

Условие

Задача 10-1.

Для описания упругих свойств веществ используются различные характеристики, одной из которых является модуль Юнга E . Рассмотрим небольшой брусок в форме параллелепипеда. Пусть перпендикулярно одной из граней с площадью S к бруску приложены две равные по модулю и противоположные по направлению силы $\vec{F}, \vec{F}'$, под действием которых длина бруска увеличилась на малую величину x (при длине в недеформированном состоянии l). В качестве меры возникающих сил упругости используется механическое напряжение σ , равное отношению нормальной силы упругости к площади поперечного сечения S : $\sigma = \frac{F}{S}$, мерой деформации служит относительная деформация $\varepsilon = \frac{x}{l}$. Связь между этими величинами выражается законом Гука

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (1)$$

Важно отметить, что модуль Юнга зависит только от свойств материала, а не от размеров бруска. Модуль Юнга является важной характеристикой вещества, так, например, скорость звука в веществе также зависит от модуля Юнга и определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2)$$

где ρ - плотность вещества.

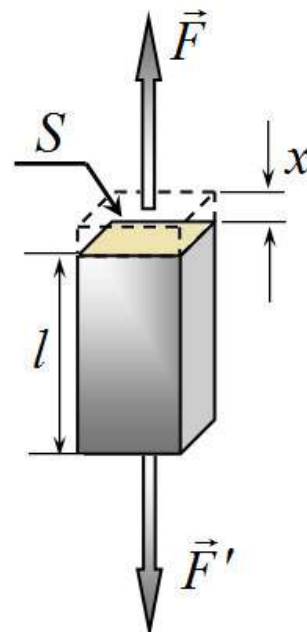
В данной задаче рассматривается тонкий цилиндр длиной l и площадью поперечного сечения S , изготовленный из материала с модулем Юнга E и плотности ρ .

1.1 Модуль Юнга и коэффициент жесткости.

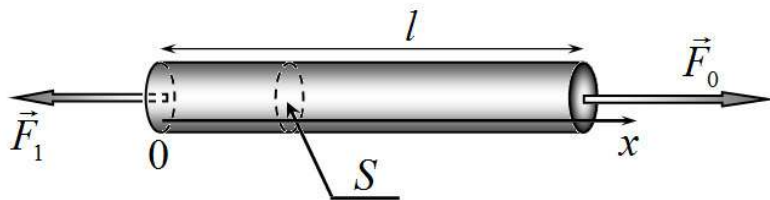
Цилиндр растягивают, прикладывая к нему постоянные силы, направленные вдоль его оси. В 9 классе вы использовали следующую формулу закона Гука для силы упругости

$$F_{\text{упр.}} = kx, \quad (2)$$

где x - удлинение цилиндра, k - коэффициент жесткости. 1.1.1 Выразите коэффициент жесткости цилиндра через его геометрические размеры и модуль Юнга. 1.1.2 Пусть сила упругости растянутого цилиндра равна F_0 . Выразите энергию упругих деформаций цилиндра через его модуль Юнга и относительную деформацию ε . Найдите объемную плотность энергии упругих деформаций.



1.2 Деформации и движение.



К торцам цилиндра прикладывают две силы, направленные вдоль оси цилиндра и равномерно распределенные по его торцам: к правому торцу F_0 , к левому F_1 . Совместим ось Ox с осью цилиндра, а ее начало с левым торцом. В части 1.2 рассмотрите три случая: а) $F_1 = F_0$; б) $F_1 = \frac{1}{2}F_0$; в) $F_1 = 0$.

1.2.1 Постройте графики зависимости относительной деформации ε от координаты x .

1.2.2 Найдите максимальное удлинение стержня.

1.2.2 Найдите максимальную энергию деформации стержня.

1.3 Разгон и деформации

Найденное Вами распределение деформаций не устанавливается мгновенно, требуется некоторое время, чтобы волна деформаций распространилась по стержню. Пусть к правому торцу стержня в момент времени $t = 0$ прикладывают постоянную силу F_0 , при этом левый конец стержня остается свободным.

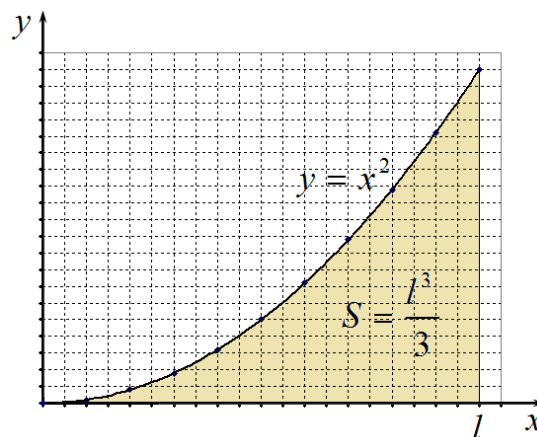
1.3.1 Оцените время установления стационарного распределения деформаций, в стержне после начала его движения.

1.3.2 Оцените, через какой промежуток времени кинетическая энергия стержня станет равной энергии ее упругих деформаций.

Самостоятельно предложите простую модель распространения деформаций в стержне в процессе его разгона и воспользуйтесь ею.

Математическая подсказка.

Площадь под параболой $y = x^2$ на участке от 0 до l равна $S = \frac{l^3}{3}$ (это вычислил еще Архимед!)



Решение

Задача 10-1.

1.1 Модуль Юнга и коэффициент жесткости.

1.1.1 Выразим силу упругости из определения механического напряжения $F_{\text{упр}} = \sigma S$ и подставим в полученное выражение закон Гука в виде (1), тогда

$$F_{\text{упр}} = \sigma S = \varepsilon ES = \frac{x}{l} ES = \left(E \frac{S}{l} \right) \cdot x = kx. \quad (1)$$

Из (1) следует, что коэффициент жесткости цилиндра выражается через его геометрические размеры следующим образом

$$k = E \frac{S}{l}. \quad (2)$$

1.1.2 Энергия упругих деформаций выражается по известной формуле $E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}$ (Физика – 9, с. 168). Во избежание путаницы с модулем Юнга будем в дальнейшем обозначать потенциальную энергию упругих деформаций через

$$E_{\Pi} = W_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) полученное выражение (2) для коэффициента жесткости, находим

$$W_{\Pi} = \frac{kx^2}{2} = E \frac{S}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{E}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \cdot (Sl) = \frac{E\varepsilon^2}{2} \cdot V, \quad (4)$$

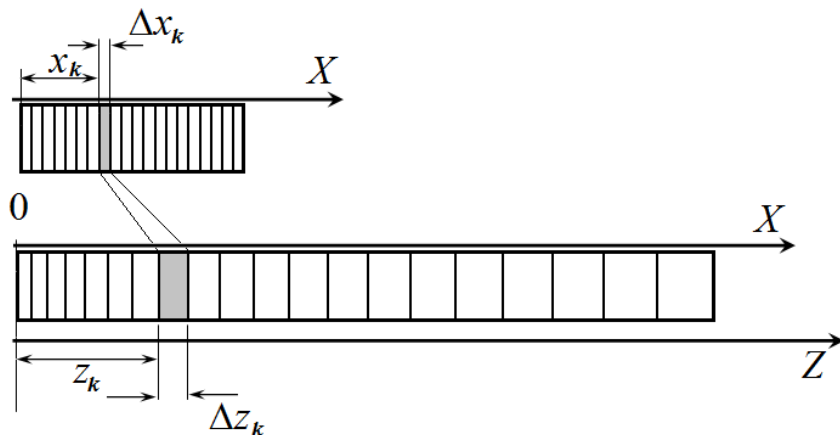
– где $V = S \cdot l$ – объём рассматриваемого цилиндра. Для нахождения объёмной плотности энергии ρ_E упругих деформаций (т.е. энергии упругих деформаций, заключенной в единице объёма деформированной среды) необходимо взять отношение (4) к рассматриваемому объёму

$$\rho_E = \frac{E\varepsilon^2}{2} \cdot V/V = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (5)$$

Как следует из (5), плотность энергии упругих деформаций изменяется от точки к точке, если изменяется механическое напряжение или относительная деформация в образце.

2. Деформации и движение.

Поясним сначала, что следует понимать под относительной деформацией $\varepsilon(x)$, которая является функцией координаты.



Свяжем ось Ox со стержнем, начало оси совместим с левым торцом стержня (см. рис). Мысленно разобьем недеформированный стержень на тонкие слои одинаковой толщины Δx . Пронумеруем эти слои индексом k . Выделим один из этих слоев, координату которого обозначим x_k .

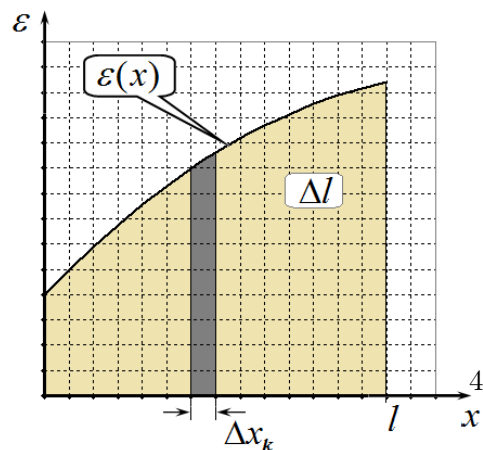
Теперь представим, что стержень подвергся неоднородной деформации, например, удлинению под действием собственного веса. Тогда границы каждого слоя сместились, причем на разные расстояния. Введем новую неподвижную ось Oz , ось же Ox , по-прежнему, считаем связанной со стержнем, иными словами будем считать, что она деформировалась вместе со стержнем. Пусть координата левой стороны выделенного слоя приняла значение z_k , а его толщина стала равной Δz_k . Тогда абсолютная деформация этого слоя равна $\delta x_k = \Delta z_k - \Delta x_k$, соответственно относительная деформация

$$\varepsilon_k = \frac{\delta x_k}{\Delta x_k} = \frac{\Delta z_k - \Delta x_k}{\Delta x_k}. \quad (6)$$

Если толщины выделенных слоев считать бесконечно малыми, то вместо номера слоя k , можно его характеризовать координатой x и говорить об относительной деформации, как функции x .

Зная относительную деформацию как функцию координаты, не сложно найти удлинение всего стержня. Так удлинение выделенного участка равно $\delta x_k = \varepsilon_k \Delta x_k$, а полное удлинение находится суммированием по всем слоям, т.е.

$$\Delta l = \sum_k \varepsilon_k \Delta x_k. \quad (7)$$

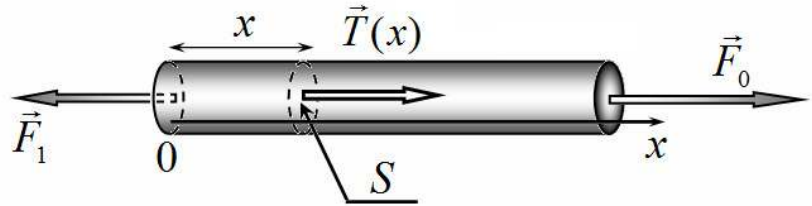


Если слои считать бесконечно тонкими, а деформацию функцией координаты, то полное удлинение станет равным площади под графиком зависимости $\varepsilon(x)$. Также из формулы можно выразить зависимость новой координаты слоя через относительную деформацию $\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta z_k &= \Delta x_k + \varepsilon_k \Delta x_k \Rightarrow \\ z_k &= \sum_{i=0}^k \Delta x_i + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \Delta x_i = x_k + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \Delta x_i.\end{aligned}\quad (8)$$

где суммирование ведется по всем предшествующим слоям. При бесконечно малых ширинах слоев сумма в формуле (8) может быть выражена, как площадь под графиком зависимости $\varepsilon(x)$ в интервале от 0 до x .

Теперь можно приступить к непосредственному решению второй части задачи.



Решим эту задачу в общем виде (что не запрещает решать каждый случай отдельно). Итак, к правому торцу стержня приложили силу F_0 , а к левому $\vec{F}_1$. В течении некоторого промежутка времени разные части стержня будут двигаться с разными скоростями, что приведет к возникновению деформаций внутри стержня. По прошествии некоторого промежутка времени деформации стабилизируются, после чего скорости всех точек стержня будут одинаковы, следовательно, будут одинаковы и их ускорения. Исходя из этого условия и с помощью второго закона Ньютона, мы сможем найти распределение сил упругости внутри стержня. Далее с помощью закона Гука мы сможем найти распределение относительных деформаций, что позволит нам рассчитать все требуемые характеристики. Выделим участок стержня длиной x , начиная от его левого торца. На основании 2 закона Ньютона можно записать уравнение

$$m(x)a = T(x) - F_1 \quad (9)$$

где $m(x) = m \frac{x}{l}$ - масса выделенной части стержня (m - масса всего стержня), $T(x)$ - сила упругости, действующая со стороны правой части стержня, a - ускорение стержня. Ускорение можно найти, записывая уравнение 2 закона Ньютона для всего стержня:

$$ma = F_0 - F_1 \Rightarrow a = \frac{F_0 - F_1}{m} \quad (10)$$

Теперь из уравнения (9) можно найти зависимость силы упругости внутри стержня, как функцию координаты

$$T(x) = ma\frac{x}{l} + F_1 = (F_0 - F_1)\frac{x}{l} + F_1 = F_0\frac{x}{l} + F_1\left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (11)$$

Переход к относительной деформации определяется очевидной цепочкой преобразований:

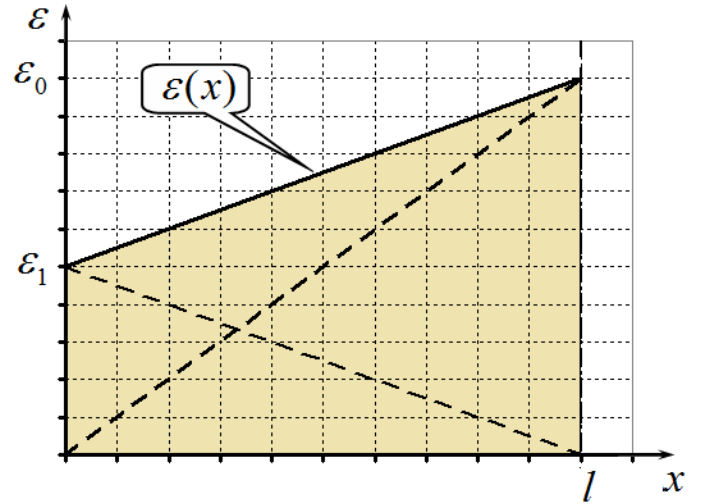
$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{T(x)}{SE} = \frac{F_0}{SE}\frac{x}{l} + \frac{F_1}{SE}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \\ &= \varepsilon_0\frac{x}{l} + \varepsilon_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

где обозначено $\varepsilon_0 = \frac{F_0}{SE}$, $\varepsilon_1 = \frac{F_1}{SE}$ - относительные деформации, создаваемые постоянными силами F_0, F_1 , соответственно. График этой зависимости представляет собой прямую линию. Интересно отметить, что для относительных деформаций справедлив принцип суперпозиции (что следует из линейности закона Гука): сила F_0 приводит к возникновению деформаций, линейно уменьшающихся от максимального значения ε_0 в месте ее приложения (т.е. на правом торце) до нуля на противоположном торце; аналогично ведут себя деформации, создаваемые силой F_1 : от максимального значения ε_1 на левом торце, до нуля на правом.

Графики функции $\varepsilon(x)$ и ее составляющих приведены на рисунке. Как уже было отмечено, площадь под графиком равна полному удлинению стержня. В данном случае оно рассчитывается по формуле

$$\Delta l = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2}l = \frac{F_0 + F_1}{2ES}l. \quad (13)$$

Для расчета энергии деформаций необходимо воспользоваться формулой для объемной плотности энергии (5). Полная энергия может быть найдена посредством вычисления суммы



$$W = \sum_k \frac{E\varepsilon_k^2}{2} S \Delta x_k \quad (14)$$

Подставляя выражение для зависимости $\varepsilon(x)$, получим

$$\begin{aligned} W &= \sum_k \frac{E\varepsilon_k^2}{2} S \Delta x_k = \frac{E}{2} S \sum_k \left(\varepsilon_0 \frac{x_k}{l} + \varepsilon_1 \left(1 - \frac{x_k}{l}\right) \right)^2 \Delta x_k = \\ &= \frac{E}{2} S \varepsilon_0^2 \sum_k \frac{x_k^2}{l^2} \Delta x_k + \frac{E}{2} S \varepsilon_1^2 \sum_k \left(1 - \frac{x_k}{l}\right)^2 \Delta x_k + 2 \frac{E}{2} S \varepsilon_0 \varepsilon_1 \sum_k \frac{x_k}{l} \left(1 - \frac{x_k}{l}\right) \Delta x_k \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим смысл полученного выражения. Первое слагаемое – полная энергия деформаций, обусловленных силой F_0 ; второе - полная энергия деформаций, обусловленных силой

F_1 ; третье – дополнительное слагаемое, «перекрестный» член! Так как плотность энергии нелинейно зависит от относительной деформации, то для полной энергии принцип суперпозиции не «работает», что и иллюстрируется появлением третьего слагаемого!

Первая сумма может быть вычислена с помощью приведенной математической подсказки:

$$\sum_k \frac{x_k^2}{l^2} \Delta x_k = \frac{1}{3} l.$$

Вторая сумма имеет то же значение – какая разница суммировать слева направо, или справа налево? Третья также может быть вычислена без особых проблем:

$$\sum_k \frac{x_k}{l} \left(1 - \frac{x_k}{l}\right) \Delta x_k = \sum_k \frac{x_k}{l} \Delta x_k - \sum_k \left(\frac{x_k}{l}\right)^2 \Delta x_k = \frac{1}{2} l - \frac{1}{3} l = \frac{1}{6} l.$$

Для полной энергии деформаций получаем формулу:

$$W = \frac{E}{2} S l \left(\frac{\varepsilon_0^2}{3} + \frac{\varepsilon_1^2}{3} + 2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{6} \right) = \frac{E \varepsilon_0^2}{6} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) S l \quad (16)$$

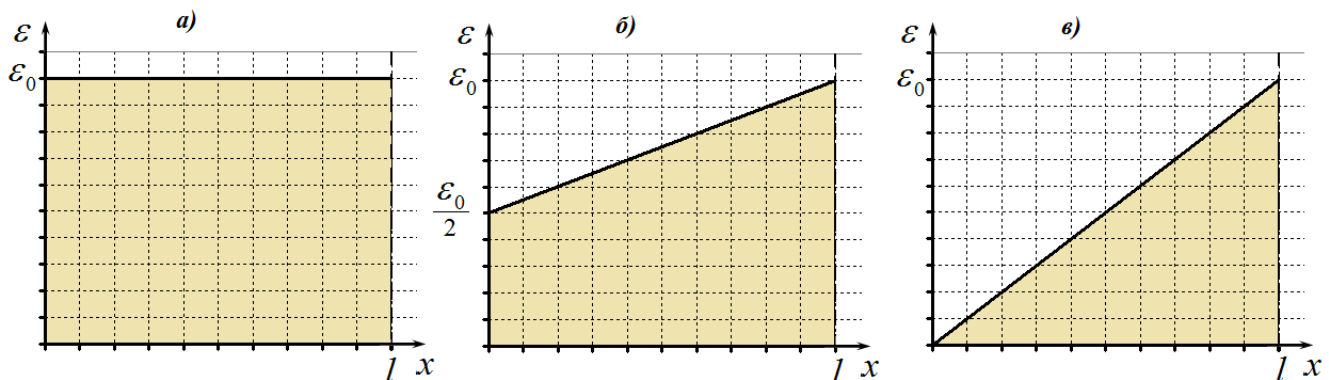
Если, наконец, подставить выражения для $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ через действующие силы, то получим окончательную формулу:

$$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{E S} \left(1 + \frac{F_1}{F_0} + \left(\frac{F_1}{F_0} \right)^2 \right) \quad (17)$$

Три случая, приведенные в условии задачи различаются только значением силы F_1 , поэтому требуемые ответы могут быть сведены в таблицу:

	а)	б)	в)	номер
F_1	$F_1 = F_0$	$F_1 = \frac{1}{2} F_0$	$F_1 = 0$	
$\varepsilon(x)$	$\varepsilon(x) = \frac{F_0}{E S} = const$	$\varepsilon(x) = \frac{F_0}{2 E S} \left(1 + \frac{x}{l}\right)$	$\varepsilon(x) = \frac{F_0}{E S} \frac{x}{l}$	(18)
Δl	$\Delta l = \frac{F_0 l}{E S}$	$\Delta l = \frac{1}{2} \frac{F_0 l}{E S}$	$\Delta l = \frac{1}{2} \frac{F_0 l}{E S}$	(19)
W	$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{E S}$	$W = \frac{7}{24} \frac{F_0^2 l}{E S}$	$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{E S}$	(20)

Требуемые графики показаны на рисунке.



1.3 Разгон и деформации

1.3.1 Характерное время установления равновесия может быть оценено, как время распространения упругой волны по всему стержню:

$$\tau_0 = \frac{l}{c} = l\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (21)$$

где $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ - скорость звука в материале стержня.

1.3.2 Сначала будем считать, что равновесные деформации стержня устанавливаются мгновенно. В этом случае энергия упругих деформаций определяется формулой (20в) $W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{ES}$. Кинетическая энергия стержня изменяется по закону

$$E_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(at)^2}{2} = \frac{m \left(\frac{F_0}{m}t\right)^2}{2} = \frac{F_0^2}{2m} t^2. \quad (22)$$

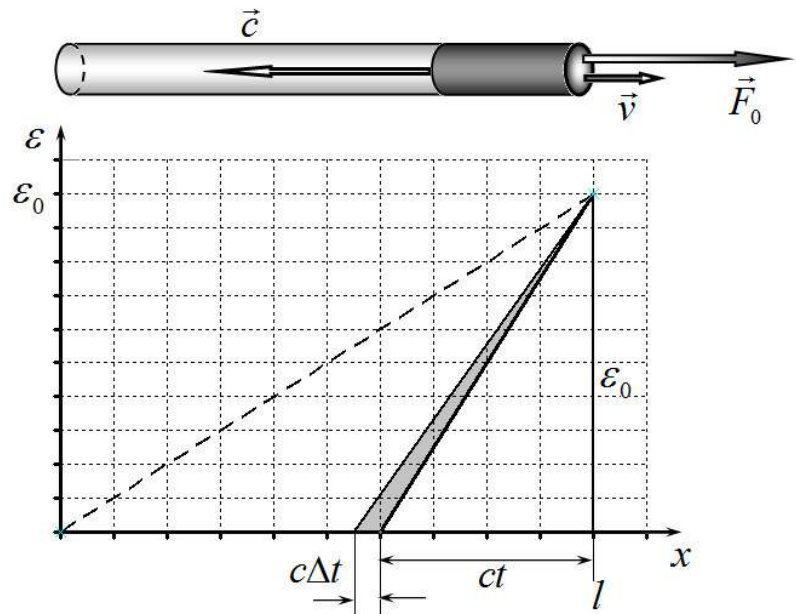
Приравнивая ее к потенциальной энергии деформаций, получим уравнение

$$\frac{F_0^2}{2m} t^2 = \frac{1}{6} \frac{F_0^2 l}{ES} \quad (23)$$

Учитывая, что масса стержня $m = \rho Sl$, из уравнения (23) найдем

$$t = \sqrt{\frac{ml}{3ES}} = \sqrt{\frac{\rho l^2}{3E}} = \frac{1}{\sqrt{3}} l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{3}} \quad (24)$$

Из полученной оценки следует, что равенство кинетической и потенциальной энергий достигается быстрее, чем волна деформаций достигнет конца стержня, то есть еще до того, как весь стержень придет в движение.



Следовательно, необходимо рассмотреть процесс распространения упругой волны в стержне. Для строгого решения такой задачи следует решать волновое уравнение, описывающее процесс распространения деформаций. Однако для получения оценок можно предложить следующую упрощенную модель распространения: упругая волна движется вдоль стержня со скоростью звука $\vec{c}$ от торца, к которому приложена сила $\vec{F}_0$. Этот торец стержня движется с некоторой скоростью $\vec{v}$ (второй торец покоится до тех пор, пока волна деформаций его не достигнет!) В качестве основного упрощающего допущения, будем считать, что в возмущенной части стержня (длиной ct) успевает произойти установление равновесного распределения относительных деформаций. Иными словами, график зависимости деформаций от координаты имеет вид отрезка прямой, нижний конец которого смещается к началу

координат со скоростью звука (см. рис). Как было показано ранее смещение конца стержня численно равно площади под графиком зависимости $\varepsilon(x)$. В рамках предложенной модели это смещение равно

$$\Delta z = \frac{1}{2}\varepsilon_0 ct \quad (25)$$

где $\varepsilon_0 = \frac{F_0}{SE}$, по-прежнему.

Откуда следует, что конец стержня, к которому приложена сила, движется с постоянной скоростью

$$v = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \quad (26)$$

до тех пор, пока волна деформаций не достигнет противоположного конца стержня.

Другие точки стержня (до которых дошло возмущение) движутся с меньшими скоростями. Поэтому кинетическая энергия стержня, точнее его движущей части может быть записана в виде

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\rho Sct \langle v^2 \rangle \quad (27)$$

где ρSct - масса движущейся части, $\langle v^2 \rangle$ - средний квадрат скорости этой части стержня.

В принципе, в рамках нашей модели можно найти и распределение скоростей и вычислить точное значение среднего квадрата, но для оценки можно принять¹ $\langle v^2 \rangle \approx \frac{1}{2}v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{8}\varepsilon_0^2 c^2$, тогда кинетическая энергия стержня возрастает со временем по закону (с учетом выражения для скорости звука)

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{16}\rho Sct \varepsilon_0^2 c^2 = \frac{1}{16}E \varepsilon_0^2 Sct. \quad (28)$$

Для «треугольного» распределения деформаций потенциальная энергия была посчитана ранее (формула 20в)), которая в данном случае дает выражение

$$W = \frac{1}{6} \frac{F_0^2}{ES} ct = \frac{1}{6} E \varepsilon_0^2 Sct. \quad (29)$$

Сравнение эти двух выражение приводит к выводу: во время распространений волны потенциальная энергия деформаций всегда превышает кинетическую энергию!

К моменту τ_0 , когда волна достигает конца стержня, потенциальная энергия достигает своего максимального значения, а весь стержень приобретает скорость, рассчитанную по формуле (26). Далее, так как установилось равновесное распределение деформаций. стержень начинает двигаться как единое целое с постоянным ускорением $a = \frac{F_0}{m}$. Чтобы кинетическая энергия стержня стала равной его потенциальной энергии его скорость должна достичь величины v_1 , которую можно найти из условия

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{6}E\varepsilon_0^2Sl \Rightarrow \frac{1}{2}\rho Slv_1^2 = \frac{1}{6}E\varepsilon_0^2Sl \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\varepsilon_0^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}c\varepsilon_0. \quad (30)$$

Так как к моменту τ_0 скорость стержня определяется формулой (26), и стержень движется с ускорением

$$a = \frac{F_0}{m} = \frac{\varepsilon_0 ES}{\rho Sl} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{l}. \quad (31)$$

— ¹ Отметим, что точное значение $\langle v^2 \rangle = 0,53v_{\max}^2$

То время τ_1 , которое потребуется, чтобы достичь нужной скорости, находится из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{3}}c\varepsilon_0 - \frac{1}{2}c\varepsilon_0 = a\tau_1 \Rightarrow \tau_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)\frac{l}{c} \approx 0,1\frac{l}{c} \quad (32)$$

Прибавляя время разгона τ_0 , получим окончательную оценку искомого времени

$$\tau = 1,1\frac{l}{c}. \quad (33)$$

В заключение отметим, что результат зависит от используемой модели, однако можно считать, что оценка времени в общем виде имеет вид

$$\tau = A\frac{l}{c}. \quad (34)$$

Где A — безразмерный коэффициент незначительно превышающий 1.