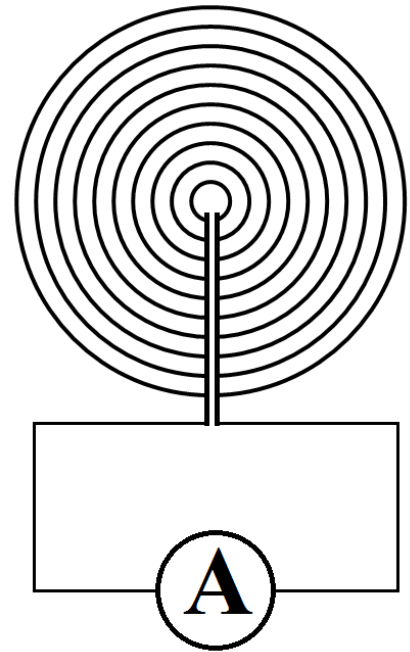


Условие

Задача 11-3. «Два генератора»

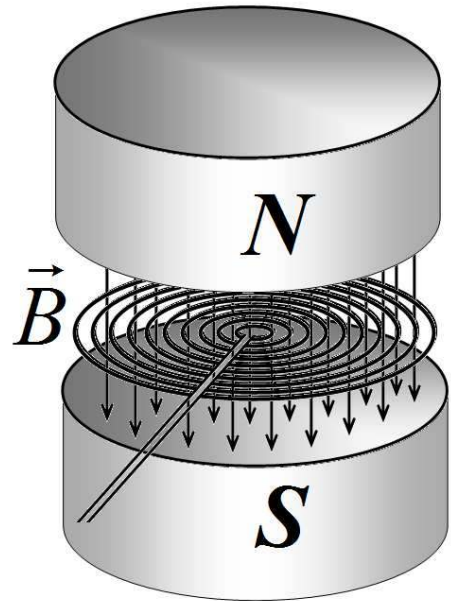
Часть 1. Круглый генератор.



Плоская сетка, показанная на рисунке, состоящая из $N = 10$ концентрических колец (с разрезами), изготовлена из проволоки, удельное электрическое сопротивление которой равно ρ . Диаметр поперечного сечения проволоки равен d . Концы колец подсоединены к выводящим шинам, сопротивлением которых можно пренебречь. К шинам подключен амперметр переменного тока, показывающий действующее значение силы тока.

Радиусы колец сетки пропорциональны их номеру (и значительно больше диаметра поперечного сечения проволоки)

$$a_k = ka_0 \quad (k = 1, 2, \dots, 10).$$



Сетка помещена между полюсами электромагнита, создающего в плоскости сетки пространственно однородное магнитное поле, индукция которого изменяется во времени по закону

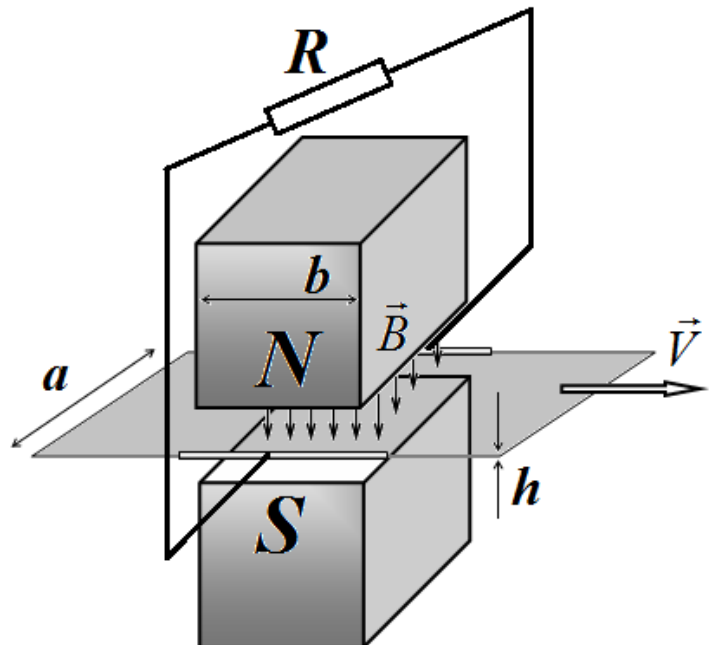
$$B(t) = B_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

B_0, ω — известные постоянные величины. Плоскость сетки перпендикулярна вектору индукции магнитного поля.

1. Найдите ЭДС индукции, возникающей в каждом кольце сетки как функцию времени $\varepsilon(t)$.
2. Найдите показание амперметра, если его сопротивление пренебрежимо мало.
3. Чему будет равно показание амперметра, если его сопротивление равно R ?

Часть 2. Прямоугольный генератор.

Длинная проводящая лента движется между полюсами постоянных магнитов, которые создают в ленте постоянное и однородное электрическое поле индукции B . Ширина этого поля равна ширине ленты a , длина второй стороны прямоугольника, в пределах которого создается поле, равна b . Толщина ленты равна h , удельное электрическое сопротивление материала ленты равно ρ . Боковые торцы ленты скользят по проводящим контактам, к которым подключен резистор сопротивлением R . При движении ленты через резистор протекает электрический ток.



1. Определите силу электрического тока через резистор. 2. Найдите, с какой силой F надо тянуть ленту, чтобы она двигалась с постоянной скоростью V . 3. Определите мощность, выделяющуюся на резисторе. 4. Определите КПД генератора, т.е. отношение мощности, выделяющейся на резисторе к мощности, развиваемой силой, тянущей ленту. Силами трения можно пренебречь.

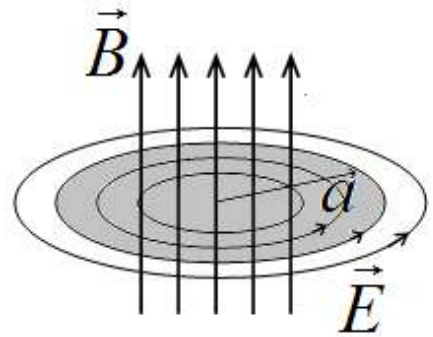
Решение

Задача 11 - 3. «Два генератора»

Часть 1. Круглый генератор.

Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. В данном случае силовыми линиями электрического поля будут концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Рассмотрим кольцо радиуса a_k . Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, переменное магнитное поле порождает в нем ЭДС индукции равную

$$\varepsilon_k = -\frac{\Delta\Phi_k}{\Delta t}, \quad (1)$$



где $\Phi_k = \pi a_k^2 B_0 \cos \omega t$ - магнитный поток через это кольцо. Следовательно, ЭДС индукции этого кольца равна

$$\varepsilon_k = -\frac{\Delta\Phi_k}{\Delta t} = \pi a_k^2 B_0 \omega \sin \omega t. \quad (2)$$

Электрическое сопротивление кольца равно

$$r_k = \rho \frac{2\pi a_k}{(\pi d^2)/4} = 8\rho \frac{a_k}{d^2}. \quad (3)$$

Если пренебречь сопротивлением амперметра, то сила тока через него будет равна

$$i_0 = \sum_k i_k = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{r_k} = \sum_k \frac{\pi a_k^2 B_0 \omega \sin \omega t}{8\rho \frac{a_k}{d^2}} = \frac{\pi d^2 a_0}{8\rho} B_0 \omega \sin \omega t \sum_{k=1}^{10} k = \frac{55}{8} \frac{\pi d^2 a_0}{\rho} B_0 \omega \sin \omega t$$

Действующее значение силы тока, соответственно, в этом случае равно

$$I_0 = \frac{55}{8\sqrt{2}} \frac{\pi d^2 a_0}{\rho} B_0 \omega. \quad (4)$$

Если учесть сопротивление амперметра, то для каждого кольца можно записать

$$\varepsilon_k = i_k r_k + i_0 R. \quad (5)$$

Разделим эти уравнения на r_k и просуммируем по всем кольцам, в итоге получим

$$i_0 = \sum_k i_k = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{r_k} - i_0 R \sum_k \frac{1}{r_k} \Rightarrow i_0 = \frac{\sum_k \frac{\varepsilon_k}{r_k}}{1 + R \sum_k \frac{1}{r_k}}. \quad (6)$$

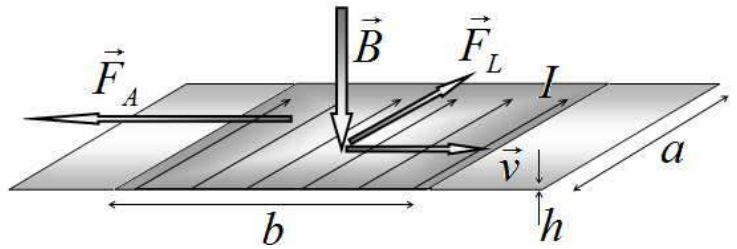
Сумма в числителе подсчитана. Вычислим сумму проводимостей

$$\sum_k \frac{1}{r_k} = \frac{d^2}{8\rho a_0} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx \frac{d^2}{8\rho a_0} \cdot 2,930 \approx 0,366 \frac{d^2}{\rho a_0} \quad (7)$$

Теперь можно записать окончательное выражение для действующего значения силы тока в этом случае

$$I = \frac{\frac{55}{8\sqrt{2}} \frac{\pi d^2 a_0}{\rho} B_0 \omega}{1 + 0,366 R \frac{d^2}{\rho a_0}} = \frac{15,27 \cdot d^2 a_0^2 B_0 \omega}{\rho a_0 + 0,366 R d^2}. \quad (8)$$

Часть 2. Прямоугольный генератор.



На каждый электрон в движущемся проводнике в области магнитного поля действует сила Лоренца

$$F = eBv. \quad (1)$$

Эта сила совершает работу по перемещению электрона поперек движущейся ленты, то есть создает ЭДС, равную

$$\varepsilon = Bva. \quad (2)$$

Электрическое сопротивление участка ленты, находящейся в электрическом поле, равно

$$r = \rho \frac{a}{bh}. \quad (3)$$

По закону Ома сила тока в контуре определяется выражением

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R} = \frac{Bva}{R + \rho \frac{a}{bh}} \quad (4)$$

Со стороны магнитного поля на этот ток действует сила Ампера, направленная в сторону противоположную вектору скорости ленты и равная

$$F = IBa = \frac{B^2 a^2}{R + \rho \frac{a}{bh}} v. \quad (5)$$

Чтобы лента двигалась равномерно, необходимо ее тянуть с такой же по модулю силой. Эта сила развивает мощность

$$P_0 = Fv = \frac{B^2 a^2}{R + \rho \frac{a}{bh}} v^2. \quad (6)$$

Мощность, выделяющаяся на резисторе может быть рассчитана по закону Джоуля-Ленца

$$P = I^2 R = \frac{B^2 v^2 a^2}{\left(R + \rho \frac{a}{bh}\right)^2} R. \quad (7)$$

Наконец, КПД генератора равно

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{R + \rho \frac{a}{bh}}, \quad (8)$$

что равно традиционному отношению сопротивления нагрузки к полному сопротивлению цепи.