

Условие

Задача 10-1.

Для описания упругих свойств веществ используются различные характеристики, одной из которых является модуль Юнга E . Рассмотрим небольшой брусок в форме параллелепипеда. Пусть перпендикулярно одной из граней с площадью S к бруску приложены две равные по модулю и противоположные по направлению силы $\vec{F}, \vec{F}'$, под действием которых длина бруска увеличилась на малую величину x (при длине в недеформированном состоянии l). В качестве меры возникающих сил упругости используется механическое напряжение σ , равное отношению нормальной силы упругости к площади поперечного сечения S : $\sigma = \frac{F}{S}$, мерой деформации служит относительная деформация $\varepsilon = \frac{x}{l}$. Связь между этими величинами выражается законом Гука

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (1)$$

Важно отметить, что модуль Юнга зависит только от свойств материала, а не от размеров бруска. Модуль Юнга является важной характеристикой вещества, так, например, скорость звука в веществе также зависит от модуля Юнга и определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2)$$

где ρ - плотность вещества.

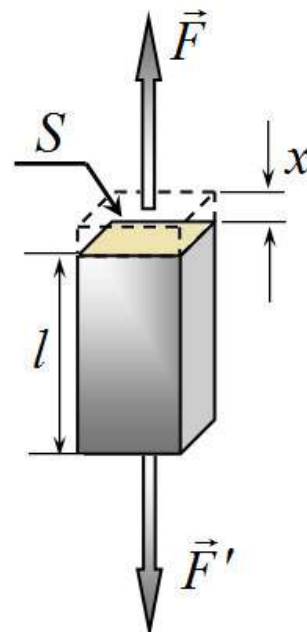
В данной задаче рассматривается тонкий цилиндр длиной l и площадью поперечного сечения S , изготовленный из материала с модулем Юнга E и плотности ρ .

1.1 Модуль Юнга и коэффициент жесткости.

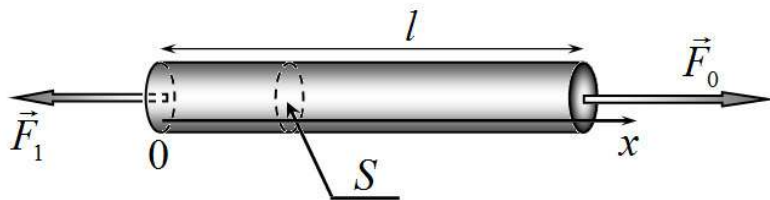
Цилиндр растягивают, прикладывая к нему постоянные силы, направленные вдоль его оси. В 9 классе вы использовали следующую формулу закона Гука для силы упругости

$$F_{\text{упр.}} = kx, \quad (2)$$

где x - удлинение цилиндра, k - коэффициент жесткости. 1.1.1 Выразите коэффициент жесткости цилиндра через его геометрические размеры и модуль Юнга. 1.1.2 Пусть сила упругости растянутого цилиндра равна F_0 . Выразите энергию упругих деформаций цилиндра через его модуль Юнга и относительную деформацию ε . Найдите объемную плотность энергии упругих деформаций.



1.2 Деформации и движение.



К торцам цилиндра прикладывают две силы, направленные вдоль оси цилиндра и равномерно распределенные по его торцам: к правому торцу F_0 , к левому F_1 . Совместим ось Ox с осью цилиндра, а ее начало с левым торцом. В части 1.2 рассмотрите три случая: а) $F_1 = F_0$; б) $F_1 = \frac{1}{2}F_0$; в) $F_1 = 0$.

1.2.1 Постройте графики зависимости относительной деформации ε от координаты x .

1.2.2 Найдите максимальное удлинение стержня.

1.2.2 Найдите максимальную энергию деформации стержня.

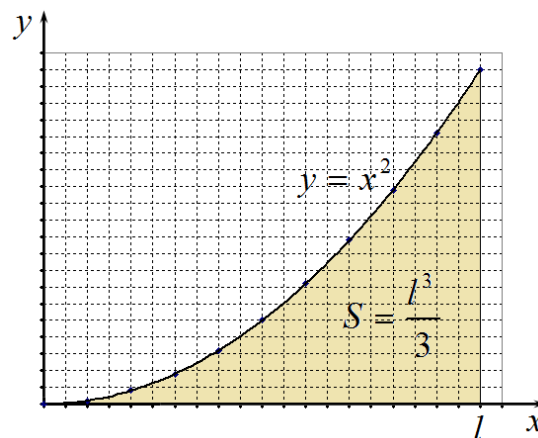
1.3 Разгон и деформации

Найденное Вами распределение деформаций не устанавливается мгновенно, требуется некоторое время, чтобы волна деформаций распространилась по стержню. Пусть к правому торцу стержня в момент времени $t = 0$ прикладывают постоянную силу F_0 , при этом левый конец стержня остается свободным.

1.3.1 Оцените время установления стационарного распределения деформаций, в стержне после начала его движения.

1.3.2 Оцените, через какой промежуток времени кинетическая энергия стержня станет равной энергии ее упругих деформаций.

Самостоятельно предложите простую модель распространения деформаций в стержне в процессе его разгона и воспользуйтесь ею.



Математическая подсказка.

Площадь под параболой $y = x^2$ на участке от 0 до l равна $S = \frac{l^3}{3}$ (это вычислил еще Архимед!)