approx 0,63L$$

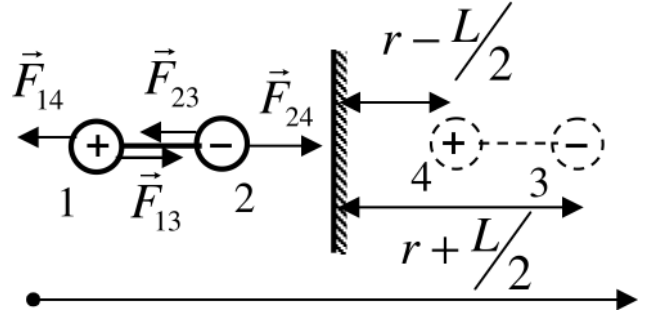
Учет действия края стола на цепочку увеличивает значение x более чем в полтора раза!

$$\frac{\tilde{o}_2}{\tilde{o}_1} \approx 1,63$$

3. «Край» электрического диполя

3.1 Для определения силы взаимодействия диполя с проводящей плоскостью воспользуемся методом электростатических изображений.

$$\vec{F}_\perp = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{23}$$



$$F_\perp = kq^2 \left(-\frac{1}{4r^2} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4\left(r + \frac{L}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\left(r - \frac{L}{2}\right)^2} \right) = \frac{kq^2}{4} \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2r^2 + \frac{L^2}{2}}{r^4 \left(1 - \frac{L^2}{4r^2}\right)^2} \right)$$

Учтем формулу приближения:

$$\left(1 - \frac{L^2}{4r^2}\right)^{-2} \approx 1 - (-2)\frac{L^2}{4r^2} = 1 + \frac{L^2}{2r^2}$$

$$F_\perp = \frac{kq^2}{4} \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{\left(2r^2 + \frac{L^2}{2}\right)\left(1 + \frac{L^2}{2r^2}\right)}{r^4} \right) \approx \frac{3kq^2 L^2}{8r^4}$$

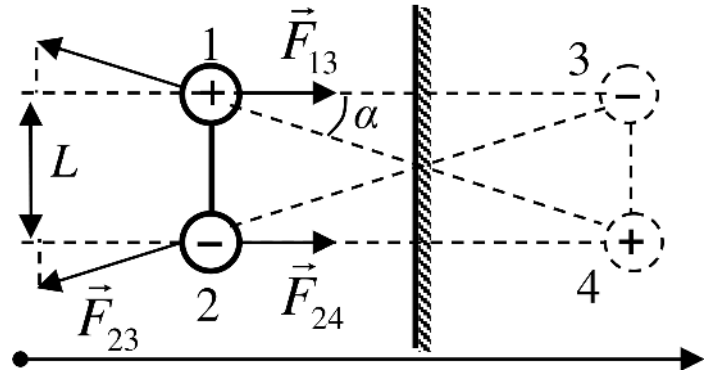


Учтено, что $\frac{L^4}{2r^2} \approx 0$, т. к. $L \gg r$. $\vec{F}_{14}$

3.2 Из симметрии задачи следует, что

$$F_{14} = F_{23} = k \frac{q^2}{L^2 + 4r^2}, \quad F_{13} = F_{24} = k \frac{q^2}{4r^2}$$

Сила взаимодействия диполя с проводящей плоскостью при параллельной ориентации равна:



$$F_\parallel = 2F_{13} - 2F_{14} \cos \alpha$$

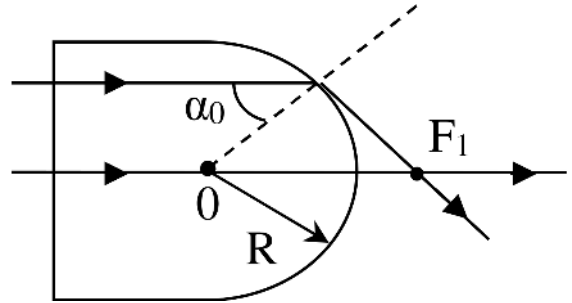
$$F_\parallel = 2kq^2 \left(\frac{1}{4r^2} - \frac{1}{L^2 + 4r^2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{L^2 + 4r^2}} \right) = 2kq^2 \left(\frac{1}{4r^2} - \frac{2r}{8r^3 \left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{3/2}} \right)$$

_____ 3/

По формуле приближения $\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{L^2}{4r^2}$

$$F_{\parallel} = 2kq^2 \left(\frac{1}{4r^2} - \frac{1}{4r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{L^2}{4r^2} \right) \right) = \frac{3kq^2 L^2}{4r^4} \quad F_{\perp} = \frac{1}{2} F_{\parallel}$$

4. Край сферической линзы



4.1 Расстояние крайнего фокуса от центра сферической поверхности OF₁ для плосковыпуклой поверхности определим из условия полного внутреннего отражения.

$$\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}, \quad OF_1 = \frac{R}{\cos \alpha_0} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{Rn}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

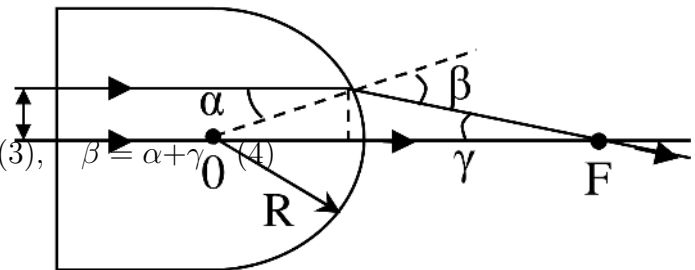
Расстояние параксиального фокуса от центра сферической поверхности OF для плосковыпуклой поверхности определим для очень узкого пучка лучей .

Для малых углов можно считать $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$

$$n\alpha = \beta \quad (1), \quad \frac{h}{R} = \alpha \quad (2), \quad \frac{h}{OF - R} = \gamma \quad (3), \quad \beta = \alpha + \gamma \quad (4)$$

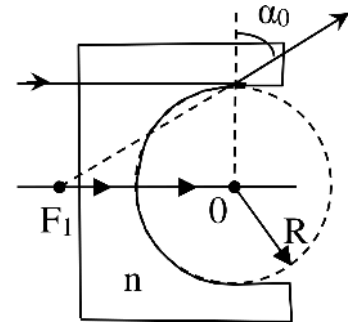
Решая систему уравнений (1) – (4), получаем:

$$OF = \frac{Rn}{n - 1}$$



$$\Delta F = Rn \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right)$$

4.2 Расстояние крайнего фокуса от центра сферической поверхности OF_1 для плосковогнутой поверхности определим из условия полного внутреннего отражения.



$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}$$

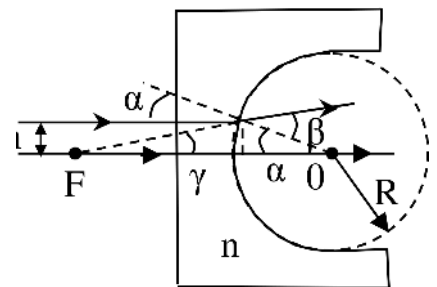
$$OF_1 = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{R}{\sqrt{n^2-1}}$$

Расстояние параксиального фокуса от центра сферической поверхности OF для плосковогнутой поверхности определим для очень узкого пучка лучей.

Для малых углов можно считать $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$

$$n\alpha = \beta_{(1)}, \frac{h}{R} = \alpha_{(2)}, \frac{h}{OF-R} = \gamma_{(3)}, \beta = \alpha + \gamma_{(4)}$$

$$OF = \frac{Rn}{n-1}$$



Решая систему уравнений (1) – (4), получаем:

$$\Delta F' = R \left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right)$$

4.3 Можно предложить несколько способов уменьшения сферической аберрации сферической поверхности линзы:

А) С увеличением показателя преломления материала линзы уменьшается ΔF .

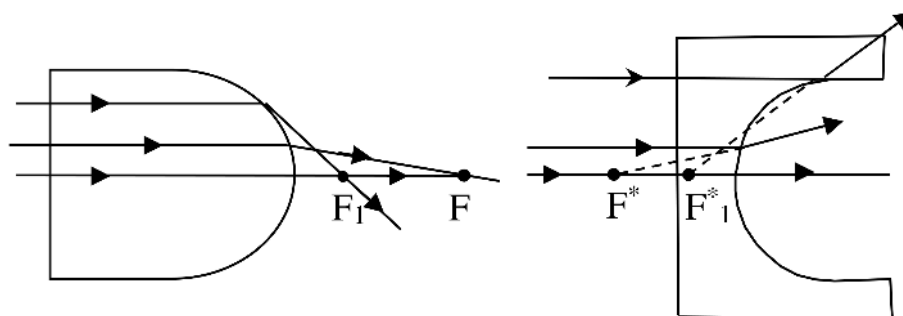
$$\Delta F = Rn \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right) \quad \Delta F' = R \left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \right)$$

n	ΔF	ΔF^*
1,5	2R	2,41R
2	0,85R	1,42R

ΔF^*
2,41R
1,42R

В) Уменьшение ширины пучка света приближает значение краевого фокуса к параксиальному, что приводит к уменьшению значения ΔF . Ширину пучка света можно регулировать диафрагмой.

С) Можно заметить, что плосковыпуклая сферическая поверхность смещает краевой



фокус по ходу лучей, а плосковыпуклая поверхность смещает краевой фокус против хода лучей!