

-3 Праца

Условие

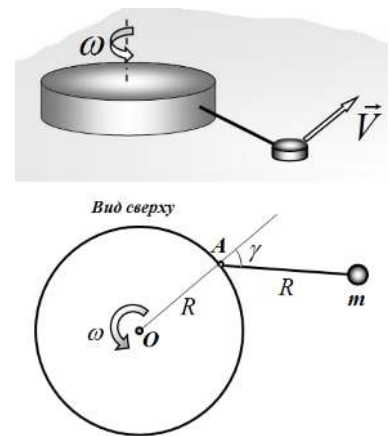
Задача 9-3 Праца.

С помощью пращи Давид победил Голиафа! А вам надо рассмотреть динамику этого примитивного, но эффективного устройства.

Для описания движения камня в праще рассмотрим упрощенную схему. На горизонтальной поверхности расположен твердый сплошной диск радиуса $R = 1,0$ м, который вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω боковой поверхности диска в некоторой точке A прикреплена легкая нерастяжимая нить, длина которой равна радиусу диска. К концу веревки привязана небольшая шайба массы m , которая скользит по столу. Диск моделирует вращающуюся руку, а шайба камень в праще. Во всех пунктах данной задачи рассматривайте только установившийся режим: после некоторого этапа разгона движение шайбы будет происходить с постоянной по модулю скоростью.

Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.*

Во всех пунктах задачи желательно получить ответ в виде формулы и только после этого подставлять численные значения параметров. Однако, в тех случаях, когда вам необходимо использовать различные тригонометрические формулы (которые Вы не знаете), рекомендуем по возможности сразу находить численные значения различных углов и затем подставлять их последующие выражения.



Часть 1. Во всем виновато сопротивление воздуха!

В этой части задачи будем считать, что в процессе движения на шайбу действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости шайбы

$$F = -\beta V, \quad (1)$$

а силой трения шайбы о поверхность стола можно пренебречь. Силой сопротивления воздуха действующей на нить также можно пренебречь. Для определения коэффициента пропорциональности β в формуле (1) шайбу сбросили с большой высоты. Оказалось, что после некоторого разгона шайба стала падать с постоянной скоростью $v_0 = 50 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.1 В описанной установке диск вращается, с частотой $n = 1,0 \frac{\text{об}}{\text{с}}$. Определите угол отклонения нити от радиального направления γ и модуль скорости установившегося движения

шайбы. **1.2** До какой максимальной скорости можно разогнать шайбу в данных условиях, если нить выдерживает максимальную нагрузку $T_{\max} = Kmg$, где m - масса шайбы, $K = 10$.

Часть 2. Во всем виновата сила трения.

2.1 Для определения коэффициента трения шайбы о поверхность шайбе сообщили горизонтально направленную скорость $v_1 = 1,0 \frac{м}{с}$. При этом до полной остановки она прошла путь $S = 12$ см. Рассчитайте по этим данным численное значение коэффициента трения μ . В дальнейших расчетах используйте найденное численное значение этого коэффициента.

Диск вращается с постоянной частотой n .

2.2 Определите модуль скорости установившегося движения шайбы при $n = 0,30 \frac{об.}{с}$.

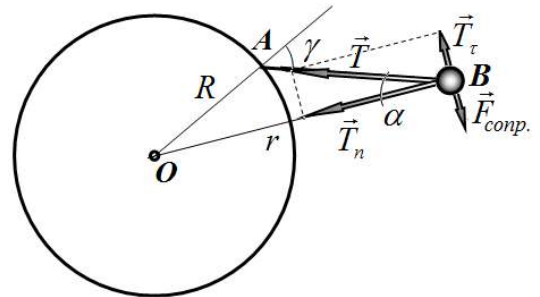
2.3 Определите модуль скорости установившегося движения шайбы при $n = 0,25 \frac{об.}{с}$.

2.4 Определите модуль скорости установившегося движения шайбы при $n = 0,20 \frac{об.}{с}$.

Решение

Часть 1. Во всем виновато сопротивление воздуха!

1.1 Так как на шайбу действует сила сопротивления воздуха, то веревка должна отклониться от радиального направления на некоторый угол γ . В этом случае шайба будет двигаться по окружности некоторого радиуса r (отрезок OB), а ее вектор скорости направлен перпендикулярно этому отрезку. Обозначим угол между нитью и отрезком OB α . Так как длина нити равна радиусу диска, треугольник OAB является равнобедренным. Поэтому



$$\gamma = 2\alpha, \quad (1)$$

$$r = 2R \cos \alpha \quad (2)$$

Силу натяжения нити удобно разложить на две составляющих: радиальную T_n (сообщающую шайбе центростремительное ускорение) и касательную к траектории T_τ (которая компенсирует силу сопротивления воздуха). На основании второго закона Ньютона запишем уравнения движения для этих двух составляющих

$$\begin{aligned} T \cos \alpha &= m\omega^2 r \\ T \sin \alpha &= \beta \omega r \end{aligned} \quad (3)$$

Неизвестный параметр β можно определить из известной скорости установившегося падения шайбы (в этом режиме сила тяжести уравнивается силой сопротивления воздуха):

$$\beta v_0 = mg \Rightarrow \beta = \frac{mg}{v_0}. \quad (4)$$

Разделив второе уравнение системы (2) на первое получим формулу для тангенса угла

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\beta}{m\omega} = \frac{g}{\omega v_0}. \quad (5)$$

Подстановка численных значений (с учетом $\omega = 2\pi n$) приводит к результату

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{\omega v_0} = \frac{10}{2\pi \cdot 1 \cdot 50} \approx 0,032 \Rightarrow \alpha = 1,8^\circ. \quad (6)$$

Следовательно, искомый угол отклонения нити равен

$$\gamma = 2\alpha = 3,6^\circ. \quad (7)$$

Скорость движения шайбы равна

$$v = r\omega = 4\pi Rn \cos \alpha = 13 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (8)$$

Заметим, что при таком угле отклонения $r = 2R \cos \alpha \approx 2,0$ м, что в пределах точности исходных данных совпадает с удвоенным радиусом диска. То есть при таком угле для расчета скорости шайбы можно пренебречь отклонением нити от радиального направления.

1.2 Максимальная скорость шайбы будет достигнута, когда сила натяжения нити достигнет максимального значения. В этом случае в систему уравнений (4) подставим максимальное значение силы натяжения и формулу (2) для радиуса траектории:

$$\begin{cases} T_{\max} \cos \alpha = m\omega^2 r \\ T_{\max} \sin \alpha = \mu_0 r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Kmg \cos \alpha = 2Rm\omega^2 \cos \alpha \\ Kmg \sin \alpha = 2R \frac{mg}{v_0} \cos \alpha \end{cases}. \quad (9)$$

По-прежнему, справедливо (5), кроме того, из второго уравнения этой системы следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2R\omega}{Kv_0}. \quad (10)$$

Приравнивая эти два выражения для тангенса угла α , получим формулу для максимальной угловой скорости вращения диска

$$\frac{2R\omega}{Kv_0} = \frac{g}{v_0\omega} \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{Kg}{2R}} = 7,1 \text{ с}^{-1} \quad (11)$$

При этой угловой скорости угол отклонения нити будет еще меньшим, поэтому можно считать, что радиус траектории шайбы равен $r = 2R$. Следовательно, максимально возможная скорость шайбы равна

$$v_{\max} = 2R\omega_{\max} = \sqrt{2KRg} = 14\frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (12)$$

Часть 2. Во всем виновата сила трения.

2.1 Коэффициент трения можно найти из уравнения закона сохранения энергии (начальная кинетическая энергия шайбы равна работе силы трения):

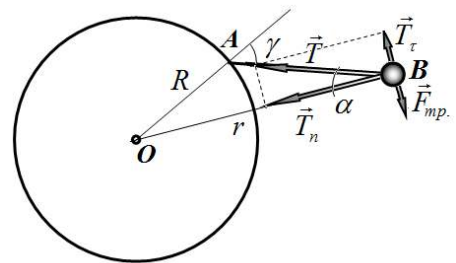
$$\frac{mv_1^2}{2} = \mu mgS. \quad (13)$$

Из которого следует

$$\mu = \frac{v_1^2}{2gS} = \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 0,12} = 0,42. \quad (14)$$

Этот же результат следует и из кинематических соотношений для равнозамедленного движения шайбы.

2.2 Главное отличие решения данной части задачи от предыдущей - в другом выражении для силы сопротивления, сейчас это постоянная по модулю сила трения. В остальном, решение принципиально не отличается от предыдущего. Рисунок действующих на шайбу сил отличается от рассмотренного ранее только обозначением силы сопротивления. Уравнения второго закона Ньютона шайбы в прежних проекциях будут иметь вид



$$\begin{aligned} T \cos \alpha &= m\omega^2 r \\ T \sin \alpha &= \mu mg \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $F_{\text{тр.}} = \mu mg$ - сила трения, действующая на шайбу. Подставляя выражение (2) для радиуса траектории в первое уравнение этой системы, получим формулу для силы натяжения нити

$$T \cos \alpha = 2m\omega^2 R \cos \alpha \Rightarrow T = 2m\omega^2 R. \quad (16)$$

Теперь из второго уравнения системы (15) найдем значение угла α

$$2m\omega^2 R \sin \alpha = \mu mg \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\mu g}{2\omega^2 R} = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R}. \quad (17)$$

Подстановка численных значений приводит к следующему значению угла α .

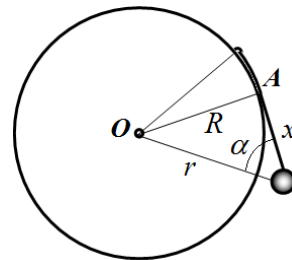
$$\sin \alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0,42 \cdot 10}{8\pi^2 \cdot (0,30)^2 \cdot 1,0} = 0,59 \Rightarrow \alpha = 36^\circ \quad (18)$$

Следовательно, скорость шайбы будет равна

$$v = 2\pi n \cdot 2R \cos \alpha = 4\pi n R \cos \alpha = 3,0 \frac{M}{c}. \quad (19)$$

Можно, конечно, подставить в формулу выражения для косинуса (выразив его через синус):

$$v = 4\pi n R \cos \alpha = 4\pi n R \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 4\pi n R \sqrt{1 - \left(\frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} \right)^2}.$$



2.3 Расчет угла α при $n = 0,25 \frac{\text{об}}{c}$ приводит к результату

$$\sin \alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0,42 \cdot 10}{8\pi^2 \cdot (0,25)^2 \cdot 1,0} = 0,85 \Rightarrow \alpha = 58^\circ \quad (20)$$

Этот угол превышает 45° , а угол отклонения нити $\gamma = 2\alpha$ становится больше 90° ! Чего быть не может – следовательно, нить будет частично намотана на диск.

Это приведет к иному решению. Рисунок

действующих сил и расстояний в этом случае имеет иной вид. Система уравнений (15) остается неизменной, но формула для радиуса траектории (2) в данном случае неприменима.

Из системы уравнений (15) выразим тангенс угла α

$$\text{tg } \alpha = \frac{\mu g}{\omega^2 r} \quad (21)$$

И приравняем его к выражению, следующему из прямоугольного (в данном случае) треугольника OAB

$$\text{tg } \alpha = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad (22)$$

Из полученного уравнения можно определить радиус траектории

$$\frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{\mu g}{\omega^2 r} \Rightarrow r^2 = \left(\frac{\mu g}{\omega^2 R} \right)^2 (r^2 - R^2) \Rightarrow$$

$$r = R \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} \quad (23)$$

Отметим, что формулы для радиусов траектории (23) и (2) стыкуются при $\alpha = 45^\circ$. В этом случае $\sin \alpha = \frac{\mu g}{2\omega^2 R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\mu g}{\omega^2 R} = \sqrt{2}$ и тогда из формулы (23) следует, что $r = R\sqrt{2}$

При заданном значении частоты вращения $n = 0,25 \frac{\text{об}}{\text{с}}$ радиус траектории равен

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R} = \frac{0,40 \cdot 10}{(2\pi \cdot 0,25)^2 \cdot 1,0} = 1,62 \Rightarrow r = R \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} = 1,0 \cdot \sqrt{\frac{(1,62)^2}{(1,62)^2 - 1}} = 1,27 \text{ м.}$$

Соответственно, скорость шайбы равна

$$v = 2\pi n r = 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (24)$$

2.4 Если не заметить «подвоха» в пункте 2.3 и упрямо подставлять значения частоты вращения в формулу (17), то при заданном значении угловой скорости получим абсурдный результат:

$$\sin \alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0,40 \cdot 10}{8\pi^2 \cdot (0,20)^2 \cdot 1,0} = 1,25 \Rightarrow \alpha = ??? \quad (25)$$

Фактически этот пункт задачи является «подсказкой» и к предыдущему пункту. Поэтому расчет следует вести по формулам (23) –(24):

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R} = \frac{0,40 \cdot 10}{(2\pi \cdot 0,20)^2 \cdot 1,0} = 2,53 \Rightarrow r = R \sqrt{\frac{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} = 1,0 \cdot \sqrt{\frac{(2,53)^2}{(2,53)^2 - 1}} = 1,09 \text{ м}$$

$$v = 2\pi n r = 1,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (26)$$