

Условие

Задача 11-3 Принцип Гюйгенса, конус Маха, эффект Доплера, излучение Вавилова-Черенкова... и т.д.

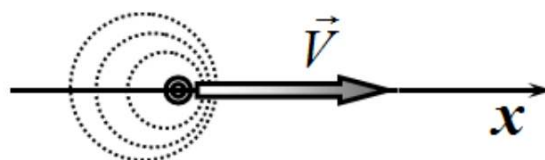
В данной задаче Вам необходимо рассмотреть и правильно описать ряд эффектов, связанных с испусканием волн движущимся источником.

Части 1,2,3 связаны между собой, поэтому приведенные данные используются во всех этих частях.

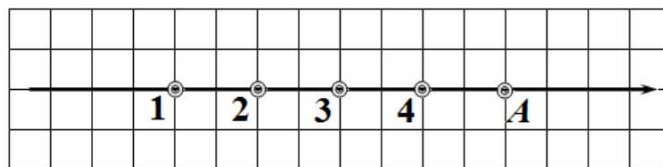
1. Принцип Гюйгенса.

Точечный источник, непрерывно испускающий звуковую волну с частотой ν_0 , движется равномерно и прямолинейно вдоль оси Ox в воздухе. Скорость звука в воздухе равна c .

Ис-
точ-
ник
дви-
жется



1.1 Постройте (на отдельном бланке) фронты волн, испущенных источником в точках 1, 2, 3, 4, в момент времени, когда источник находится в точке A. Построение выполните для двух случаев

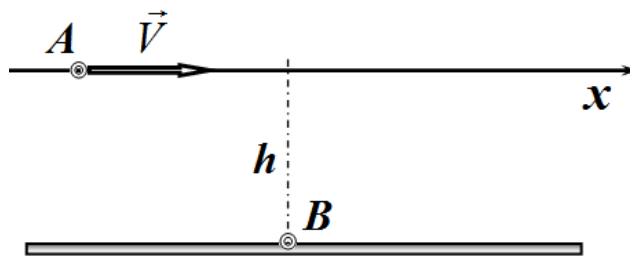


а) скорость источника $V_0 = \frac{c}{2}$; б) скорость источника $V_0 = 2c$.

2. Конус Маха.

Покажите, что при сверхзвуковой скорости источника ($V_0 > c$) за источником распространяется ударная волна, имеющая форму конуса, который называется конусом Э. Маха

Для этого рассмотрите следующую задачу. Пусть источник (самолет) A движется прямолинейно и равномерно с постоянной скоростью $\vec{V}$ на постоянной высоте h . Неподвижный наблюдатель (или слушатель) B находится на поверхности Земли. Введем ось Ox , направленную вдоль траектории источника. Начало отсчета этой оси выберем над наблюдателем. Будем считать, что в момент времени $t = 0$ источник находится в точке $x = 0$. **2.1** В какой момент времени t , когда до наблюдателя дойдет звук, испущенный источником в момент времени τ ? Постройте схематические графики зависимости $t(\tau)$ для двух случаев (не забудьте рассмотреть отрицательные значения τ - самое интересное и важное именно в этой области!*):



а) скорость источника $V_0 = \frac{c}{2}$; б) скорость источника $V_0 = 2c$.

2.2 Кратко опишите, что будет слышать наблюдатель в течение длительного промежутка времени в случае, когда $V_0 = 2c$. В какой момент времени наблюдатель впервые услышит звук от источника? Где в этот момент будет находиться источник?

2.3 Как построенные графики доказывают возникновение ударной волны при $V_0 = 2c$ и ее отсутствие при $V_0 = \frac{c}{2}$?

2.4 Пусть скорость источника $V > c$, найдите угол полураствора конуса ударной волны. Зависит ли этот угол от частоты волны, испускаемой источником.

3. Эффект Доплера.

Пусть источник звука, непрерывно испускающий звуковую волну с частотой ν_0 , движется равномерно и прямолинейно вдоль оси Ox в воздухе, со скоростью V меньшей скорости звука c .

3.1 С какой частотой будет слышать этот звук неподвижный наблюдатель, находящийся на оси Ox а) впереди источника; б) позади источника?

3.2 Рассмотрите ситуацию описанную в части 2 и на соответствующем рисунке. Опишите процедуру (осуществлять ее не надо – достаточно громоздко!), которая на основании полученных ранее соотношений, дает возможность найти зависимость частоты звука ν , воспринимаемого наблюдателем B от времени. Нарисуйте схематический график этой зависимости (хотя бы по трем точкам).

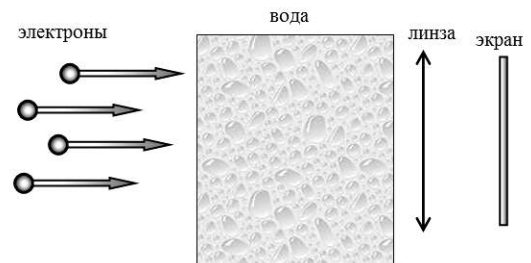
Часть 4 не связана с предыдущими частями.

4. Излучение Вавилова-Черенкова.

Если заряженная частица (например электрон) движется в прозрачной среде со скоростью, большей чем скорость света в этой среде, то она излучает свет (этот эффект называется эффектом Вавилова-Черенкова). За этой частицей возникает световой конус подобный конуса Маха ударной световой волны.

Теперь задача (*допускается проведение промежуточных численных расчетов*).

Широкий пучок ультрарелятивистских (т.е. движущихся со скоростями близкими к скорости света в вакууме $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$) электронов попадает в слой воды. Считайте, что скорости всех электронов одинаковы и все они движутся параллельно друг другу. За слоем воды находится собирающая линза в фокальной плоскости которой расположен экран.



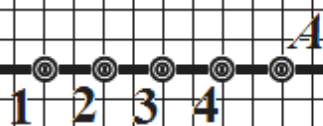
4.1. При какой минимальной полной энергии электронов $E_{\min}$ начнется излучение Вавилова-Черенкова? Ответ дайте в электрон-вольтах.

4.2 Какую ускоряющую разность потенциалов должны пройти электроны, чтобы достичь полной энергии равной $E_{\min}$.

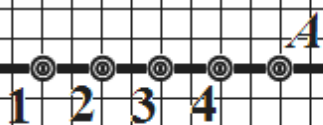
Показатель преломления воды $n = 1,33$. Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4.3 Пусть все электроны имеют полную энергию равную $2E_{\min}$. Опишите световую картину (форму и размеры), которая будет наблюдаться на экране. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см

$$V = \frac{c}{2}$$



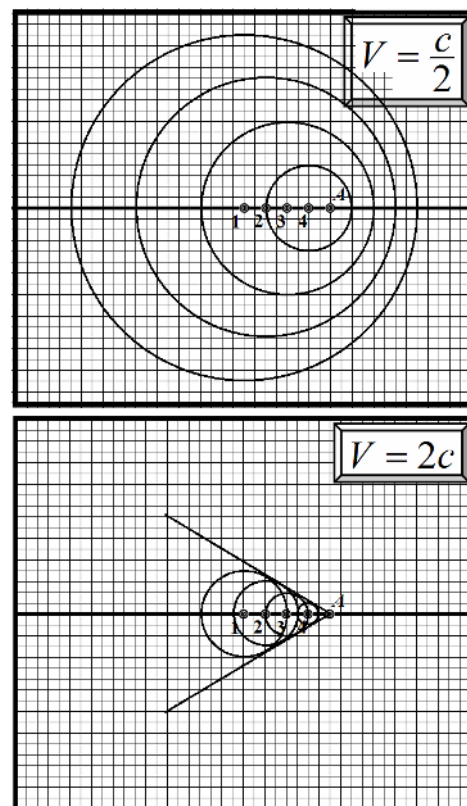
$$V = 2c$$



Бланк задачи 11-3

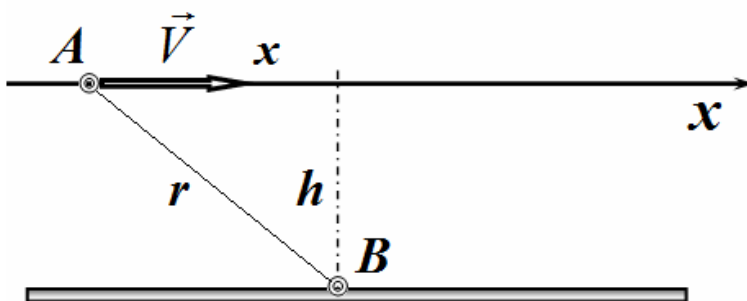
Решение

Задача 11-3 Принцип Гюйгенса, конус Маха, эффект Доплера, излучение Вавилова-Черенкова... и т.д.



1. Принцип Гюйгенса. Требуемое построение, показано на рисунке. Следует отметить, что во втором случае $V_0 = 2c$ появляется огибающая, которая и является фронтом ударной волны.

2. Конус Маха.



В момент времени τ источник находился в точке с координатой $x = V\tau$, на расстоянии

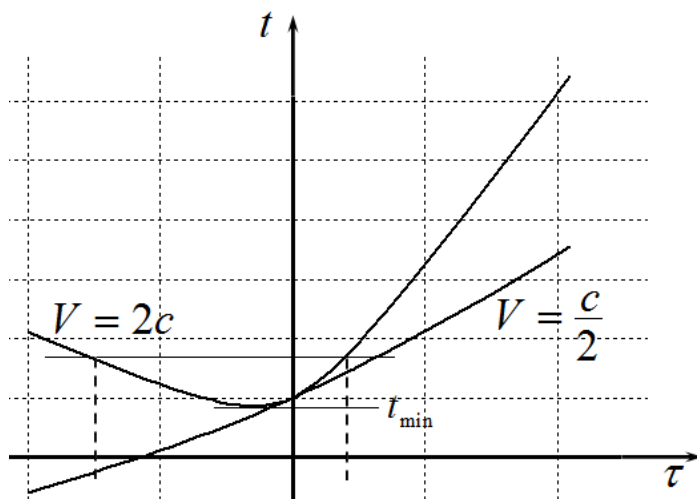
$$r = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{V^2\tau^2 + h^2} \quad (1)$$

Звук «запоздает» на время, за которое от пройдет это расстояние, Следовательно, дойдет до наблюдателя в момент времени

$$t = \tau + \frac{\sqrt{V^2\tau^2 + h^2}}{c}. \quad (2)$$

Для построения примерного графика этой функции можно отметить его следующие характерные особенности:

при $\tau = 0$ $t = \frac{h}{c}$, что соответствует времени, которое необходимо, чтобы звук прошел расстояние h ; при $\tau \rightarrow +\infty$ $t \approx \tau + \frac{V}{c}\tau$, то есть график имеет асимптоту; при $\tau \rightarrow -\infty$ $t \approx \tau - \frac{V}{c}\tau$ (надо правильно извлекать корень!) – вторая асимптота. И вот здесь кроется самое интересное: при $V > c$ коэффициент наклона второй асимптоты становится отрицательным, следовательно, в этом случае функция (2) имеет точку минимума. Поэтому графики данной зависимости имеют вид, показанный на рисунке. Не сложно найти положение этого минимума: вычисляя производную от функции (2) и полагая ее равной нулю, получим уравнение



$$t' = 1 + \frac{V^2\tau}{c\sqrt{V^2\tau^2 + h^2}} = 0 \quad (3)$$

Это уравнение имеет единственный корень при $V > c$:

$$\tau^* = -\frac{h}{V\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}}. \quad (4)$$

Поэтому наблюдатель впервые услышит звук в момент времени

$$t_{\min} = t(\tau^*) = \frac{h}{cV}\sqrt{V^2 - c^2}. \quad (5)$$

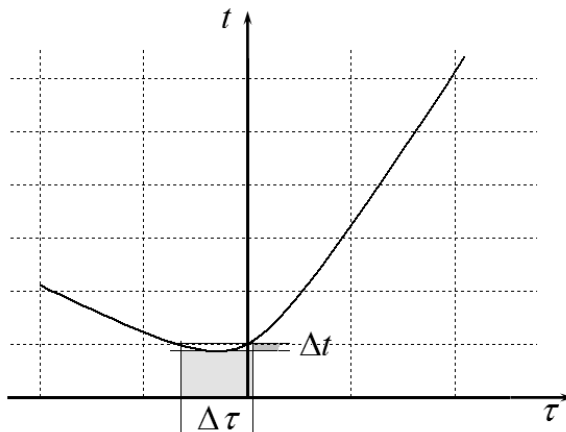
Источник в этот момент времени будет находиться в точке с координатой

$$x_1 = Vt_{\min} = h\sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}. \quad (6)$$

В более поздние моменты времени наблюдатель будет одновременно слышать звуки, идущие от разных источников, движущихся в противоположных направлениях.

Именно наличие экстремума свидетельствует о возникновении ударной волны. Потому, что в течение малого промежутка времени Δt практически одновременно будут приходить волны, испущенные в течение гораздо более длительного промежутка $\Delta \tau$.

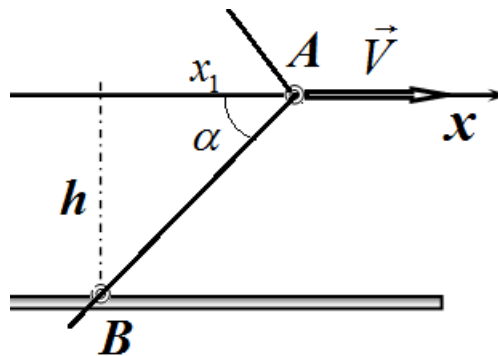
Формально можно поступить следующим образом. Пусть мощность источника равна P . В течение бесконечно малого промежутка времени $d\tau$ он испустит энергию $dE_0 = Pd\tau$. Какая-то ее часть $dE_1 = \beta Pd\tau$ (она определяется геометрией расположения источника и наблюдателя и размером ушей последнего) будет принята в течение промежутка времени dt , поэтому воспринимаемая мощность определяется по формуле



$$P_1 = \frac{dE_1}{dt} = \beta P \frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta P}{t'} . \quad (7)$$

В точке экстремума эта мощность устремляется к бесконечности, что свидетельствует о наличии ударной волны.

Угол полураствора конуса Маха можно найти либо из построения Гюйгенса, либо из формулы (6), в любом случае он определяется соотношением



$$\sin \alpha = \frac{c}{V} . \quad (8)$$

3. Эффект Доплера.

Формулы для эффекта Доплера можно получить различными способами. В данном случае простейшим из них является способ, основанный на использовании полученной зависимости (2).

Если считать период волны, испускаемой источником малой величиной ($T_0 = \Delta \tau$), то воспринимаемый период также можно считать малой величиной² ($T_1 = \Delta t$). Их отношение можно найти, как производную от функции (2)

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = t' . \quad (9)$$

Эту производную мы уже вычисляли, поэтому сразу запишем:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \tau}{c\sqrt{V^2 \tau^2 + h^2}}}. \quad (10)$$

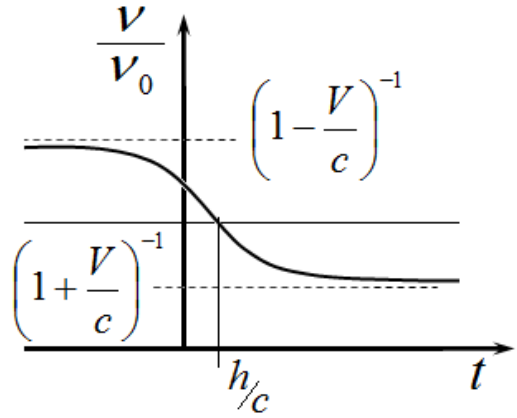
Для получения окончательного результата необходимо выразить τ через t , то есть решить уравнение (2) относительно τ .

Если наблюдатель находится на оси, вдоль которой движется источник, то воспринимаемую частоту можно найти из формулы (10), если положить $h = 0$. В этом случае получим

$$\nu_{\pm} = \frac{\nu_0}{1 \pm \frac{V}{c}}. \quad (11)$$

Знак плюс соответствует наблюдателю находящемуся позади источника (источник удаляется), так как в этом случае в формуле (10) $\tau > 0$. Знак минус – случаю, когда источник приближается к наблюдателю³.

Для наблюдателя, находящегося сбоку от линии движения источника, частота будет монотонно изменяться от ν_- до ν_+ . Для звука, испущенного в момент времени $\tau = 0$ и пришедшего в момент времени $t = \frac{h}{c}$, частота останется неизменной.



4. Излучение Вавилова-Черенкова.

4.1 Излучение начнется, если скорость электронов превысит скорость света в воде, то есть при $v = \frac{c}{n}$. В этом случае полная энергия электрона будет равна

$$E_{\min} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}, \quad (12)$$

² Очень интересный вопрос – а что такое частота в данный момент времени? чтобы говорить о частоте, надо зарегистрировать хотя бы одно колебание! Но в физике есть понятие физически малая величина: мала настолько, что можно считать дифференциалом, но велика настолько, что содержит большое число... в данном случае периодов колебаний.

³ Надо правильно извлекать корень квадратный!

где $E_0 = mc^2$ - энергия покоя электрона. Ее численное значение (в эВ) равно

$$E_0 = \frac{mc^2}{e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 512 \text{ кэВ}. \quad (13)$$

Минимальная энергия равна

$$E_{\text{мин}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{512 \text{ кэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,33^2}}} = 777 \text{ кэВ}, \quad (14)$$

4.2 При ускорении электрон должен пройти ускоряющую разность потенциалов, которая находится из условия (записано в эВ)

$$U = E_{\text{мин}} - E_0 = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} - 1 \right) = 2,65 \cdot 10^5 \text{ В}. \quad (15)$$

4.3 Так как за каждым электроном «тянется» световой конус, то при попадании его на линзу, в ее фокальной плоскости образуется кольцо, радиус которого углом полуоткрытия конуса (не забыть учесть преломление на задней грани сосуда с водой!), а этот угол определяется скоростью электронов. Скорость электронов найдем из формулы

$$2E_{\text{мин}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \Rightarrow v = \frac{c}{2n} \sqrt{3n^2 + 1}. \quad (16)$$

В соответствии с полученным ранее результатом, угол полуоткрытия светового конуса определяется условием

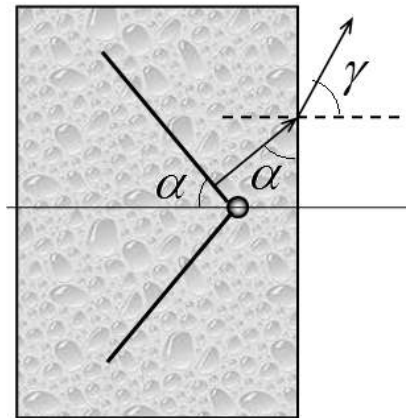
$$\sin \alpha = \frac{c}{nv} = \frac{2}{\sqrt{3n^2 + 1}} = 0,796. \quad (17)$$

Для дальнейших расчетов удобно перейти от волнового фронта к лучам, которые перпендикулярны фронту. Как следует из рисунка, закон преломления на задней стенке имеет вид:

$$n \cos \alpha = \sin \gamma \quad (18)$$

Из этого выражение определяем угол γ (именно под этим углом к оптической оси лучи будут попадать на линзу): $\gamma = 53,6^\circ$
Теперь находим радиус кольца на экране:

$$R = F \operatorname{tg} \gamma \approx 14 \text{ см}. \quad (19)$$



² – ? , Очень интересный вопрос что такое частота в данный момент времени чтобы говорить частоту надо зарегистрировать хотя бы одно колебание! Но в физике есть понятие физически малая величина: мала настолько, что можно считать дифференциалом, но велика настолько, что содержит большое число... в данном случае периодов колебаний. ³ ! Надо правильно извлекать корень квадратный