

силовая платформа

Условие

Задача 9-3 Ходьба человека

Ходьба человека — физиологический процесс перемещения тела в пространстве,

при котором опора на одну ногу циклично сменяется опорой на другую. Одним из способов изучения этого сложного процесса является регистрация силы, действующей на поверхность при передвижении человека. Для этого используется «силовая платформа» - беговая дорожка с датчиками, позволяющими регистрировать результирующую силу давления на поверхность. На рис. 1. представлен график зависимости удельной (отнесенной к весу неподвижного человека) нормальной силы реакции опоры, оказываемой одной ногой идущего человека.

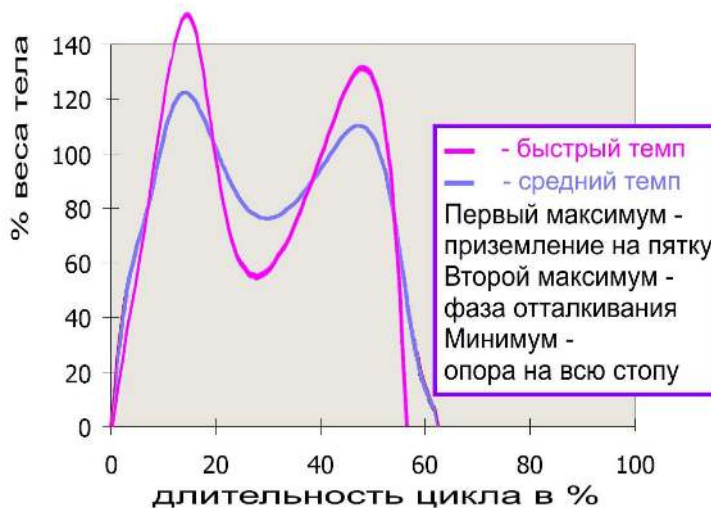
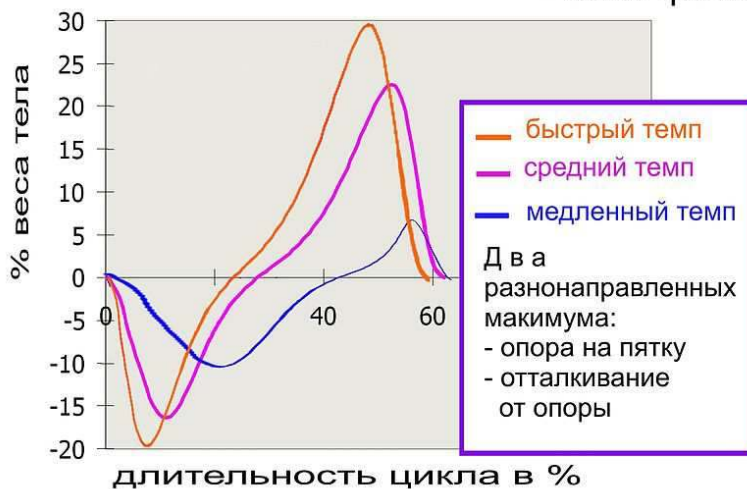


Рис. 1. (Источник – Википедия)

Первый «горб» соответствует интервалу времени, когда человек касается

Передне-задняя составляющая реакции опоры = силе трения



поверхности пяткой, второй максимум — процесс отталкивания носком стопы. Между ними находится минимум, соответствующий полному касанию поверхности стопой. Обратите

внимание, что одна нога касается поверхности в течение 60% цикла. Т. е. существуют промежутки времени, когда человек касается поверхности обеими ногами. На рис. 2. приведена зависимость силы, направленной вдоль поверхности (по направлению движения человека). Эта сила равна силе трения, действующей на стопу человека. Минимум в начале цикла соответствует торможению при касании пяткой. Максимум — отталкиванию носком.

Рис. 2. (Источник – Википедия)

Безусловно, такие графики очень сложно анализировать без помощи вычислительной техники. Поэтому мы предлагаем Вам изучить более простые зависимости, которые позволят количественно проанализировать процесс ходьбы.

Рассмотрите показания датчиков при ходьбе человека со средней скоростью $v_0 = 1,0 \text{ м/с}$, делающего ровно два шага в секунду, т. е. длительность цикла ходьбы составляет ровно 1 секунду.

Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 .

Часть 1. Продольная составляющая силы реакции.

На бланке представлен график зависимости удельной продольной силы реакции опоры (силы трения), действующий на одну ногу человека.

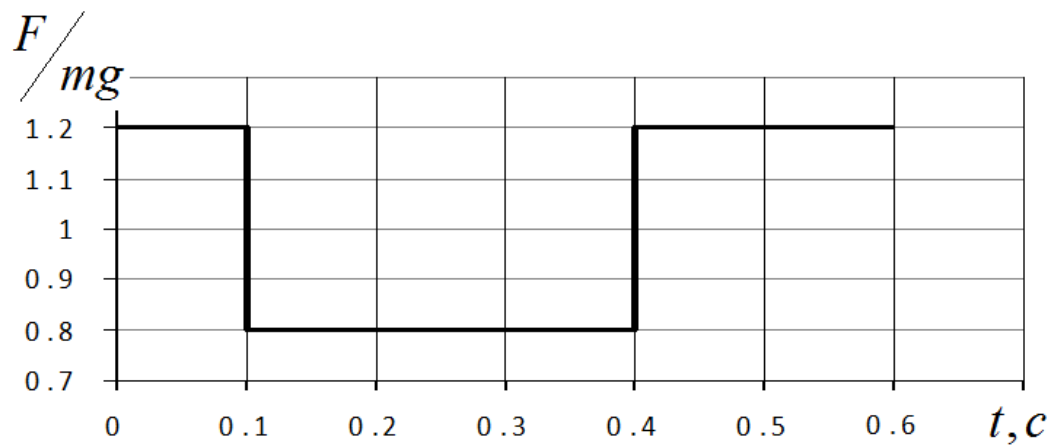
1.1 Учитывая, что некоторое время человек касается опоры двумя ногами, нарисуйте график зависимости горизонтальной составляющей ускорения центра масс человека в течение цикла ходьбы (1 секунда).

1.2 Нарисуйте график зависимости мгновенной горизонтальной скорости движения центра масс человека в течение цикла. Помните, что человек движется со средней скоростью $v_0 = 1,0 \text{ м/с}$, т. е. скорость в конце каждого цикла такая же как и в начале.

1.3 Определите значение горизонтальной скорости в начале цикла ($t = 0 \text{ с}$). Чему равна минимальная и максимальная горизонтальная скорость движения центра масс?

Часть 2. Нормальная составляющая силы реакции.

На бланке представлен график зависимости удельной нормальной силы реакции опоры (силы трения), действующей на одну ногу человека.



2.1 Нарисуйте график зависимости вертикальной составляющей ускорения центра масс человека в течение цикла ходьбы.

2.2 Нарисуйте график зависимости мгновенной вертикальной скорости движения центра масс человека в течение цикла.

2.3 Определите значение вертикальной скорости в начале цикла. Чему равна минимальная и максимальная вертикальная составляющая скорости центра масс человека?

Часть 3. Превращение энергии.

Пусть масса человека равна $m = 80$ кг

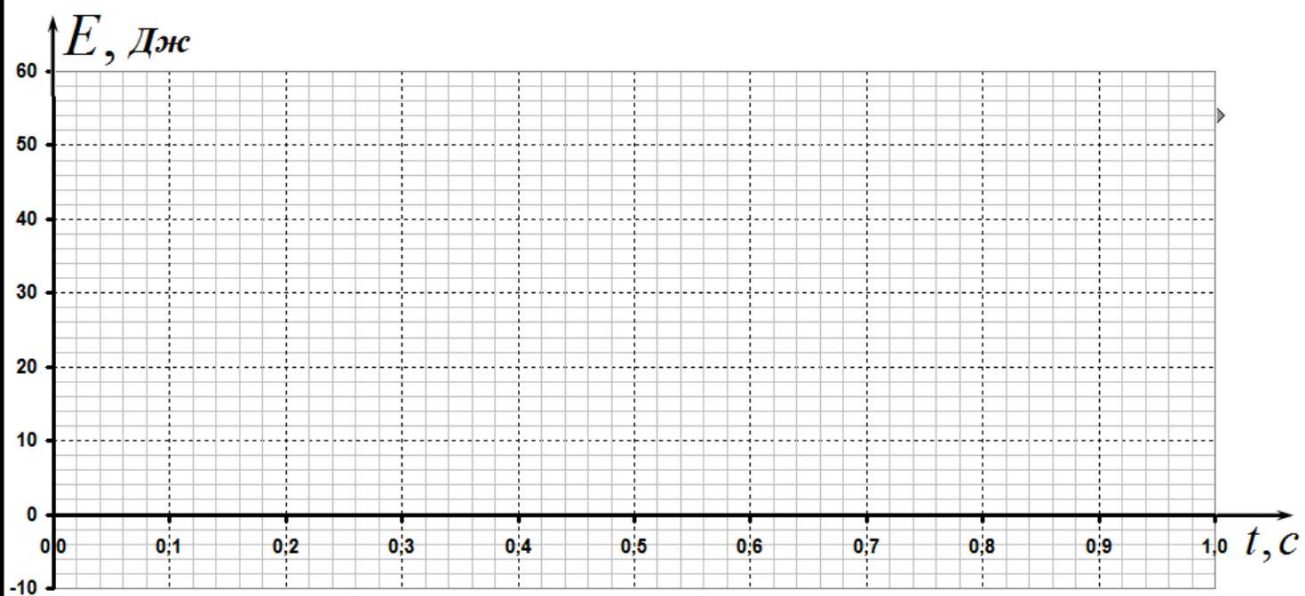
3.1 Постройте приблизительный график зависимости кинетической энергии центра масс человека от времени в течении одного цикла.

3.2 В каких пределах изменяется кинетическая энергия в процессе ходьбы?

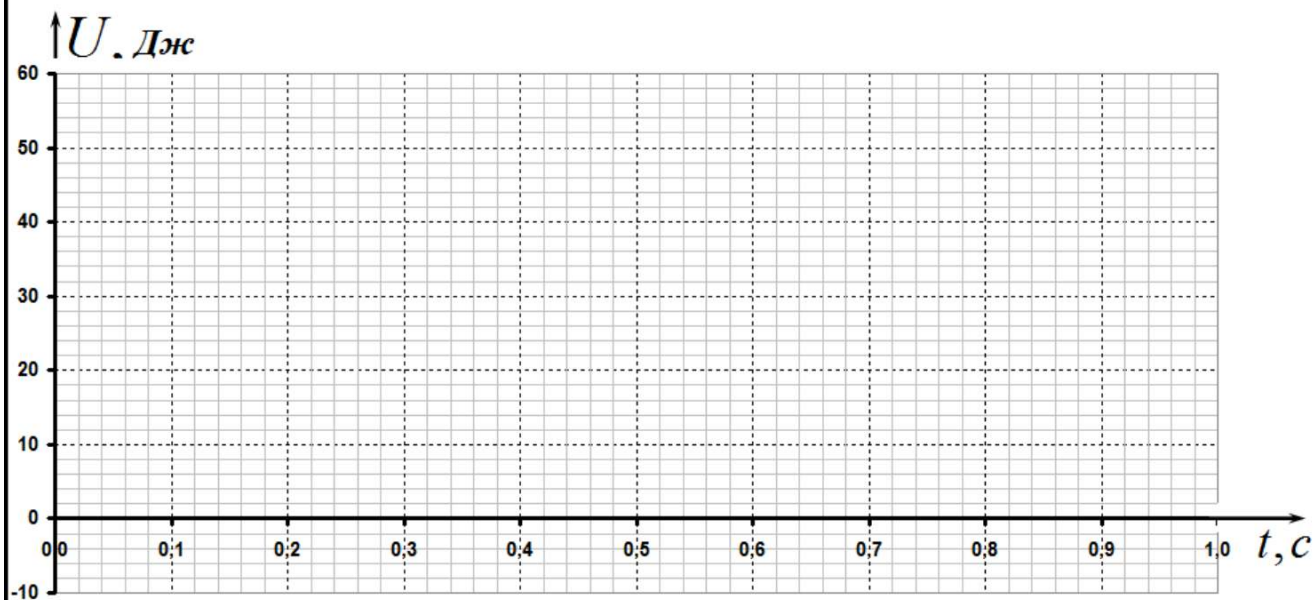
3.3 Постройте приблизительный график потенциальной энергии человека от времени в течение одного цикла. Примите потенциальную энергию в начальный момент равной 0.

3.4 В каких пределах изменяется потенциальная энергия человека в цикле ходьбы?

Зависимость кинетической энергии от времени

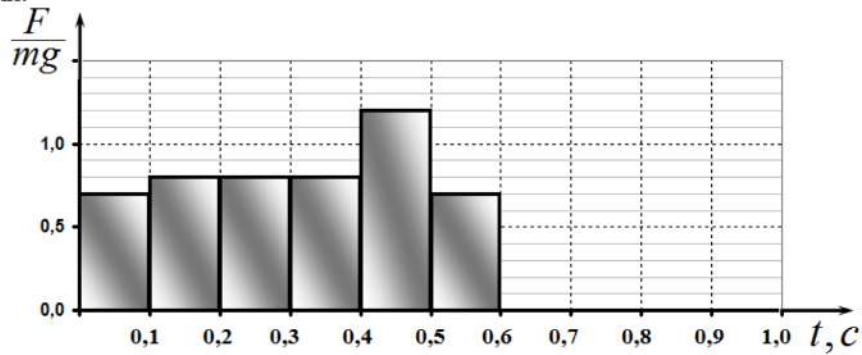


Зависимость потенциальной энергии от времени

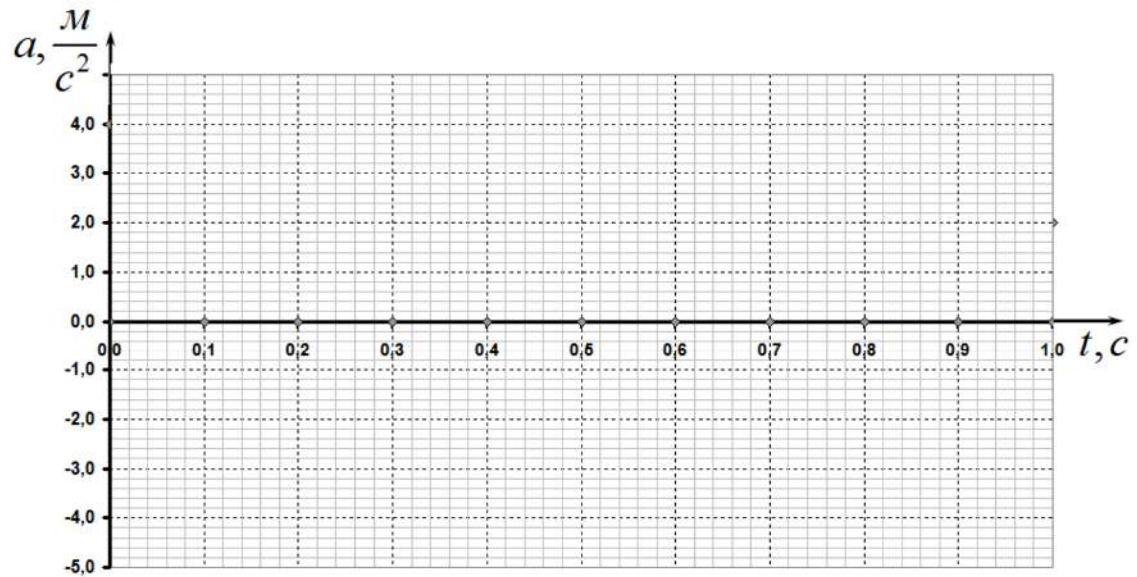


Вертикальное смещение центра масс

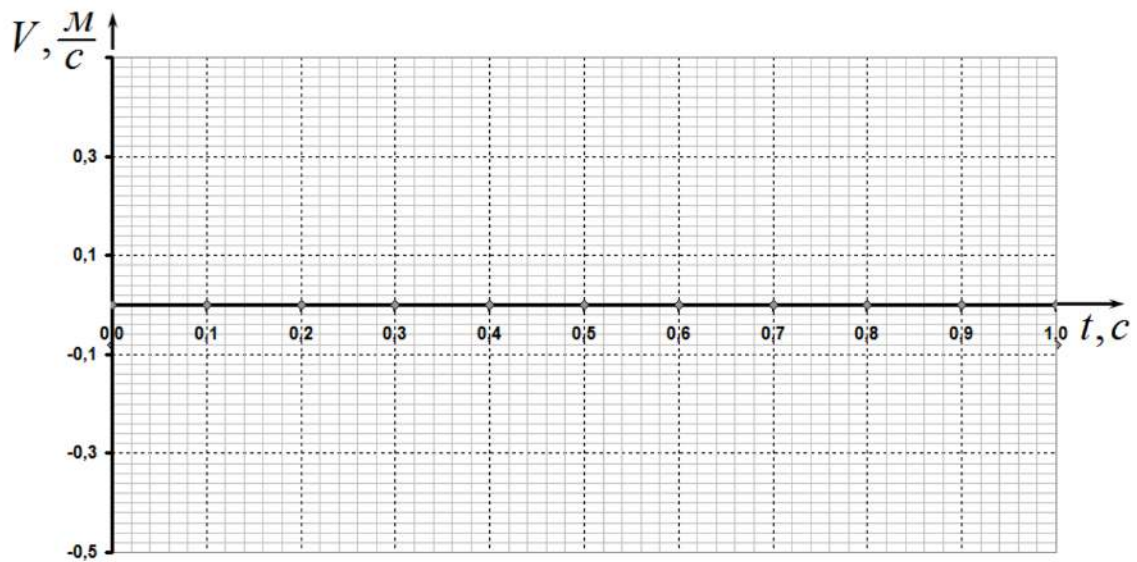
1. Зависимость вертикальной силы, с которой одна нога действует на опору, от времени.



2. Зависимость вертикальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.

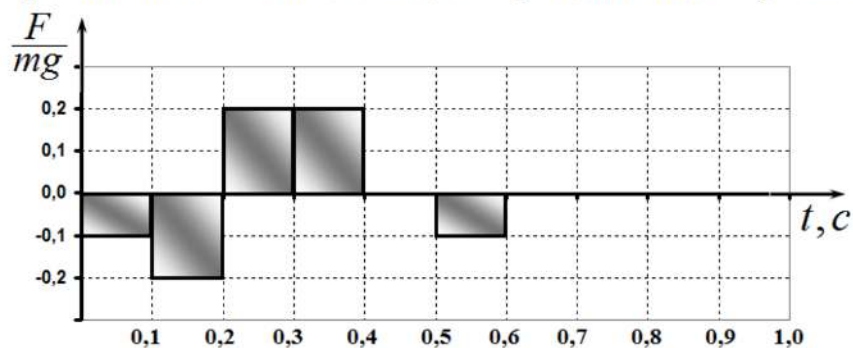


3. Зависимость вертикальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

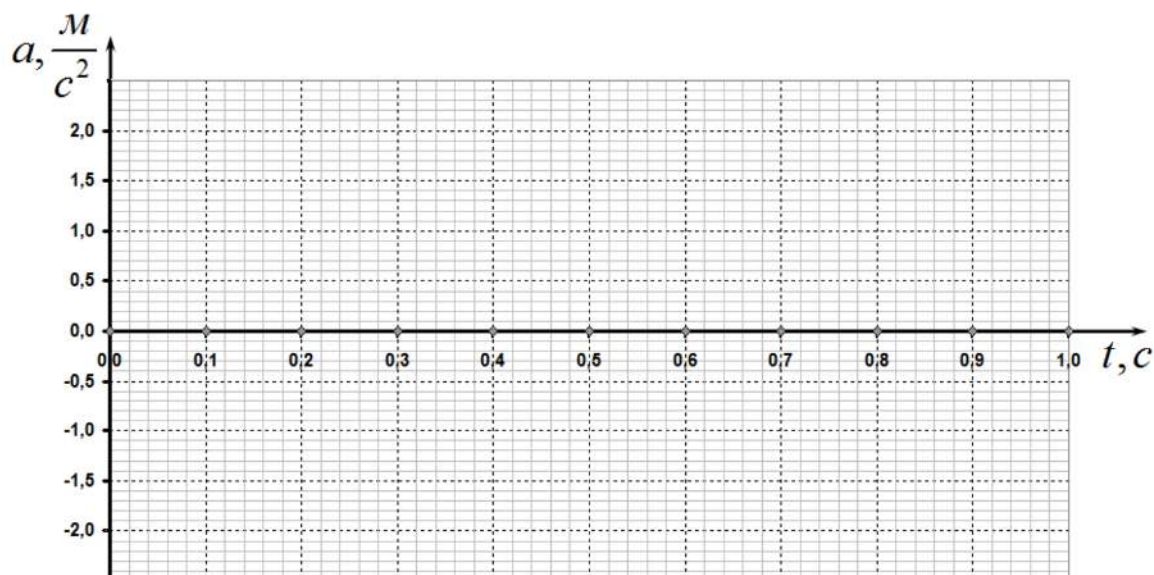


Горизонтальное смещение центра масс

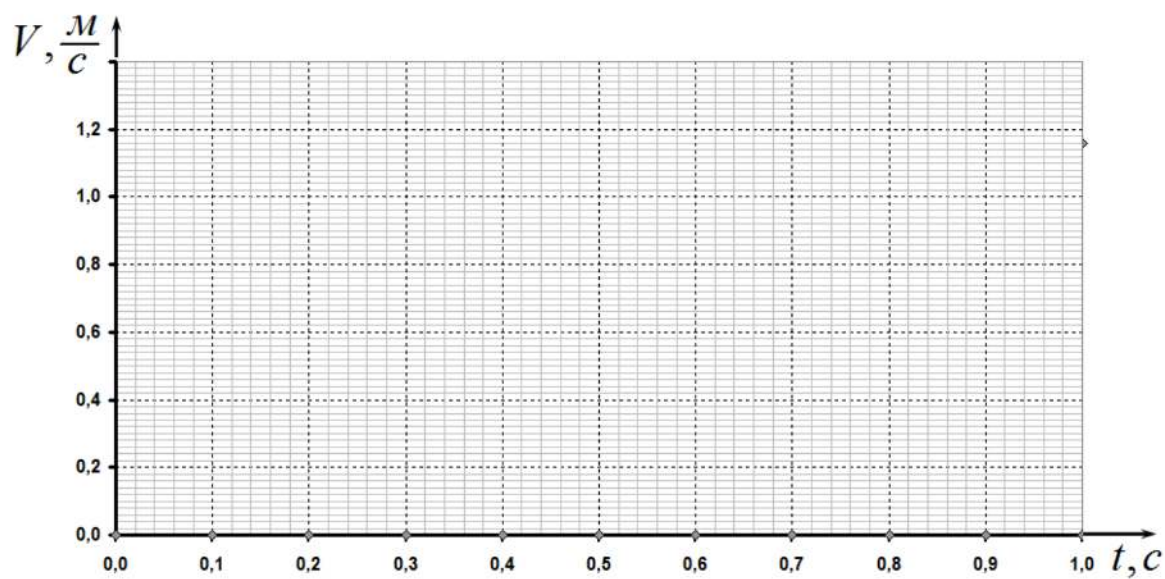
1. Зависимость горизонтальной составляющей силы, с которой одна нога действует на опору, от времени.



2. Зависимость горизонтальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.



3. Зависимость горизонтальной составляющей скорости центра масс человека от времени.



Горизонтальное смещение центра масс

1. Зависимость горизонтальной составляющей силы, с которой одна нога действует на опору, от времени.
2. Зависимость горизонтальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.
3. Зависимость горизонтальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

Вертикальное смещение центра масс

1. Зависимость вертикальной силы, с которой одна нога действует на опору, от времени.
2. Зависимость вертикальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.
3. Зависимость вертикальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

Решение

Задача 9-3 Ходьба человека

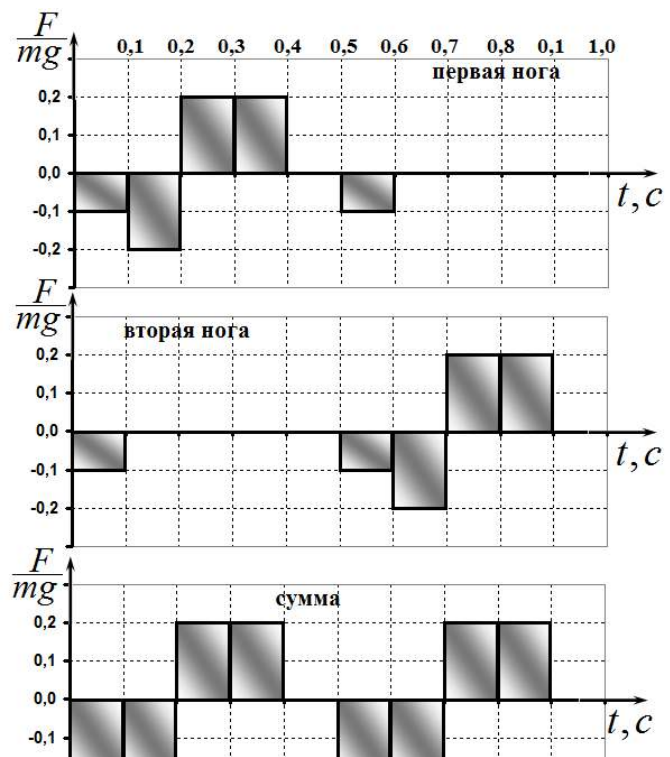
Часть 1. Продольная составляющая силы реакции.

1.1 Так как человек делает два шага в секунду, то касание второй ногой происходит ровно через 0,5 секунды. Значит, на участках от 0,1 до 0,2 секунд и от 0,5 до 0,6 человек касается поверхности обеими ногами. Для расчета горизонтального ускорения необходимо просуммировать силы, действующие на обе ноги. Для наглядности такое суммирование проведено в таблице 1 и на графиках.

Таблица 1. Суммарная горизонтальная сила.

Интервал (с)	$\frac{F_1}{mg}$ (1 нога)	$\frac{F_2}{mg}$ (2 нога)	$\frac{F_{\Sigma}}{mg}$ (сумма)
0,0-0,1	-0,1	-0,1	-0,2
0,1-0,2	-0,2	0	-0,2
0,2-0,3	0,2	0	0,2
0,3-0,4	0,2	0	0,2
0,4-0,5	0	0	0
0,5-0,6	-0,1	-0,1	-0,2
0,6-0,7	0	-0,2	-0,2
0,7-0,8	0	0,2	0,2
0,8-0,9	0	0,2	0,2
0,9-1,0	0	0	0

На каждом временном промежутке в 0,1 с суммарная сила постоянна, поэтому ускорение центра масс человека также постоянно. Оно рассчитывается по 2 закону Ньютона:



$$a = \frac{F_{\Sigma}}{m}. \quad (1)$$

График зависимости горизонтального ускорения от времени показан на рис. 2.

Рис. 2 Зависимость горизонтальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.

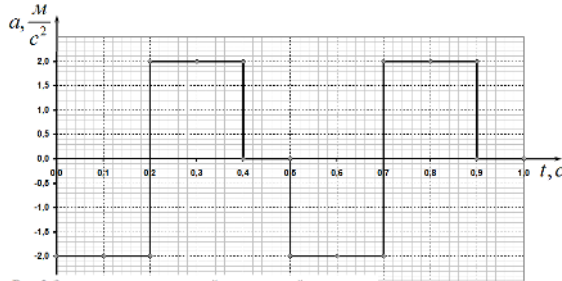


Рис. 2 Зависимость горизонтальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.

Для расчета зависимости скорости от времени необходимо знать начальную скорость. Но нам известна только средняя скорость $v_{\text{ср}}$ за один шаг. График зависимости ускорения от времени позволяет легко рассчитать зависимость изменения скорости $\Delta v = v_i - v_0$, где v_i - скорость в конце i -го интервала времени. Суммарное смещение центра масс за один шаг можно по формуле

$$S = \sum_i (v_0 + (\Delta v_i)_{\text{ср}} \Delta t) = v_0 T + \sum_i (\Delta v_i)_{\text{ср}} \Delta t, \quad (2)$$

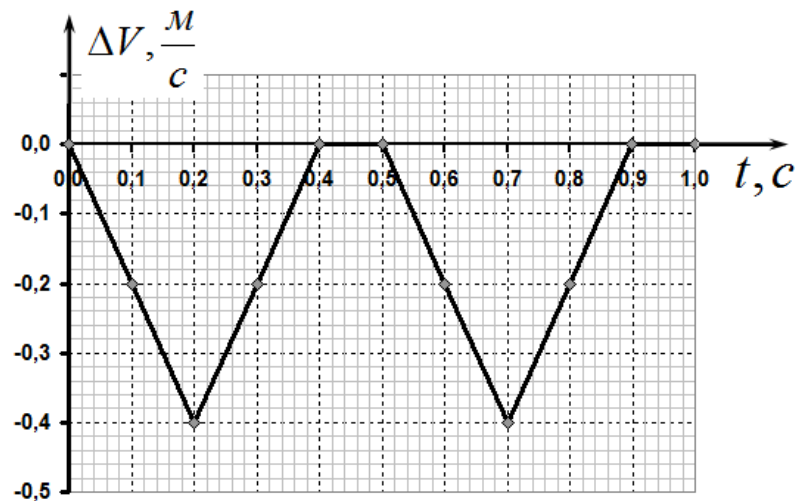
где $(\Delta v_i)_{\text{ср}}$ - средняя скорость на i -том интервале. Теперь среднюю скорость за полный шаг можно выразить как

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S}{T} = v_0 + \frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{\text{ср}} \Delta t. \quad (3)$$

Это соотношение позволяет найти начальную скорость v_0 . Результаты расчетов приведены в Таблице 2. На рисунке 3 построен график зависимости величины Δv от времени.

Таблица 2. Расчет зависимости горизонтальной скорости от времени.

t, c	$a, \frac{M}{c^2}$	$\Delta v, \frac{M}{c}$	$v, \frac{M}{c}$
0	4	0	-0,08
0,1	4	0,4	0,32
0,2	-2	0,2	0,12
0,3	-2	0	-0,08
0,4	-2	-0,2	-0,28
0,5	2	0	-0,08
0,6	4	0,4	0,32
0,7	-2	0,2	0,12
0,8	-2	0	-0,08
0,9	-2	-0,2	-0,28
1	2	0	-0,08



Очевидно, что сумма в выражении (2) численно равна площади под графиком зависимости $\Delta v(t)$. Эта площадь подсчитывается элементарно:

$$\sum_i (\Delta v_i)_{\text{ср}} \Delta t = -2 \cdot \frac{1}{2} 0,4 \cdot 0,4 = -0,16 \text{ м.}$$

Теперь из соотношения (3) определяем начальную скорость

$$v_0 = v_{\text{ср.}} - \frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{\text{ср}} \Delta t = 1,16 \frac{M}{c} \quad (4)$$

Эту скорость следует прибавить к значениям величин $\Delta v(t)$, в результате чего, получим искомую зависимость $v(t)$. График этой зависимости показан на рис. 4.

$V, \frac{M}{c}$

Рис. 4 Зависимость горизонтальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

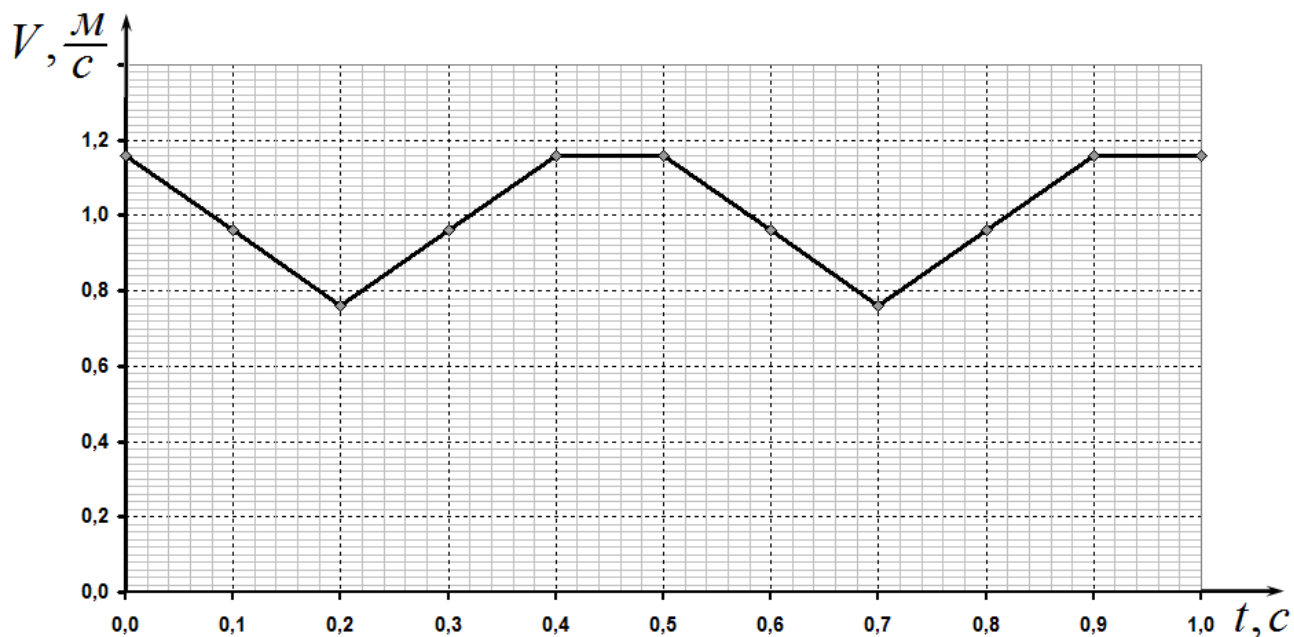


Рис. 4 Зависимость горизонтальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

Часть 2. Нормальная составляющая силы реакции.

Расчет зависимости вертикальной скорости центра масс от времени проводится полностью аналогично.

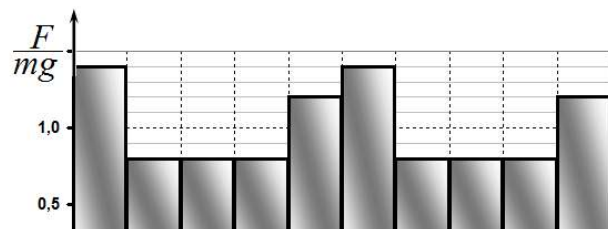
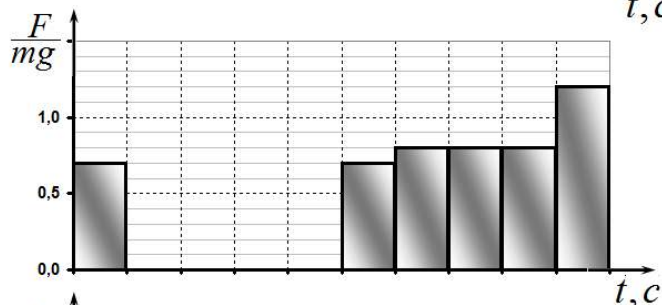
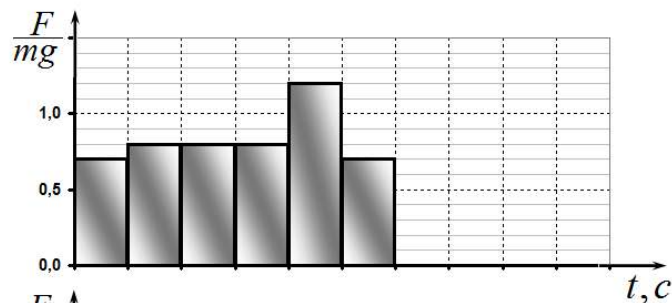
В Таблице 3 и на рисунках показана зависимость вертикальной составляющей силы от времени (с учетом суммирования в тех интервалах, где обе ноги находятся на земле).

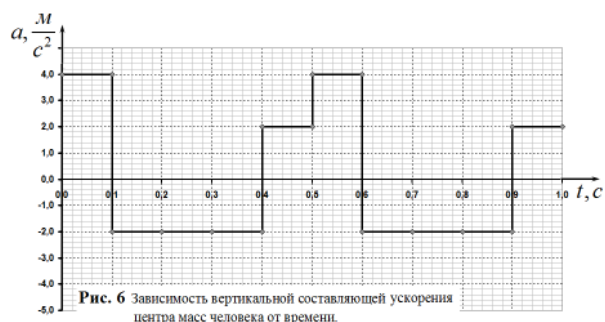
Таблица 3. Суммарная вертикальная сила.

Интервал (с)	$\frac{F_1}{mg}$ (1 нога)	$\frac{F_2}{mg}$ (2 нога)	$\frac{F_{\Sigma}}{mg}$ (сумма)
0,0-0,1	0,7	0,7	1,4
0,1-0,2	0,8	0	0,8
0,2-0,3	0,8	0	0,8
0,3-0,4	0,8	0	0,8
0,4-0,5	1,2	0	1,2
0,5-0,6	0,7	0,7	1,4
0,6-0,7	0	0,8	0,8
0,7-0,8	0	0,8	0,8
0,8-0,9	0	0,8	0,8
0,9-1,0	0	1,2	1,2

Вертикальное ускорение центра масс рассчитывается по формуле

$$a = \left(\frac{F_{\Sigma}}{mg} - 1 \right) g \quad (5)$$

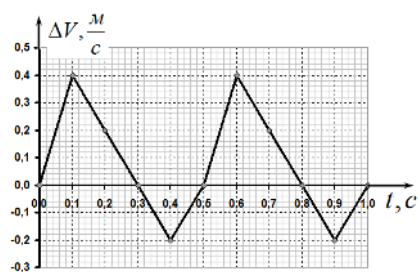




В Таблице 4 показаны результаты расчета изменения вертикальной скорости от времени, а на рис. 7 зависимость величины Δv от времени.

Таблица 4. Расчет зависимости горизонтальной скорости от времени.

t, c	$a, \frac{M}{c^2}$	$\Delta v, \frac{M}{c}$	$v, \frac{M}{c}$
0	4	0	-0,08
0,1	4	0,4	0,32
0,2	-2	0,2	0,12
0,3	-2	0	-0,08
0,4	-2	-0,2	-0,28
0,5	2	0	-0,08
0,6	4	0,4	0,32
0,7	-2	0,2	0,12
0,8	-2	0	-0,08
0,9	-2	-0,2	-0,28
1	2	0	-0,08



Расчет площади под графиком зависимости $\Delta v(t)$ приводит к результату

$$\sum_i (\Delta v_i)_{\text{cp}} \Delta t = 2 \left(\frac{1}{2} 0,4 \cdot 0,3 - \frac{1}{2} 0,2 \cdot 0,2 \right) = 0,08 \text{ м.}$$

Теперь из соотношения (3) определяем начальную скорость (с учетом, того, что средняя вертикальная скорость равна нулю):

$$v_0 = -\frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{\text{ср}} \Delta t = -0,08 \frac{M}{c} \quad (4)$$

Эту скорость следует прибавить к значениям величин $\Delta v(t)$, в результате чего, получим искомую зависимость $v(t)$. График этой зависимости показан на рис. 8.



Часть 3. Превращение энергии.

Кинетическая энергия тела равна

$$E_k = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2). \quad (5)$$

Используя данные расчетов скоростей, можно рассчитать кинетическую энергию тела в «узловых точках». Результаты этих расчетов приведены в Таблице 5. График полученной зависимости показан на рис. 9.

Таблица 5. Расчет зависимости кинетической энергии от времени.

t, c	$v_x, \frac{m}{c}$	$v_y, \frac{m}{c}$	$E_k, Дж$
0	1,16	-0,08	54,08
0,1	0,96	0,32	40,96
0,2	0,76	0,12	23,68
0,3	0,96	-0,08	37,12
0,4	1,16	-0,28	56,96
0,5	1,16	-0,08	54,08
0,6	0,96	0,32	40,96
0,7	0,76	0,12	23,68
0,8	0,96	-0,08	37,12
0,9	1,16	-0,28	56,96
1	1,16	-0,08	54,08

Для расчета потенциальной энергии ($U = mgh$) необходимо построить график зависимости вертикальной координаты от времени. Так как на всех временных интервалах ускорение постоянно, то соответствующей зависимости будет состоять из отрезков парабол. Значения вертикальной координаты в «узловых точках» рассчитывается традиционным образом, как площадь под графиком зависимости $v(t)$. Результаты расчетов представлены в Таблице 6, график показан на рисунке 10.

Таблица 6. Расчет зависимости потенциальной энергии от времени.

t, c	$v_y, \frac{m}{c}$	$h, м$	$U, Дж$
0	-0,08	0	0
0,1	0,32	0,012	9,6
0,2	0,12	0,034	27,2
0,3	-0,08	0,036	28,8
0,4	-0,28	0,018	14,4
0,5	-0,08	0	0
0,6	0,32	0,012	9,6
0,7	0,12	0,034	27,2
0,8	-0,08	0,036	28,8
0,9	-0,28	0,018	14,4
1	-0,08	0	0

Рис. 9 Зависимость кинетической энергии от времени

Рис. 10 Зависимость потенциальной энергии от времени

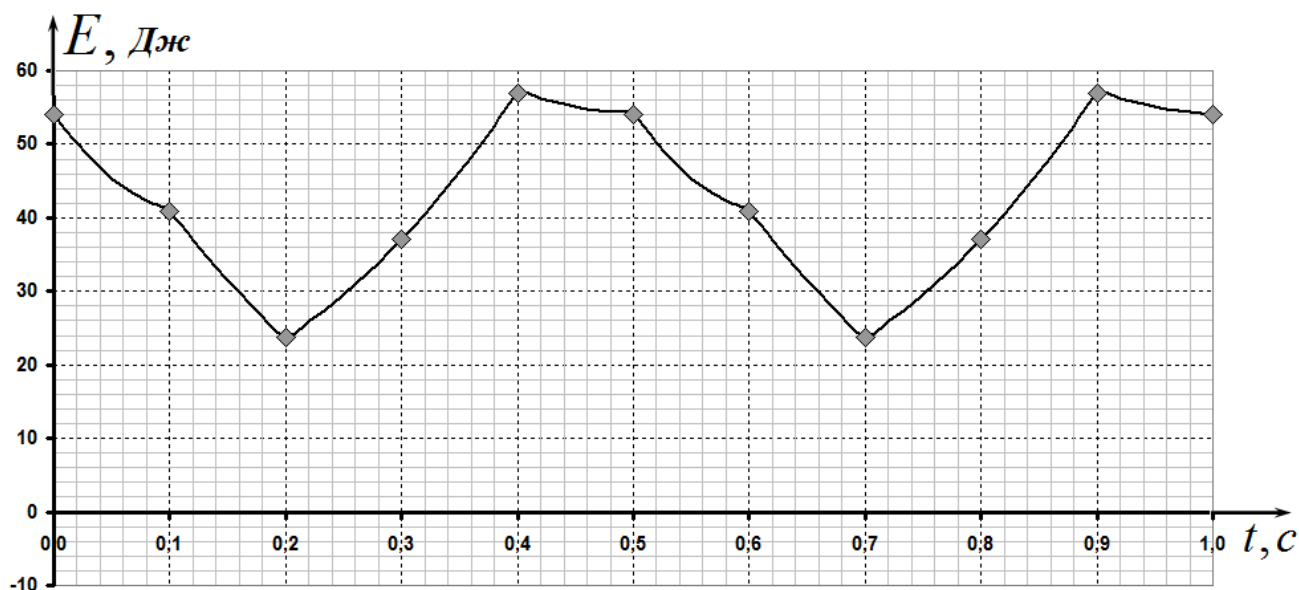


Рис. 9 Зависимость кинетической энергии от времени

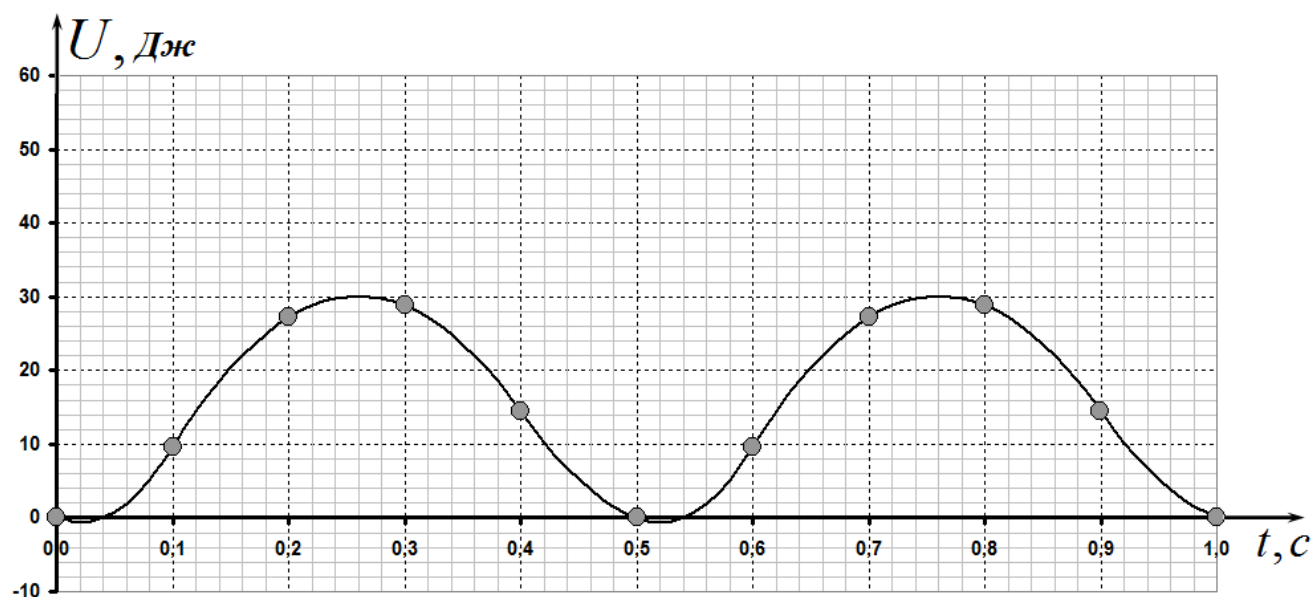
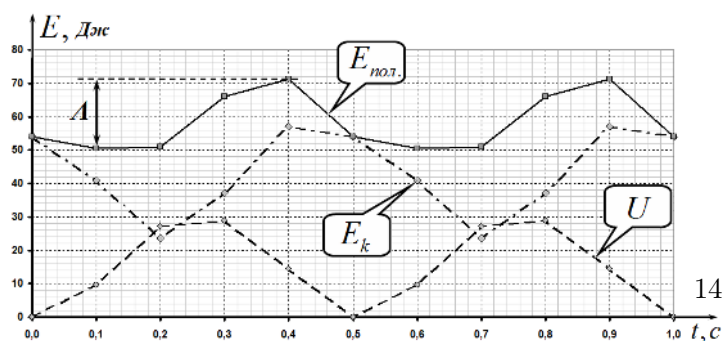


Рис. 10 Зависимость потенциальной энергии от времени

Кинетическая энергия изменяется в пределах примерно от 24 Дж до 57 Дж, то есть, на 33 Дж. Потенциальная энергия изменяет от 0 до 29 Дж. Диапазоны изменения кинетической и потенциальной энергии примерно совпадают.

Дополнение (в решении не требуется). Интересно оценить, какую мощность развивает человек при ходьбе. Для этого построим график зависимости полной энергии человека от времени. Человек совершает работу на тех интервалах, когда полная энергия растет. При убыли



полной энергии эта энергия человеку не возвращается. На рисунке отмечен такой участок.

Простой расчет показывает, что средняя мощность, развиваемая человеком при ходьбе, примерно равна 30 Вт.