

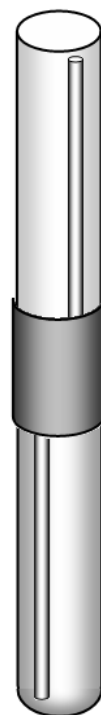
Условие

Задание 10-2. «Странные» законы движения.

Помимо равномерного и равноускоренного движения существуют и другие виды движения! Убедитесь в этом...

Часть 1. Перетекание.

Внимание! Этот эксперимент вы можете провести только один раз! Прежде чем заливать воду, тщательно продумайте свои действия. Имейте также в виду, что время измерений превышает 20 минут. Разбирать установку запрещено!



Две стеклянные трубки одна закрытая снизу, вторая - открытая с обоих концов, соединены кусочком пластиковой трубки. В месте соединения в обе трубки вставлена поролоновая пробка, через которую пропущены две тонкие пластиковые трубки для коктейля. Нижняя трубка полностью заполнена маслом. Устройство закреплено вертикально в лапке штатива.

Если верхнюю трубку полностью заполнить водой, то масло из нижней трубки начнет медленно перетекать в верхнюю по соломинке от коктейля.

1.1 Заполните верхнюю трубку до верху водой. Вода начнет медленно по внутренней пластиковой трубке начнет опускаться в нижнюю трубку, а масло подниматься вверх. Измерьте зависимость высоты столбиков масла в верхней трубке и воды в нижней трубке от времени. Постройте графики полученных зависимостей.

1.2 Нарисуйте, как, по вашему мнению, пластиковые трубки проходят через поролоновую пробку.

1.3 На основании разумных предположений покажите, что скорость подъема воды в нижней трубке линейно зависит от высоты столбика воды h в этой трубке

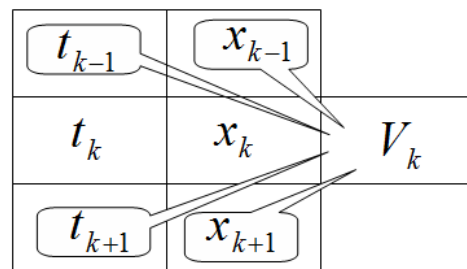
$$v = kh + b. \quad (1)$$

1.4 На основании полученной экспериментальной зависимости проверьте предположение, высказанное в п.1.3. Постройте график зависимости скорости подъема уровня воды от высоты этого уровня. Определите параметры k, b в формуле (1), при которых она наиболее точно описывает экспериментальные данные.

Математическая подсказка. Предлагаем следующий алгоритм расчета скорости.

Пусть у вас есть таблица экспериментальных данных t_k - момент времени, когда координата движущего тела равна x_k . Тогда для вычисления скорости в точке x_k предпочтительнее использовать симметричную схему

$$V_k = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}$$



Часть 2. Намокание.

Закрепите вертикально в лапке штатива полоску фильтровальной бумаги, на которую нанесите шкалу с шагом 0,5 см. Нижнюю часть полоски опустите в воду. Вода начнет медленно подниматься по бумаге.

2.1 Измерьте зависимость высоты подъема воды (длины намокшей части) от времени. Постройте график полученной зависимости.

2.2 На основании разумных предположений, покажите, что квадрат высоты подъема пропорционален времени

$$x^2 = At. \quad (2)$$

2.3 На основании экспериментальных данных проверьте выполнимость зависимости два. Определите коэффициент пропорциональности в этой формуле.

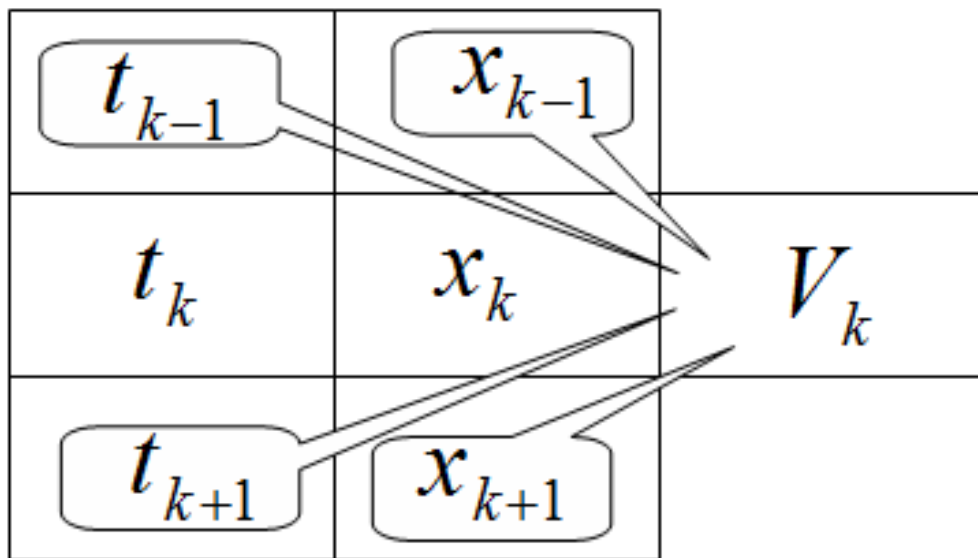
Подсказка. Подумайте, что такое X в этой формуле и что вы измеряете.

Решение

Задание 10-2. «Странные» законы движения.

Часть 1. Перетекание.

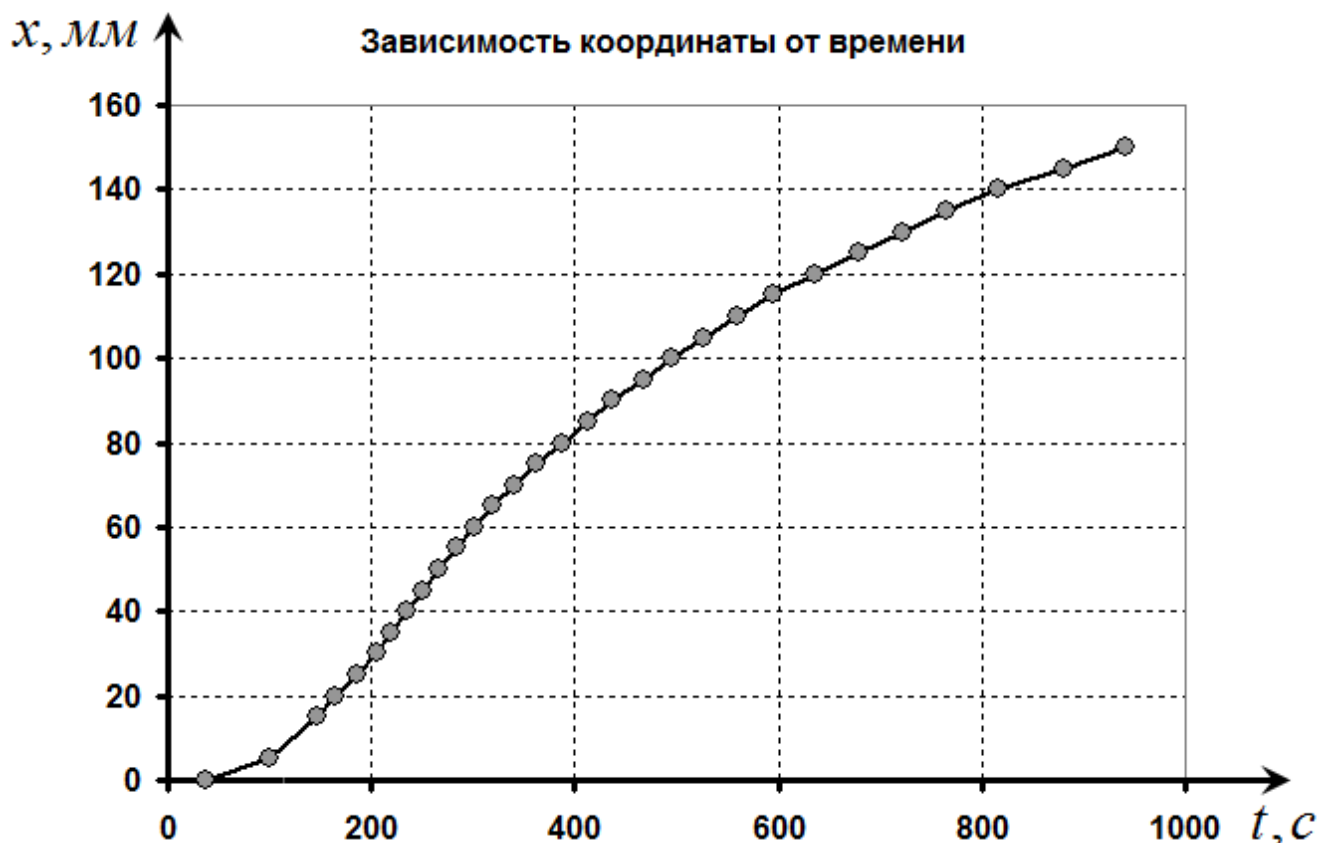
1.1 Результаты измерений зависимости высоты столбика масла x в верхней трубке от времени даны в Таблице 1. Там же приведены и результаты необходимых в дальнейшем расчетов.



Для расчета скорости использовалась предложенная в условии схема.

Отметим, что высота столбика воды в нижней практически такая же, как и масла в верхней. График полученной зависимости показан на рисунке.

Таблица 1. Перетекание масла.



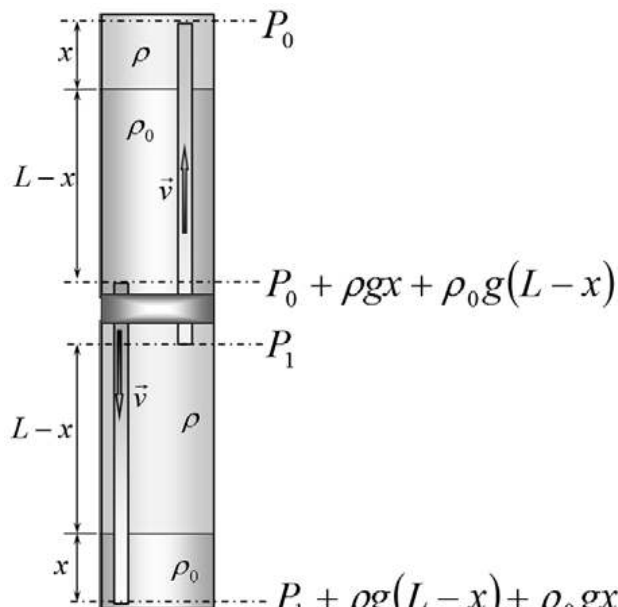
1.2 Для объяснения наблюдаемого эффекта необходимо предположить, что нижний край верхней пластиковой трубки находится вверху нижнего сосуда, а верхний край нижней трубки внизу верхнего сосуда. В этом случае по первой трубке масло будет перетекать вверх, а по второй – вода вниз (см. рисунок).

1.3 Покажем, что скорость перетекания жидкостей линейно зависит от высоты столбика масла (и равной ей высоты столбика воды) x . Обозначим давление жидкости на верхнем срезе трубки в верхнем сосуде P_0 , тогда давление в нижней области этой трубки будет равно

$$P = P_0 + \rho g x + \rho_0 g (L - x), \quad (1)$$

где ρ_0, ρ – плотности воды и масла, соответственно, L – высота сосуда и примерно равная ей длина трубки (различием в них и толщиной пробки пренебрегаем). Аналогично для нижнего сосуда: P_1 – давление в его верхней части, тогда давление у дна

$$P = P_1 + \rho g (L - x) + \rho_0 g x. \quad (2)$$



Разумно предположить, что скорость течения жидкостей в трубках пропорциональна разности давлений на ее концах³. Тогда для скорости течения масла (вверх!) можно записать уравнение

$$P_1 - P_0 - \rho g L = \beta v, \quad (3)$$

где β - некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрических размеров трубки и вязкости масса, $\rho g L$ - гидростатическое давление масла в трубке. Аналогично для движения воды (вниз – поэтому гидростатическое давление воды в трубке войдет с другим знаком!) справедливо уравнение

$$(P_0 + \rho g x + \rho_0 g(L - x)) - (P_1 + \rho g(L - x) + \rho_0 g x) + \rho_0 g l = \beta_0 v. \quad (4)$$

Сложив уравнения (3)-(4), и после приведения подобных членов, получим

$$\begin{aligned} & + \begin{cases} P_1 - P_0 - \rho g L = \beta v \\ (P_0 + \rho g x + \rho_0 g(L - x)) - (P_1 + \rho g(L - x) + \rho_0 g x) + \rho_0 g L = \beta_0 v \end{cases} \\ \Rightarrow & (\rho_0 - \rho)g(L - x) = (\beta_0 + \beta)v \end{aligned} \quad (5)$$

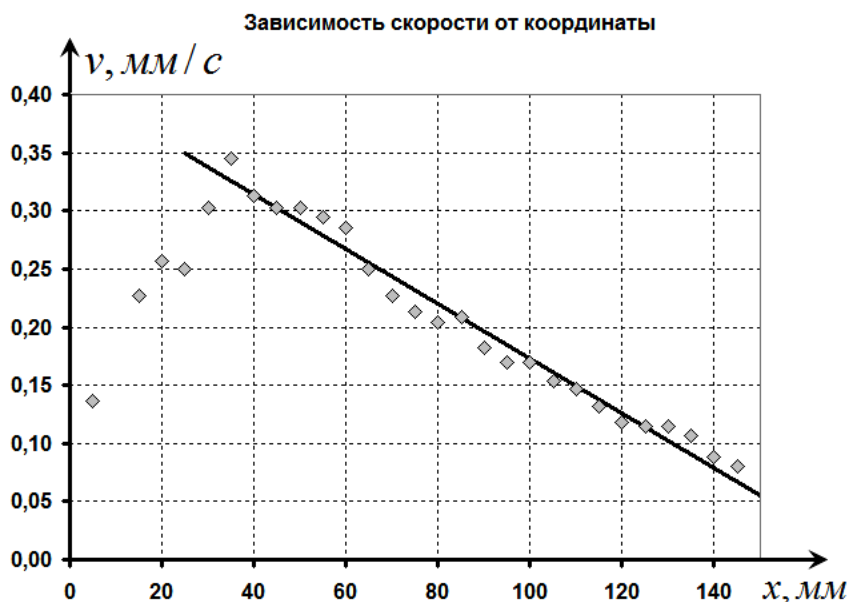
Отсюда следует, что скорость движения жидкостей в трубках пропорциональна величине $(L - x)$, то есть высоте столба воды в верхнем сосуде

$$v = \frac{(\rho_0 - \rho)g}{(\beta_0 + \beta)}(L - x). \quad (6)$$

Следовательно, этой же величине пропорциональна и скорость движения границ масла и воды в обоих сосудах.

3 3

1.4 На графике показана зависимость скорости движения границы от координаты x , рассчитанная по экспериментальным данным.



На начальном этапе, пока процесс перетекания не установился (когда случайным образом влияют пузырьки воздуха, капельки воды и масла в трубках) скорость даже возрастает.

Этот же факт можно видеть и на начальном этапе графика закона движения.

В дальнейшем скорость движения практически линейно зависит от координаты, что подтверждает проделанные теоретические расчеты.

Параметры линейной зависимости

$$v = kx + b, \quad (7)$$

рассчитанные по МНК оказываются равными

$$\begin{aligned} k &= -(2,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1} \\ b &= (0,41 \pm 0,02) \text{ мм/с} \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что уравнение (7) можно записать в виде

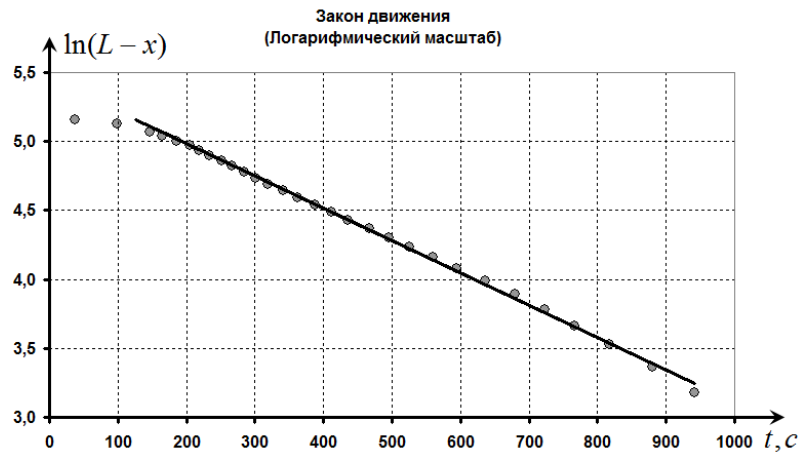
$$v = k_1(L - x),$$

где $k_1 = -k$, $L = -\frac{b}{k} \approx 175$ мм, что, во-первых, совпадает с видом уравнения (6); во-вторых, дает значение длины трубки L близкое к ее реальной длине.

Дополнение (не обязательное для участников олимпиады).

Более строго и надежно закон движения можно обосновать на основании уравнения (6). Если скорость изменения координаты x подчиняется уравнению

$$\frac{dx}{dt} = k(L - x), \quad (9)$$



то закон движения имеет вид

$$x = L(1 - \exp(-kt)). \quad (10)$$

Его удобно представить в логарифмической шкале

$$\ln(L - x) = \ln L - kt. \quad (11)$$

График этой зависимости показан на рисунке.

Как видно, в этом случае разброс точек значительно меньше (так как мы избежали процедуры численного дифференцирования). С помощью этого графика можно определить требуемые параметры с большей точностью.

Так, например, коэффициент наклона оказывается равным $k = -(2,24 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, что на порядок точнее, чем приведенное ранее значение.

Часть 2. Намокание.

2.1 Результаты измерений⁴ зависимости высоты подъема мокрой границы x от времени t приведены в Таблице 1. Рядом показан график полученной зависимости.

Рядом показан график 1. Рядом показан график

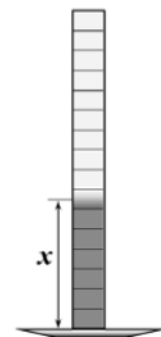
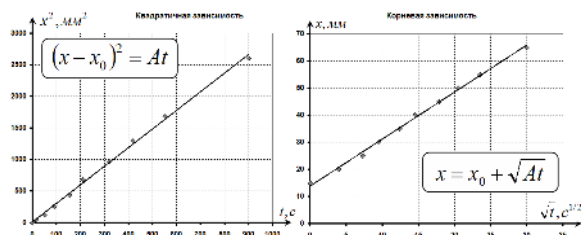


Таблица 1. Намокание бумаги.

x , мм	t , с	$(x - x_0)^2$, мм ²	$\sqrt{t}$, с ^{1/2}
15	0	0	0,00
20	16	36	4,00
25	53	121	7,28
30	91	256	9,54
35	155	441	12,45
40	212	676	14,56
45	319	961	17,86
50	418	1296	20,45
55	552	1681	23,49
65	900	2601	30,00



2.2 Так как процесс подъема воды медленный, то можно считать, что его скорость определяется процессами вязкого трения. В этом случае сила сопротивления пропорциональна скорости движения и высоте поднятого столба. Силы поверхностного натяжения, поднимающие воду, постоянны. Поэтому, приравнявая эти силы, получим

$$\beta x v = f. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует

$$\beta x v = f \implies x \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f}{\beta} \implies x \Delta x = \frac{f}{\beta} \Delta t. \quad (2)$$

⁴ В реальности измерялось время до достижения заданной величины, поэтому в таблице 1 шаг координаты постоянен, а шаг времени заметно изменяется. Поэтому, строго говоря, и следовало обрабатывать зависимость $t(x)$. Однако, в данном случае нам важно проверить только вид зависимости, поэтому обработка обратной функции $x(t)$ более наглядна и приводит практически к тем же результатам.

Если просуммировать⁵ полученное уравнение, получим

$$(x - x_0)^2 = At, \quad (3)$$

где A - неизвестная постоянная, выражающаяся через столь же неизвестные параметры β, f . Для проверки данной зависимости можно воспользоваться двумя равноценными способами, построив зависимость либо $(x - x_0)^2 = At$, либо $x = x_0 + \sqrt{At}$.

На графиках представлены обе зависимости. Как видно, они достаточно близки к линейным, что подтверждает сделанное предположение и проведенный теоретический анализ. Значения требуемого параметра оказались в пределах погрешности совпадающими

$$A = (3,0 \pm 0,1) \frac{\text{мм}^2}{\text{с}}.$$

Отметим, что, не смотря на кажущееся подобие законов движения в двух частях данного задания, они оказались различными.

Справедливости ради следует сказать, что с определенной точностью процесс намокания бумаги также может быть аппроксимирован экспоненциальной зависимостью.

⁵ Проинтегрировать!

³ Это утверждение называют законом Пуазейля.