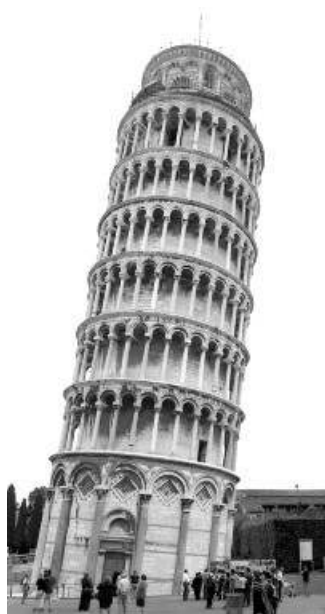


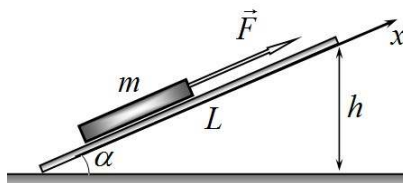
Условие



Приборы и материалы: Штатив с лапкой, доска деревянная длиной 50 см, динамометр школьный с пределом измерения 4 Н, линейка измерительная, нитки, книга.

Предмет, находящийся в покое на горизонтальной, на наклонной плоскости может удерживаться на ней некоторой силой от проскальзывания при попытке сдвинуть его по поверхности. Если предмет скользит по наклонной плоскости его можно удержать от проскальзывания, приложив некоторую дополнительную силу тяги параллельно поверхности наклонной плоскости.

Книга находится на плоской доске, составляющей угол α с горизонтом. Один конец доски расположен на столе, второй с помощью штатива закреплен на высоте h . Длину доски обозначим L . К книге прикладывают некоторую силу F , направленную вдоль доски.



Вам необходимо исследовать в каких пределах может изменяться эта сила, чтобы книга находилась в состоянии покоя. Выберем ось Ox направленную вверх вдоль доски. Далее под величиной F будем понимать проекцию приложенной силы на выбранную ось, т.е. эта величина может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Часть 1.

Теоретическая.

Обозначим массу книги m , а коэффициент трения книги о доску μ .

1.1 Рассчитайте в каких пределах может изменяться сила F , чтобы книга находилась в покое в зависимости от угла наклона доски к горизонту α . Верхнюю и нижнюю границы этой силы обозначим $F_{(+)}$ и $F_{(-)}$, соответственно.

1.2 Постройте схематические графики зависимости границ силы $F_{(+)}$ и $F_{(-)}$ от угла наклона доски α . На графиках укажите значения параметров характерных точек (граничных, точек пересечения с осями, положения и значения экстремумов).

1.3 Укажите возможные способы простого определения коэффициента трения книги о доску.

Возможно, вам понадобится тригонометрическая формула

$$a \sin \alpha \pm b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha \pm \varphi), \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

Часть 2. Экспериментальная.

2.1 Измерьте зависимость границ силы $F_{(+)}$ и $F_{(-)}$ от высоты подъема конца доски h (в пределах изменения h от 0 до L). Постройте графики полученных зависимостей.

2.2 Используя предложенные вами в п.1.3 методы, оцените коэффициент трения книги о доску (не забудьте о погрешностях).

его помощью можно измерять и такие силы! Предложите способ измерения сил, больших предела измерения динамометра!

Часть 3. Экспериментально-теоретическая.

3.1 Используя результаты проведенных измерений, постройте теоретические зависимости границ силы от высоты подъема доски. Графики теоретических зависимостей нанесите на бланке графиков экспериментальных данных п. 2.1. Оцените относительное расхождение (в процентах) между экспериментальными и теоретическими значениями сил $F_{(+)}$ и $F_{(-)}$.

3.2 Для более надежной проверки соответствия между экспериментальными данными удобно линеаризовать полученные зависимости. Предложите такой способ представления экспериментальных данных, чтобы графики полученных зависимостей являлись прямыми линиями. Постройте эти графики.

3.3 Используя предложенные вами линеаризованные зависимости, определите коэффициент трения книги о доску с максимально возможной точностью.

Не забудьте оценить погрешность определения коэффициента трения.

Решение

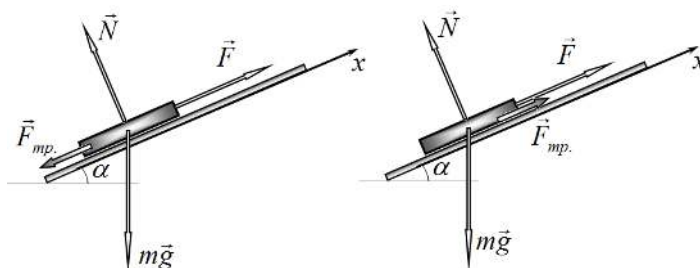
Часть 1. Теоретическая.

1.1 Границы возможных значений силы F определяются направлением действия силы трения. Модуль силы трения определяется стандартным образом

$$F_{\text{тр.}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha. \quad (1)$$

Следовательно, проекция силы F , при которой книга еще находится в покое, может лежать в пределах

$$F_{(\pm)} = mg \sin \alpha \pm \mu mg \cos \alpha. \quad (2)$$



Для удобства анализа эту формулу можно представить в виде

$$F_{(\pm)} = mg \sin \alpha \pm \mu mg \cos \alpha = mg \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\alpha \pm \varphi), \quad (3)$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \mu$.

1.2

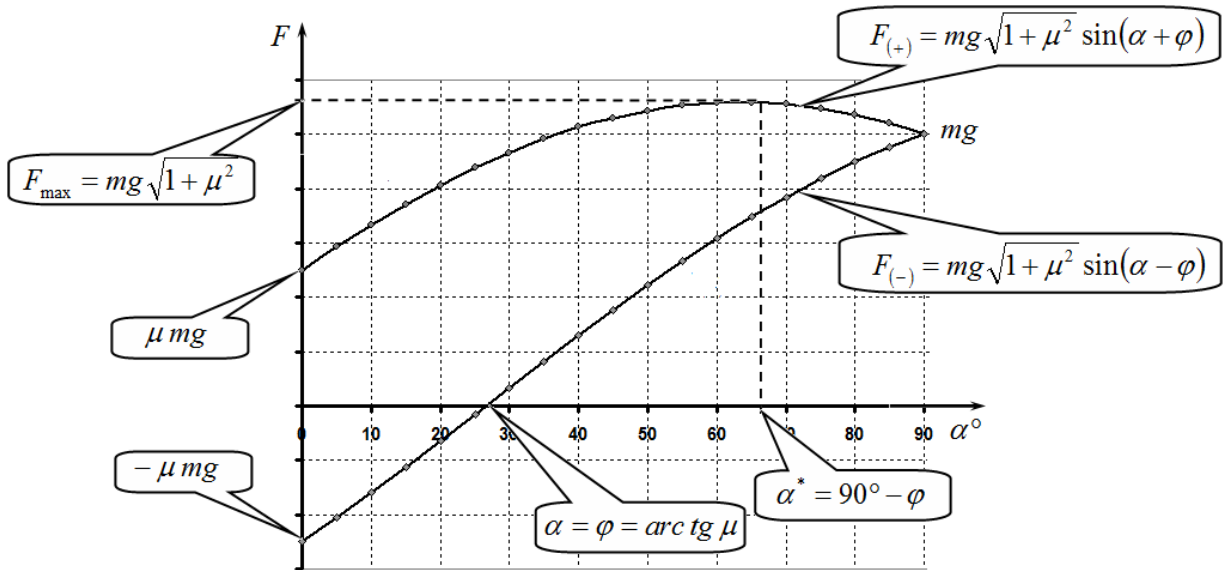


График 1 Теоретические зависимости

Графики этих функций показаны на рисунке (График 1).

Характерными точками графика являются:

1) значения сил при горизонтальном расположении доски

$$F_0 = \pm \mu mg, \quad (4)$$

2) точка пересечения с осью углов

$$\alpha = \varphi = \operatorname{arctg} \mu, \quad (5)$$

при этом угле наклона начинается скольжение книги без внешней силы F .

3) точка максимума функции $F_{(+)}$:

$$F_{\max} = mg \sqrt{1 + \mu^2} \quad \text{при} \quad \alpha^* = 90^\circ - \varphi. \quad (6)$$

1.3 Любая из этих точек может служить для определения коэффициента трения. Однако экспериментально определить положение максимума затруднительно.

Результаты измерений границ сил представлены в таблице 1. Для экономии места в ней же приведены и результаты необходимых расчетов.

Таблица 1. Результаты измерений и расчетов.

Измерения	Теоретические расчеты			Линеаризация					
h , см	$F_{(+)}$, Н	$F_{(-)}$, Н	α	$F_{(+)}$, Н	$F_{(-)}$, Н	$\sin \alpha$	$F_{(+)} + F_{(-)}$	$\cos \alpha$	$F_{(+)} - F_{(-)}$
0	1,30	-1,30	0,000	1,302	-1,302	0,00	0,00	1,00	2,60
3	1,50	-0,90	0,060	1,552	-1,048	0,06	0,60	1,00	2,40
5	1,60	-0,80	0,100	1,715	-0,875	0,10	0,80	0,99	2,40
7	1,70	-0,60	0,140	1,877	-0,701	0,14	1,10	0,99	2,30
9	1,90	-0,40	0,181	2,037	-0,525	0,18	1,50	0,98	2,30
11	2,10	-0,30	0,222	2,194	-0,346	0,22	1,80	0,98	2,40
13	2,20	-0,15	0,263	2,349	-0,165	0,26	2,05	0,97	2,35
14	2,30	-0,05	0,284	2,426	-0,074	0,28	2,25	0,96	2,35
15	2,40	0,00	0,305	2,502	0,018	0,30	2,40	0,95	2,40
17	2,60	0,20	0,347	2,652	0,204	0,34	2,80	0,94	2,40
19	2,70	0,40	0,390	2,800	0,392	0,38	3,10	0,92	2,30
21	2,80	0,55	0,433	2,946	0,582	0,42	3,35	0,91	2,25
23	3,00	0,80	0,478	3,088	0,776	0,46	3,80	0,89	2,20
25	3,10	1,00	0,524	3,228	0,972	0,50	4,10	0,87	2,10
27	3,30	1,20	0,570	3,364	1,172	0,54	4,50	0,84	2,10
29	3,40	1,40	0,619	3,497	1,375	0,58	4,80	0,81	2,00
31	3,50	1,70	0,669	3,626	1,582	0,62	5,20	0,78	1,80
33	3,60	1,90	0,721	3,750	1,794	0,66	5,50	0,75	1,70
35	3,70	2,10	0,775	3,870	2,010	0,70	5,80	0,71	1,60
37	3,80	2,30	0,833	3,984	2,232	0,74	6,10	0,67	1,50

39	4,00	2,60	0,895	4,091	2,461	0,78	6,60	0,63	1,40
41	4,20	2,80	0,961	4,189	2,699	0,82	7,00	0,57	1,40
43	4,40	3,20	1,035	4,276	2,948	0,86	7,60	0,51	1,20
45	4,50	3,40	1,120	4,348	3,212	0,90	7,90	0,44	1,10
47	4,50	3,60	1,223	4,392	3,504	0,94	8,10	0,34	0,90
48	4,60	4,00	1,287	4,397	3,667	0,96	8,60	0,28	0,60
49	4,40	4,10	1,370	4,375	3,857	0,98	8,50	0,20	0,30
50	4,20	4,20	1,571	4,200	4,200	1,00	8,40	0,00	0,00

Для измерения сил, больших, чем 4Н, можно воспользоваться следующей методикой: протянуть нить сквозь книгу, так, чтобы ее концы были параллельны друг другу. Один конец нити тянуть непосредственно рукой, а второй с помощью динамометра. Тогда суммарная сила, действующая на книгу, будет в два раза больше показаний динамометра.

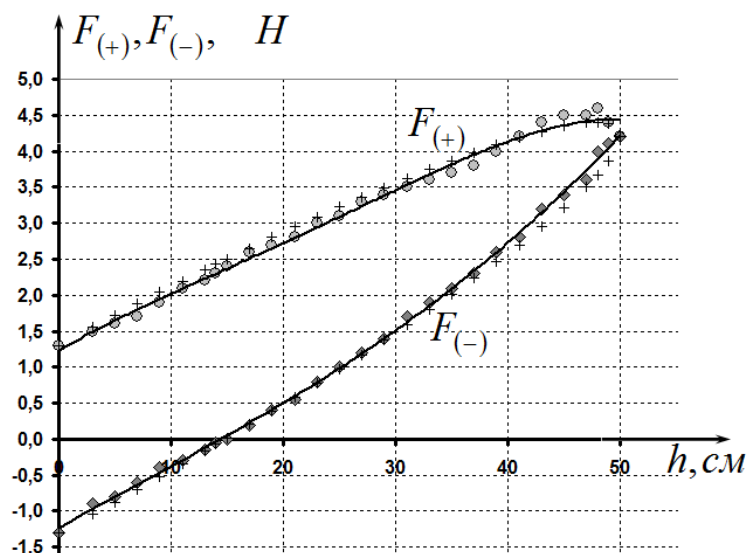


График 1 Результаты измерений (◐, ◑) и теоретических расчетов (+)

Графики полученных зависимостей показаны на рисунке. Для построения теоретических зависимостей, описываемых формулой (3), необходимо определить (хотя бы приблизительно) коэффициент трения. Воспользуемся для этого двумя характерными точками. 1) Измеренное значение силы трения при движении по горизонтальной поверхности равно $F_0 = (1,3 \pm 0,1)\text{Н}$; а значение силы тяжести $F_{50} = (4,2 \pm 0,2)\text{Н}$. Здесь погрешность, как минимум в два раза выше, потому, что второй конец нити удерживается рукой. По этим значениям сил рассчитаем коэффициент трения

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{F_0}{F_{50}} = \frac{1,3}{4,2} \approx 0,31, \quad (7)$$

с погрешностью

$$\Delta\mu = \tilde{\mu}_1 \sqrt{\left(\frac{\Delta F_0}{F_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_{50}}{F_{50}}\right)^2} \approx 0,09. \quad (8)$$

Оценка погрешности по упрощенной формуле

$$\Delta\mu = \tilde{\mu}_1 \left(\frac{\Delta F_0}{F_0} + \frac{\Delta F_{50}}{F_{50}} \right) \approx 0,12. \quad (9)$$

Относительная погрешность измерения коэффициента трения таким способом равна $\varepsilon_\mu = 40\%$. 2) Определение коэффициента трения по углу наклона плоскости, при котором начинается скольжение (по нашим измерениям он соответствует высоте подъема $h = (15 \pm 2)\text{см}$), приводит к такому же результату:

$$\tilde{\mu}_2 = \operatorname{arctg} \frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}} \approx 0,31 \quad (10)$$

но с меньшей погрешностью

$$\Delta\mu \approx \tilde{\mu}_2 \frac{\Delta h}{h} = 0,04. \quad (11)$$

При этом методе относительная погрешность измерения равна $\varepsilon_\mu = 13\%$. Таким образом, для теоретических расчетов можно значение коэффициента трения принять равным $\mu \approx 0,31$.

Часть 3. Экспериментально-теоретическая.

Расчеты удобно проводить по формуле (3), в которой $\varphi = \arcsin \frac{h}{L} \approx 0,305$. Результаты расчетов также отражены на графике 1. Максимальное различие между результатами измерений и расчетов не превышает 10%.

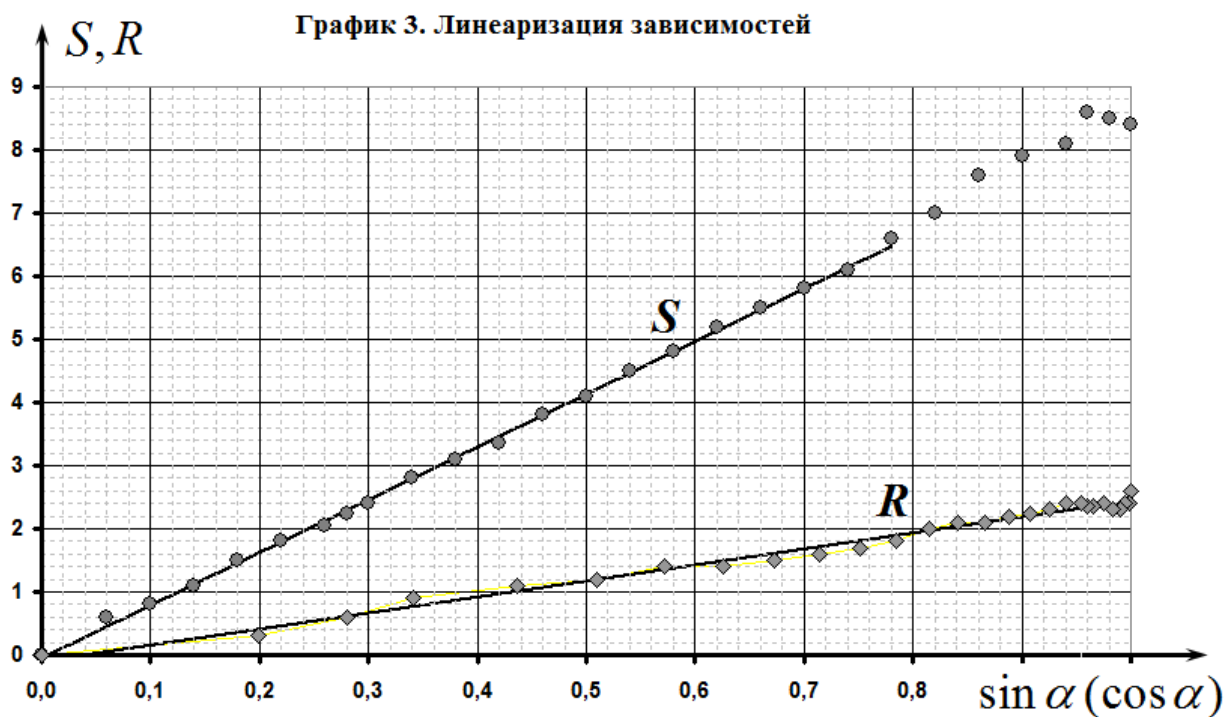
3.2 Наиболее простая линейаризация зависимостей непосредственно следует из формулы (2). Можно выразить сумму и разность верхней и нижней границ измеренных сил

$$S = F_{(+)} + F_{(-)} = 2mg \sin \alpha$$

$$R = F_{(+)} - F_{(-)} = 2\mu mg \cos \alpha. \quad (22)$$

Эти величины линейно зависят от синуса и косинуса угла наклона, которые не сложно рассчитать по высоте подъема доски. Тогда отношение коэффициентов пропорциональности в этих зависимостях и будет равно коэффициенту трения.

Результаты расчетов также приведены в Таблице 1. Графики линейаризованных зависимостей показаны на рисунке 2.



Каждая из этих зависимостей имеет четко выраженный прямолинейный участок. Отклонения от линейности наблюдаются только при больших углах, где погрешности измерений особенно велики.

Расчет параметров линейных зависимостей предпочтительнее провести по методу наименьших квадратов. Для суммы параметры линейной зависимости $S = a_S \sin \alpha + b_S$ равны (не смотря на то, что размерности в данном случае не существенны, назовем – ньютоны)

$$a_S = 8,36 \pm 0,12$$

$$b_S = -0,04 \pm 0,05. \quad (23)$$

Параметр сдвига b_S может считаться равным нулю, поэтому подтверждается теоретическая прямо пропорциональная зависимость.

Для разности сил аналогичные параметры зависимости $R = a_R \cos \alpha + b_R$ имеют следующие значения

$$a_R = 2,54 \pm 0,12$$

$$b_R = -0,09 \pm 0,09. \quad (24)$$

Значение параметра сдвига и его погрешность также позволяют считать данную зависимость прямо пропорциональной. Значение коэффициента трения, рассчитанное по найденным коэффициентам наклона, равно

$$\tilde{\mu}_3 = \frac{a_R}{a_S} = 0,304. \quad (25)$$

Его погрешность

$$\Delta\mu = \tilde{\mu}_3 \sqrt{\left(\frac{\Delta a_R}{a_R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_S}{a_S}\right)^2} \approx 0,015. \quad (26)$$

Таким образом, более тщательная обработка с учетом всех полученных данных позволила повысить точность определения коэффициента трения почти в три раза. Окончательное значение измеренного коэффициента трения равно

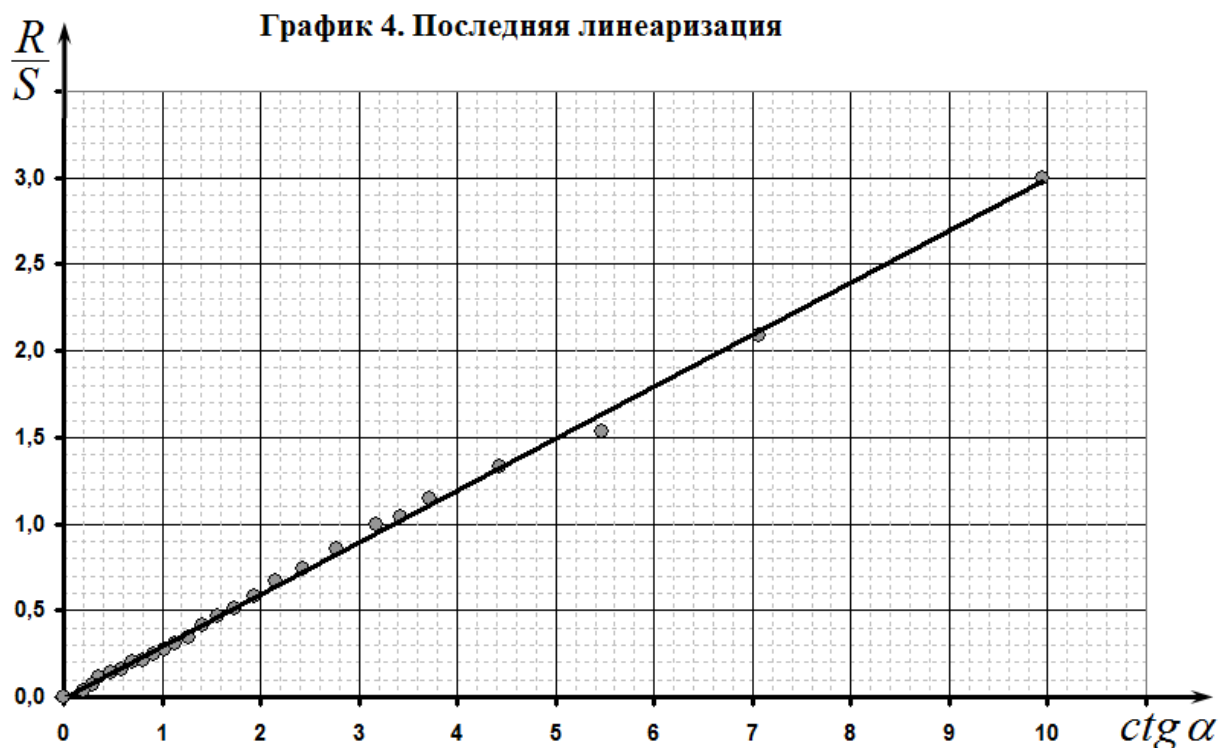
$$\mu = 0,304 \pm 0,015. \quad (27)$$

Здесь относительная погрешность определения коэффициента трения составляет $\varepsilon_\mu = 5\%$. Рассмотрим, наконец, еще один эффектный способ линеаризации. Для этого разделим две функции (22) друг на друга

$$\frac{R}{S} = \mu \operatorname{ctg} \alpha. \quad (28)$$

Построенный график зависимости «отношения разности к сумме» от котангенса угла наклона показан на следующем рисунке.

График 4. Последняя линейаризация



Коэффициент наклона этого графика непосредственно равен коэффициенту трения. Расчет по методу наименьших квадратов дает следующее значение

$$\mu = 0,301 \pm 0,005.$$

Причем относительная погрешность составляет $\varepsilon_{\mu} = 2\%$.

Отметим, что в данном случае параметр сдвига равен $b = -0,009 \pm 0,016$, поэтому его достоверно можно считать равным нулю.

В заключение подчеркнем, что повышение точности связано с увеличением числа результатов измерений, которые принимаются во внимание.

Впрочем, сам коэффициент трения изменяется от точки к точке в большем диапазоне.