



Задание 1. «Маленький принц»

1.1 По второму закону Ньютона (с учетом закона всемирного тяготения)

$$G \frac{M_c m}{R^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} R, \quad (1)$$

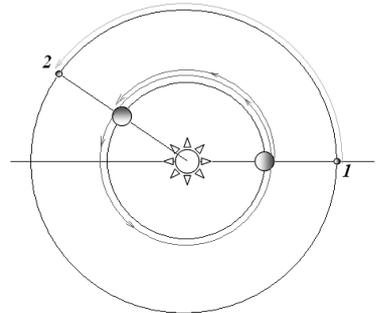
где m – масса планеты, R – радиус орбиты планеты, T - период обращения планеты вокруг Солнца. Сравнив движение Астероида и Земли, получим

$$T_A = T_3 \sqrt{\left(\frac{R_A}{R_3}\right)^3} \approx 1 \sqrt{\left(\frac{2,5}{1}\right)^3} \approx 4,0 \text{ года}. \quad (2)$$

1.2. Наименьшее расстояние между астероидом и Землей будет, когда Солнце, Земля и Астероид установятся на одной прямой (точка 1 на рис.). При этом расстояние между Астероидом и Землей равно

$$L = R_A - R_3 = 1,5 \text{ a.e.} \approx 2,2 \cdot 10^{11} \text{ м}. \quad (3)$$

Следующий раз такая ситуация повторится, когда Земля в своем движении вокруг Солнца обгонит астероид на угол 2π , (или 360°)- точка 2. Относительная угловая скорость Земли относительно астероида равна $\omega_{\text{отн.}} = \omega_3 - \omega_A = \frac{2\pi}{T_3} - \frac{2\pi}{T_A}$.



Следовательно, время движения можно рассчитать по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_{\text{отн.}}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_3} - \frac{2\pi}{T_A}} = \frac{T_3 T_A}{T_A - T_3} \approx 1,33 \text{ года}. \quad (4)$$

Таким образом, следующий раз минимальное расстояние между Землей и Астероидом случится через 1,33 года, т.е. примерно 1 мая 2010 года.

1.3. На любое тело, на поверхности Астероида, действует сила всемирного тяготения, сообщающая ему ускорение g_A , которое можно выразить из уравнения

$$mg_A = G \frac{M_A m}{r_A^2}; \Rightarrow g_A = G \frac{M_A}{r_A^2}. \quad (5)$$

Масса Астероида выражается через его плотность

$$M_A = \rho V = \frac{4}{3} \pi r_A^3 \rho. \quad (6)$$

Подстановка формулы для массы в формулу (5) и последующий расчет приводит к результату

$$g_A = \frac{4\pi}{3} G r_A \rho = \frac{4\pi}{3} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \approx 7,5 \cdot 10^{-3} \frac{M}{c^2}. \quad (7)$$

1.4. Первая космическая скорость соответствует скорости движения по круговой орбите с радиусом, равным радиусу астероида, поэтому

$$m \frac{v^2}{r_A} = mg_A \Rightarrow v = \sqrt{g_A r_A} = \sqrt{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3} \approx 8,7 \frac{M}{c}. \quad (8)$$

1.5. Вес тела на полюсе планеты численно равен силе тяжести, действующей на тело

$$P_0 = mg_A. \quad (9)$$

На экваторе планеты вес тела уменьшается из-за суточного вращения планеты, поэтому на экваторе вес тела оказывается равным

$$P_1 = mg_A - m\omega^2 r_A = mg_A - m \frac{4\pi^2}{T_A^2} r_A = mg_A \left(1 - 4\pi^2 \frac{r_A}{T_A^2 g_A} \right). \quad (10)$$

Следовательно, относительное изменение веса тела равно

$$\eta = 4\pi^2 \frac{r_A}{T_A^2 g_A}. \quad (11)$$

Из этой формулы следует, что период обращения Астероида вокруг собственной оси (т.е. сутки) рассчитывается по формуле

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{r_A}{\eta g_A}} \approx 2,3 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 6,4 \text{ часа}. \quad (12)$$

1.6.1 Высота прыжка рассчитывается по известной формуле

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (13)$$

Так как начальная скорость прыжка одинакова на Земле и Астероиде, то высота прыжка оказывается обратно пропорциональной ускорению свободного падения, поэтому высота прыжка на Астероиде будет равна

$$h = h_0 \frac{g_3}{g} \approx 0,65 \cdot 10^3 \text{ м}. \quad (14)$$

1.6.2 Ускорение свободного падения на высоте h рассчитывается по формуле

$$g = G \frac{M}{(r+h)^2} = G \frac{M}{r^2} \frac{r^2}{(r+h)^2} = g_0 \frac{r^2}{(r+h)^2}, \quad (15)$$

здесь r - радиус планеты, g_0 - ускорение свободного падения на поверхности планеты.

Таким образом, относительное уменьшение ускорения свободного падения равно

$$\varepsilon = \frac{g_0 - g}{g_0} = 1 - \left(\frac{r}{r+h} \right)^2 \approx 12\%. \quad (16)$$

1.6.3 Уточнить найденную приближенно высоту прыжка можно, заменив в формуле (13) ускорение свободного падения на поверхности на среднее значение ускорения на поверхности и на найденной максимальной высоте, то есть положить

$$\bar{h} = \frac{v_0^2}{2 \frac{g_0 + g_h}{2}} = \frac{v_0^2}{2g_0} \frac{2}{1 + \frac{g_h}{g_0}} = h \frac{2}{1 + \left(\frac{r}{r+h} \right)^2} = h \frac{2}{2 - \varepsilon} \approx 1,06h \approx 0,69 \cdot 10^3 \text{ м}. \quad (17)$$

Таким образом, учет зависимости ускорения свободного падения от высоты приводит к увеличению высоты примерно на 6%, что составляет примерно 40 м.

Небольшое дополнение.

Пункт 1.6 может быть решен точно при использовании закона сохранения энергии и формулы для энергии гравитационного взаимодействия тел

$$\frac{mv_0^2}{2} = G \frac{Mm}{r} - G \frac{Mm}{r+h}. \quad (18)$$

Решить данное уравнение не сложно:

$$\frac{v_0^2}{2} = G \frac{M}{r} - G \frac{M}{r+h} = G \frac{M}{r} \left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = g_0 r \frac{h}{r+h}$$

$$\frac{v_0^2}{2g_0} r + \frac{v_0^2}{2g_0} h = rh \Rightarrow \bar{h} = \frac{v_0^2}{2g_0} \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{2g_0 r}} = \frac{h}{1 - \frac{h}{r}} \approx 0,695 \cdot 10^3 \text{ м} \quad (19)$$

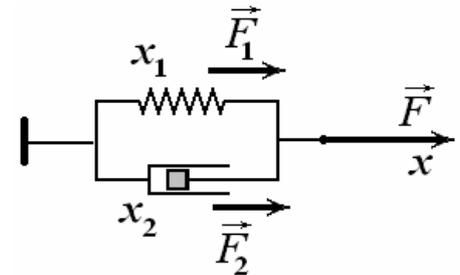


Задание 2. Реология

Часть 1. Демпфер и пружина.

1.1 Деформации элементов одинаковы, а внешняя сила уравнивается силой упругости пружины и демпфера:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x \\ F_1 + F_2 = F \end{cases} \quad (1).$$



Используя формулы (1) и (2) из условия задачи составим уравнение:

$$kx + av = F \quad (2),$$

Из которого получаем выражение для скорости

$$v = \frac{F - kx}{a} \quad (3).$$

Зависимость скорости деформации от величины деформации представляет собой отрезок прямой, пересекающей ось v в точке $\frac{F}{a}$ и ось x в точке $\frac{F}{k}$.

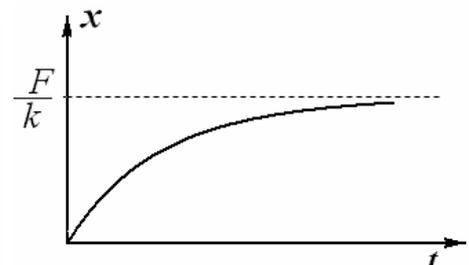
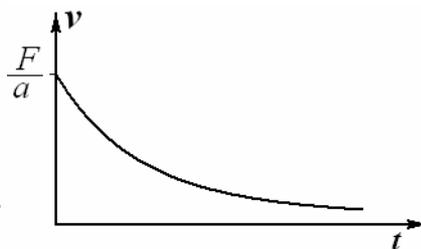
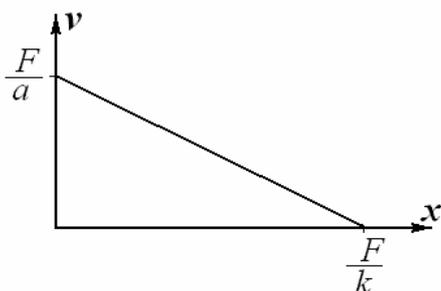
В начальный момент времени деформация отсутствует, $x = 0$, поэтому скорость деформации будет максимальна и равна:

$$v_0 = \frac{F}{a} \quad (4).$$

Затем, по мере увеличения деформации, скорость деформации будет становиться все меньше и меньше (асимптотически приближаться к нулю).

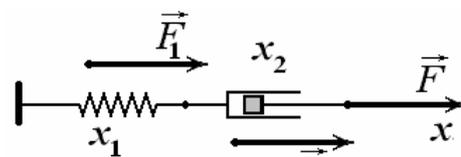
Величина деформации x вначале достаточно быстро увеличивается, а затем, т.к. скорость уменьшается, постепенно приближается своему равновесному значению:

$$x_p = \frac{F}{k} \quad (5).$$

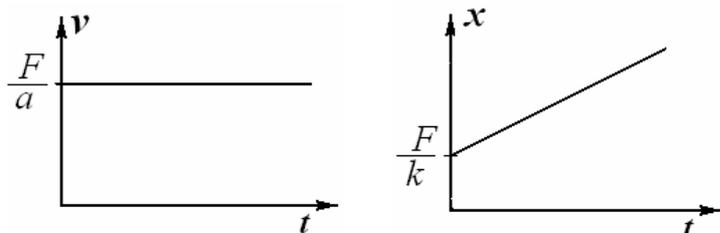


1.2 При последовательном соединении величина деформации равна сумме деформаций каждого элемента, а сила F оказывается приложенной и к пружине и к демпферу (элементы невесомые).

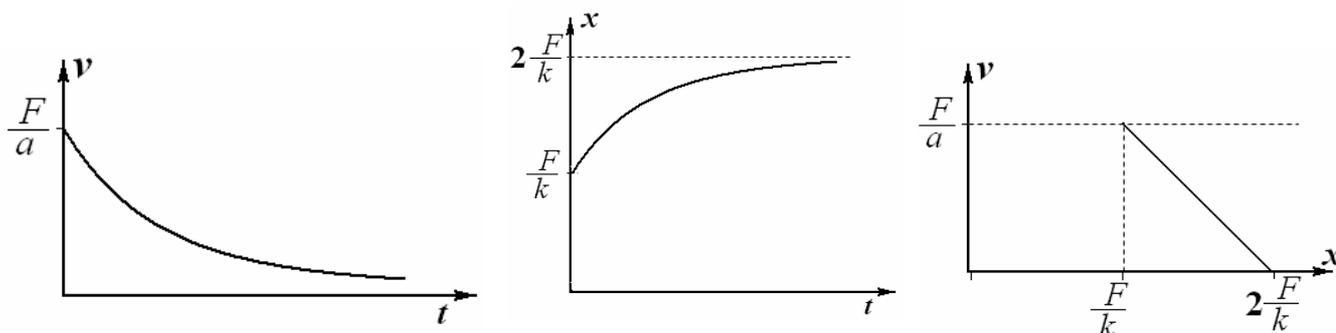
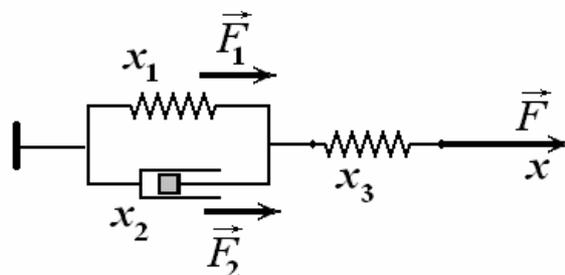
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ F_1 = F_2 = F \end{cases} \quad (6)$$



Следовательно, скорость деформации мгновенно достигнет значения (4) и не будет изменяться с течением времени. Величина деформации также мгновенно достигнет значения (5), а затем будет линейно увеличиваться.



1.3 Смешанное соединение приведет к тому, что в начальный момент времени произойдет мгновенная деформация на величину (5). Затем деформация будет повторять таковую, описанную в первом пункте задачи. Т.е. скорость в начальный момент будет равна (4), а затем будет уменьшаться. А деформация будет увеличиваться и приближаться к значению $2F/k$. На графике зависимости $v(x)$ также произойдет смещение на величину F/k .



Часть 2. Фрикцион и пружина.

При параллельном соединении фрикциона и пружины сила F уравнивается силой упругости пружины и силой трения возникающей внутри фрикциона. До тех пор пока значение силы не превысит f , деформация будет отсутствовать (отрезок 1 на графике $x(F)$). Когда сила трения внутри фрикциона превращается в силу трения скольжения (т.е. остается постоянной и равной f) между силами выполняется соотношение:

$$F = kx + f \quad (7).$$

Т.е. зависимость деформации от величины силы представляет собой линейную зависимость:

$$x = \frac{1}{k}F - \frac{f}{k} \quad (8).$$

Максимальная деформация составит величину:

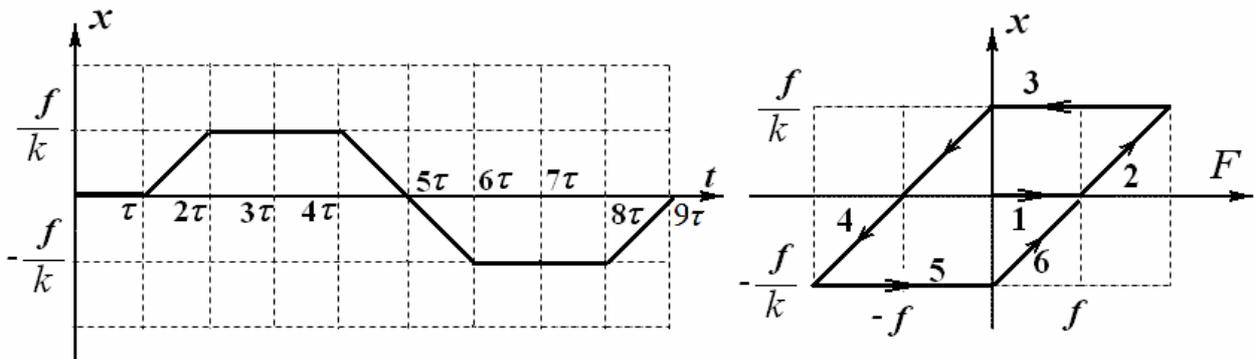
$$x_M = \frac{f}{k} \quad (9).$$

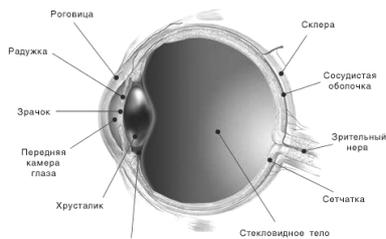
Этот процесс изображен отрезком 2 на графике.

Как только сила F начнет уменьшаться, сила трения в фрикционе снова станет силой трения покоя и деформация прекратится. По мере уменьшения приложенной силы, сила трения покоя будет уменьшаться и достигнет нулевого значения при $F = f$. Далее сила трения покоя поменяет направление на противоположное и начнет возрастать, однако деформация не начнется до тех пор пока сила трения не достигнет значения f , а это произойдет только в тот момент, когда внешняя сила F станет равной нулю. Только тогда пружина начнет сжиматься. Поэтому при уменьшении силы от $2f$ до нуля график зависимости деформации от силы будет представлять горизонтальный отрезок 3.

Далее внешняя сила начнет сжимать систему. Сила трения в фрикционе будет являться силой трения скольжения и будет препятствовать сжатию с силой f . При максимальной сжимающей силе $F = -2f$ деформация достигнет максимального значения, модуль которой равен (7). Этот процесс изображен отрезком 4.

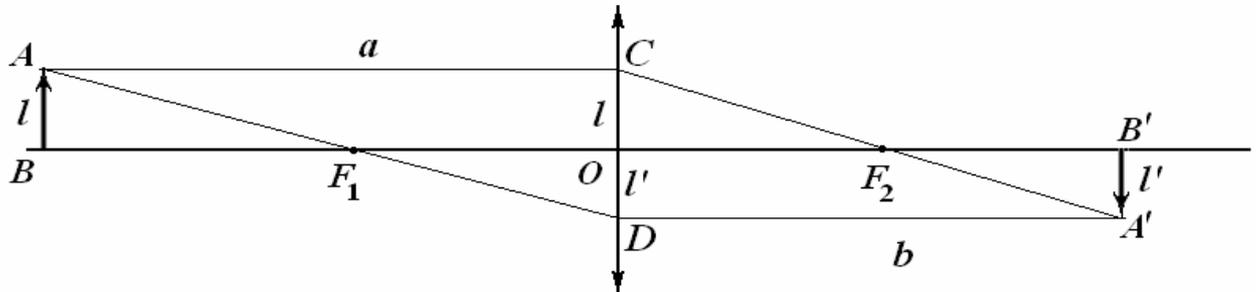
Затем возникнет аналогичная ситуация, и деформация будет оставаться неизменной до тех пор, пока модуль внешней силы не станет равным нулю, после чего деформация опять начнет линейно увеличиваться. Последние процессы изображаются отрезками 5 и 6 соответственно.





Задание 3. Глаз.

Часть 1. Введение.



1.1 Построение изображения проводится традиционно:

- от точки A проводим луч AC , параллельный главной оптической оси, после преломления луч пройдет через точку заднего фокуса CF_2 ;

- от точки A проводим луч, проходящий через точку переднего фокуса F_1 до пересечения с плоскостью линзы AF_1D , после преломления этот луч пойдет параллельно главной оптической оси; продлеваем его до пересечения с лучом CF_2 - точки A' , которая и является изображением точки A .

1.2 Обозначим размер предмета AB - l , а размер изображения $A'B'$ - l' . Из подобия треугольников ACD и F_1OD следует

$$\frac{l+l'}{a} = \frac{l'}{F}. \quad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников $A'CD$ и F_2OC следует

$$\frac{l+l'}{b} = \frac{l}{F}. \quad (2)$$

Складывая эти уравнения, получим требуемое соотношение

$$\frac{l+l'}{a} + \frac{l+l'}{b} = \frac{l+l'}{F} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (3)$$

1.3 Прежде всего, с помощью формулы линзы найдем расстояние от линзы до изображения предмета

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Leftrightarrow b = \frac{aF}{a-F}. \quad (4)$$

Теперь подставим в полученную формулу линзы (3), измененные расстояния от линзы до предмета и до изображения

$$\frac{1}{a+\Delta a} + \frac{1}{b+\Delta b} = \frac{1}{F}$$

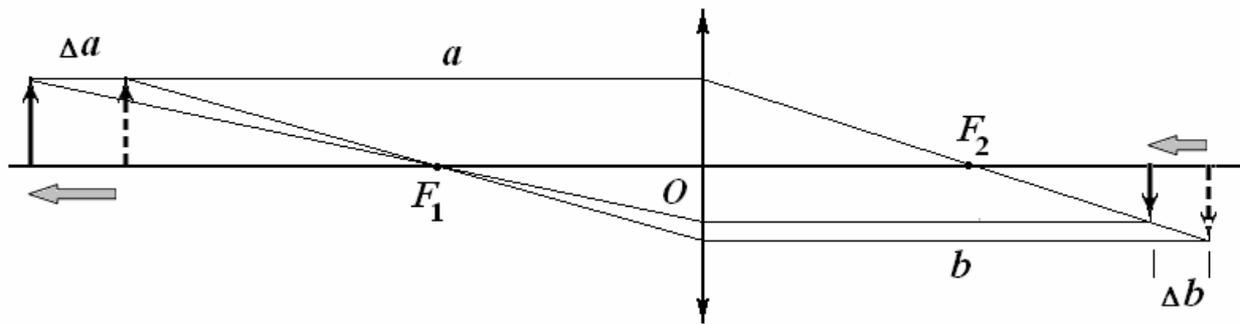
и воспользуемся приведенной в условии приближенной формулой для обоих слагаемых:

$$\frac{1}{a} - \frac{\Delta a}{a^2} + \frac{1}{b} - \frac{\Delta b}{b^2} = \frac{1}{F}.$$

Из этого соотношения (с учетом связи между исходными расстояниями) получим требуемый результат:

$$\frac{\Delta b}{b^2} = -\frac{\Delta a}{a^2} \Rightarrow \Delta b = -\Delta a \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\Delta a \left(\frac{F}{a-F} \right)^2. \quad (5)$$

Знак минус указывает, что при удалении предмета от линзы его изображение приближается к ней. Рисунок иллюстрирует полученный алгебраический результат.



Часть 2. Изменение фокусного расстояния глаза.

Наиболее отчетливое изображение получается в том случае, когда изображение предмета оказывается на экране (сетчатке), то есть когда расстояние от линзы до изображения равно диаметру глазного яблока

$$b = D. \quad (6)$$

2.1 Фокусные расстояния можно вычислить с помощью формулы линзы. В первом случае, когда $a_1 \rightarrow \infty$, фокусное расстояние зрачка равно диаметру глазного яблока $F_1 = D = 24 \text{ мм}$. Когда расстояние до рассматриваемого предмета равно a_0 , фокусное расстояние оказывается равным

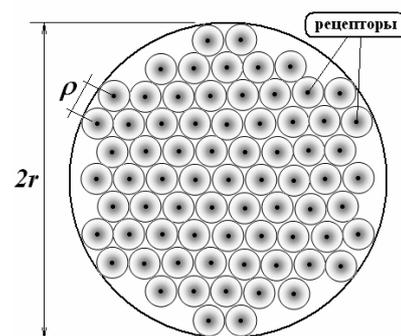
$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{D} = \frac{1}{F} \Rightarrow F_0 = \frac{a_0 D}{a_0 + D} = \frac{250 \cdot 24}{250 + 24} \approx 21,9 \text{ мм}.$$

Таким образом, фокусное расстояние зрачка изменяется в пределах

$$F_{\min} = 22 \text{ мм}, \quad F_{\max} = 24 \text{ мм}. \quad (7)$$

Часть 3. Глубина резкости.

В данной части задачи следует принять во внимание дискретную структуру рецепторов сетчатки. Поэтому сначала вычислим среднее расстояние ρ между отдельными рецепторами (колбочками). Можно считать, что рецепторы расположены по желтому пятну равномерно. Пусть на каждый рецептор приходится площадь $s = \frac{1}{4} \pi \rho^2$, а N_2 рецепторов покрывают всю площадь желтого пятна $S = \pi r^2$. Тогда расстояние радиус кружка, приходящегося на один рецептор, оценивается следующим образом



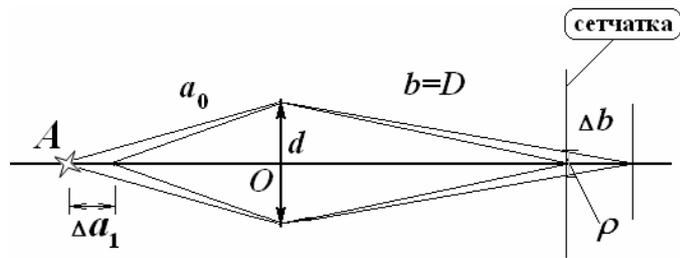
$$N_2 \frac{1}{4} \pi \rho^2 = \pi r^2 \Rightarrow \rho = \frac{2r}{\sqrt{N_2}} \approx \frac{2 \cdot 2,5}{\sqrt{6,0 \cdot 10^6}} \approx 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ мм}. \quad (8)$$

Интересно отметить, что расстояние между рецепторами не намного превышает длину световой волны видимого диапазона.

3.1 Если размер пятна на сетчатке меньше, чем среднее расстояние между рецепторами, глаз (точнее мозг) будет воспринимать это пятно как точку, то есть четкое изображение.

Следовательно, положение изображения, формируемого зрачком, может не попадать точно на сетчатку, а отстоять от нее на некотором расстоянии Δb , таком, чтобы размер пятна на экране не превышал ρ . Рисунок иллюстрирует ход лучей в такой ситуации (масштаб смещения сильно преувеличен). Диаметр зрачка обозначен $d = 4,0 \text{ мм}$.

Из рисунка следует, что предельное смещение изображения должно удовлетворять соотношению



$$\frac{\rho}{\Delta b} = \frac{d}{D + \Delta b}.$$

Учитывая, что $\Delta b \ll D$, получим

$$\Delta b = \frac{D\rho}{d}. \quad (9)$$

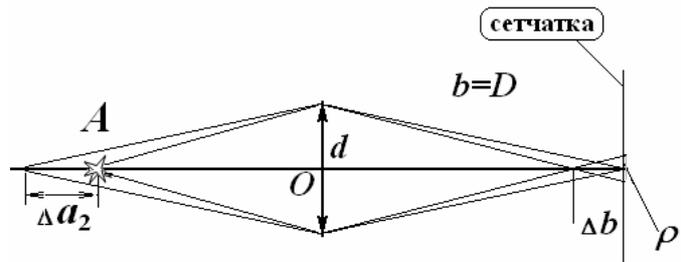
Теперь можно воспользоваться соотношением (5) для определения возможного смещения рассматриваемого предмета

$$\frac{\Delta b}{b^2} = -\frac{\Delta a}{a^2} \Rightarrow \Delta a_1 = -\Delta b \left(\frac{a}{b}\right)^2 = -\rho \frac{D}{d} \left(\frac{a_0}{D}\right)^2 = -2,0 \cdot 10^{-3} \frac{24}{4,0} \left(\frac{250}{24}\right)^2 \approx -1,3 \text{ мм}. \quad (10)$$

3.2 В этом случае решение полностью аналогично, что подтверждается рисунком хода лучей при удалении предмета.

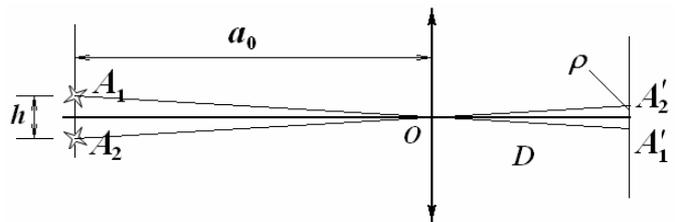
Поэтому

$$\Delta a_2 \approx 1,3 \text{ мм}. \quad (11)$$

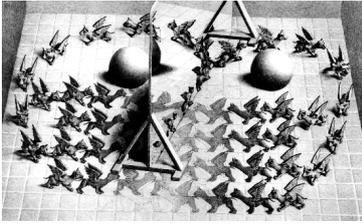


Часть 4. Разрешающая способность.

В этом случае расстояние между изображениями $A'_1 A'_2 \leq \rho$ двух точек должно быть больше, чем среднее расстояние между рецепторами ρ . Положения изображений A'_1 и A'_2 проще всего найти, проведя лучи через оптический центр зрачка O . Из подобия треугольников находим минимальное расстояние



$$\frac{h}{a_0} = \frac{\rho}{D} \Rightarrow h = \rho \frac{a_0}{D} = 2,0 \cdot 10^{-3} \frac{250}{24} \approx 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ мм}. \quad (11)$$



Задание 1. Оптико-механическая аналогия.

1. Движение тела в поле тяжести.

1.1 Решение данной части задачи хорошо известно. Так как ускорение направлено вдоль оси Oy , то закон равноускоренного движения имеет вид

$$\begin{cases} x = v_0 t \sin \alpha_0 \\ y = v_0 t \cos \alpha_0 - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (1)$$

1.2 Уравнение траектории получим, исключив из закона движения время t :

$$t = \frac{x}{v_0 \sin \alpha_0} \Rightarrow y = v_0 \cos \alpha_0 \frac{x}{v_0 \sin \alpha_0} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \sin \alpha_0} \right)^2.$$

После упрощения получим функцию

$$y = x \operatorname{ctg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \sin^2 \alpha_0} x^2, \quad (2)$$

описывающую параболическую траекторию движения.

1.3 Выражения для дальности полета и максимальной высоты подъема также хорошо известны:

$$S = \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{2g}. \quad (3)$$

1.4 Можно заметить, что произведение модуля скорости на синус угла α является проекцией скорости на горизонтальную ось Ox : $v \sin \alpha = v_x$, которая остается неизменной в процессе движения, так как нет внешних сил, изменяющих эту проекцию скорости.

Таким образом, искомой функцией $f(y)$ может служить модуль скорости тела, который может быть найден из закона сохранения энергии

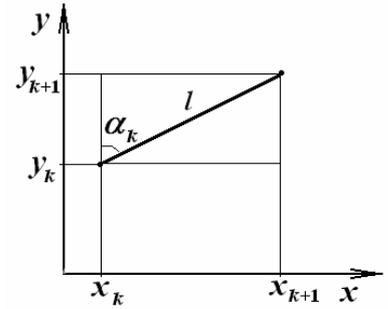
$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} = v_0 \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} y}. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (1), приведенное в условии задачи, может быть записано в виде

$$\sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} y} \sin \alpha = \sin \alpha_0 \quad (5)$$

1.5 Основная идея заключается в разбиении траектории на малые участки, предпочтительнее постоянной длины l . Допустим, мы нашли точку траектории с координатами (x_k, y_k) . По известной зависимости угла координаты y , можно рассчитать угол, под которым будет направлен следующий малый участок траектории $\alpha_k = \alpha(y_k)$. Координаты конца очередного отрезка рассчитываются по формулам

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + l \sin \alpha_k \\ y_{k+1} = y_k + l \cos \alpha_k \end{cases} \quad (6)$$



При заданных начальных координатах эта процедура позволяет однозначно построить всю траекторию движения. Таким образом, зависимость $\alpha(y)$ однозначно определяет траекторию движения.

Примечание. Можно показать, что задание функции $\alpha(y)$ позволяет записать дифференциальное уравнение, имеющее однозначное решение.

2. Луч света в слоисто-неоднородной среде.

Запишем закон преломления света в слоисто неоднородной среде

$$n(y) \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0,$$

И подставим выражение для зависимости показателя преломления от координаты y

$$n_0 \sqrt{1 - \gamma y} \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0. \quad (7)$$

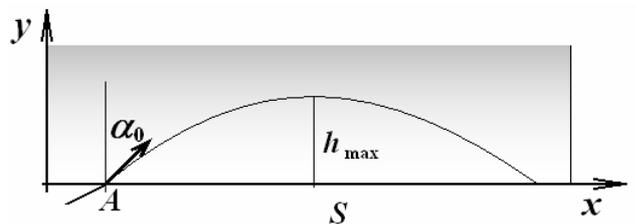
Это уравнение полностью совпадает с уравнением (5), определяющим траекторию движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Заметим, что в механике аналогом показателя преломления служит модуль скорости тела – неожиданный результат: там, где в оптике скорость луча возрастает, в механике должна убывать!

Для полного соответствия между уравнениями (5) и (7) следует положить

$$\gamma = \frac{2g}{v_0^2}. \quad (8)$$

Следовательно, траектория луча, описываемая уравнением (7), также является параболой, с параметрами, определяемыми формулами (3). Поэтому для решения данной части задачи достаточно переписать формулы (4) с соответствующей заменой (8)



$$\begin{aligned} S &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g} \Rightarrow S = \frac{4 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\gamma} \\ h_{\max} &= \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{2g} \Rightarrow h_{\max} = \frac{\cos^2 \alpha_0}{\gamma} \end{aligned} \quad (9)$$

Примечание. Максимальную глубину проникновения света в брусок, можно найти из условия полного внутреннего отражения. На максимальной глубине проникновения $\sin \alpha = 1$, поэтому

$$n_0 \sqrt{1 - \gamma} \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 - \gamma} h_{\max} = \sin \alpha_0 \Rightarrow h_{\max} = \frac{1 - \sin^2 \alpha_0}{\gamma} = \frac{\cos^2 \alpha_0}{\gamma}.$$

Найти подобным образом расстояние, на котором луч выйдет из бруска затруднительно.

3. Круговая орбита.

3.1 При движении по круговой орбите выполняется соотношение, следующее из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = G \frac{Mm}{r_0^2}. \quad (10)$$

Массу планеты можно выразить из формулы для ускорения свободного падения на поверхности планеты

$$g = G \frac{M}{R^2}. \quad (11)$$

Из этих выражений определяем соотношение между скоростью спутника и радиусом его круговой орбиты

$$v_0^2 = \frac{gR^2}{r_0}. \quad (12)$$

Откуда радиус орбиты

$$r_0 = \frac{gR^2}{v_0^2}. \quad (13)$$

3.2 Зависимость скорости спутника от его расстояния до центра можно выразить из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r}. \quad (14)$$

С учетом соотношений (11) и (12), формула для скорости приобретает вид

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{r_0} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r} \Rightarrow -\frac{v_0^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r} \Rightarrow$$

$$v = v_0 \sqrt{\frac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}. \quad (15)$$

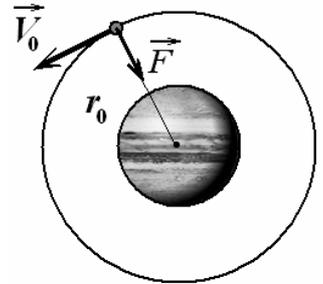
3.3 Искомое соотношение проще вычислить, с помощью производной

$$\Delta v = v'_r \Delta r = \frac{v_0}{2 \sqrt{\frac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}} \left(-\frac{2gR^2}{v_0^2 r^2} \right) \Delta r = -\frac{v_0}{\sqrt{\frac{2gR^2}{v_0^2 r} - 1}} \left(\frac{gR^2}{v_0^2 r^2} \right) \Delta r. \quad (16)$$

3.4 Полагая $r = r_0 = \frac{gR^2}{v_0^2}$, получим, что $\frac{gR^2}{v_0^2 r} = 1$. В этом случае из формулы (16) следует

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{v_0}{r_0}, \quad (17)$$

что и требовалось доказать.



4. Луч света в осесимметричной неоднородной среде.

Проводя аналогию между оптикой и механикой (показатель преломления аналогичен скорости тела!), можно утверждать, что условием возможности существования кругового луча является условие

$$\frac{\Delta n}{\Delta r} = -\frac{n(r)}{r}. \quad (18)$$

Используя заданную зависимость показателя преломления от радиуса $n(r) = n_0(1 - \gamma r)$, найдем

$$\frac{\Delta n}{\Delta r} = -n_0\gamma.$$

Теперь из условия (18) определяем искомый радиус кругового луча

$$-n_0\gamma = -\frac{n_0(1 - \gamma r)}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{2\gamma}. \quad (19)$$

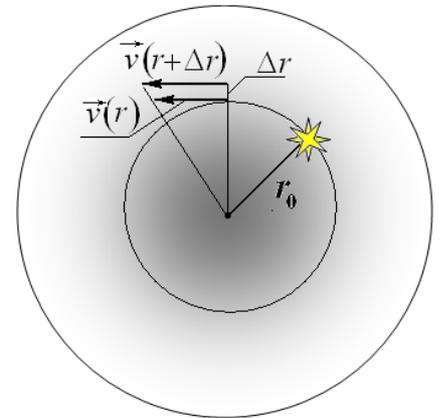
Примечание. Основное условия существования кругового луча (18) может быть получено и без использования оптико-механической аналогии. Фронт этого луча должен поворачиваться так, чтобы оставаться направленным радиально. Это возможно в том случае, если выполняется условие

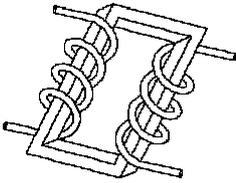
$$\frac{v(r + \Delta r)}{r + \Delta r} = \frac{v(r)}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r)}{r}.$$

Учитывая, что в «оптике» $v = \frac{c}{n}$ (из которого следует

$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{c}{n^2} \frac{\Delta n}{\Delta r}$), получим

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r)}{r} \Rightarrow -\frac{c}{n^2} \frac{\Delta n}{\Delta r} = \frac{c}{nr} \Rightarrow \frac{\Delta n}{\Delta r} = -\frac{n}{r}.$$





Задание 2. Электрические качели.

Часть первая. Голчок.

Обозначим площадь пластин конденсатора буквой S . Тогда его емкость:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (1).$$

1.1 При увеличении расстояния между пластинами на величину Δx , емкость конденсатора становится равной:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d + \Delta x} \quad (2).$$

Относительное изменение емкости:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{C_1}{C_0} - 1 = \frac{d}{d + \Delta x} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{\Delta x}{d}} - 1 \approx -\frac{\Delta x}{d} = -\delta \quad (3).$$

Причем это соотношение будет справедливо при любом d .

1.2 Т.к. перемещение мгновенное, заряд на конденсаторе не изменяется, поэтому:

$$C_0 U_0 = C_1 U_1 \quad (4),$$

т.е.

$$U_1 = U_0 \frac{C_0}{C_1} \quad (5).$$

Относительно изменение напряжения:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{U_1 - U_0}{U_0} = \frac{C_0}{C_1} - 1 = \delta \quad (6).$$

Выражения для энергий:

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C_0}, \quad W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} \quad (7),$$

где Q - заряд конденсатора.

Поэтому:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W_1 - W_0}{W_1} = 1 - \frac{W_0}{W_1} = 1 - \frac{C_1}{C_0} = \delta \quad (8).$$

Периоды колебаний в контуре до и после перемещения равны соответственно:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC_0}, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1} \quad (9).$$

Относительное изменение:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_1 - T_0}{T_0} = \sqrt{\frac{C_1}{C_0}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \delta}} - 1 \approx -\frac{1}{2}\delta \quad (10).$$

1.3 Т.к. относительные изменения напряжения и энергии одинаковы (выражения (6) и (8)), то можно записать следующее равенство:

$$\frac{\Delta W}{\Delta U} = \frac{W}{U} \quad (11),$$

из которого следует, что энергия пропорциональна напряжению, а их отношение остается постоянным:

$$\frac{W}{U} = \text{const} \quad (12).$$

1.4 Аналогично, используя выражения (8) и (10), получаем:

$$\frac{\Delta W}{\Delta T} = -2 \frac{W}{T} \quad (13),$$

т.е. $W \sim T^{-2}$, следовательно:

$$WT^2 = const \quad (14).$$

Часть 2. Раскачка.

2.1 При возвращении пластин на первоначальное расстояние, энергия конденсатора не изменяется, т.к. эта операция проводится при нулевом напряжении на пластинах конденсатора. Поэтому два раза за период колебаний энергия увеличивается в $(1 + \delta)$ раз.

Количество перемещений находит из условия:

$$(1 + \delta)^n = 10 \quad (15).$$

Получаем:

$$n = \log_{1+\delta} 10 = \frac{\ln 10}{\ln(1 + \delta)} = 231,4 \approx 231 \quad (16).$$

Т.к. увеличение энергии происходит дважды за период, то время необходимое для увеличения энергии в 10 раз:

$$t = \frac{n}{2} T_0 \approx 116 T_0 \quad (17).$$

2.2 Т.к. сопротивление небольшое, то на протяжении половины периода напряжение изменяется по синусоидальному закону. Тогда средняя мощность, выделяемая на сопротивлении:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{R} \quad (18).$$

Для поддержания колебаний необходимо, чтобы увеличение энергии за половину периода полностью компенсировало тепловые потери:

$$\frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{R} \frac{T_0}{2} = \delta W_0 = \delta \frac{C_0 U_{\max}^2}{2} \quad (19).$$

Поэтому:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{T_0}{RC_0} \quad (20).$$

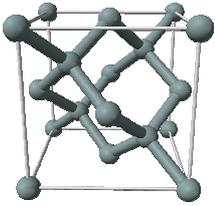
Часть 3. Сбой по согласованию.

Предположим, что в начальный момент времени все происходит так, как было описано в предыдущих пунктах задачи. Затем, т.к. частоты не совпадают, увеличение расстояния между пластинами будет происходить не в моменты максимального напряжения на конденсаторе. Соответственно и энергия будет увеличиваться не так значительно. С другой стороны, при уменьшении расстояния между пластинами при ненулевом значении напряжения на конденсаторе, энергия будет уменьшаться. В целом, энергия будет увеличиваться до тех пор, пока значение напряжения на конденсаторе при увеличении расстояния между пластинами, будет больше такого при уменьшении расстояния. Затем энергия системы будет постепенно уменьшаться. Максимальная скорость уменьшения будет в том случае, когда увеличение расстояния между пластинами происходит при нулевом напряжении на них. Затем процесс пойдет в обратную сторону. Потери начнут уменьшаться, а прибыль – расти. Полное время таких изменений определим следующим образом. Обозначим за n , количество полупериодов, необходимых для возникновения первоначальной ситуации. Тогда можно записать следующее условие:

$$n \Delta t = \frac{T_0}{2} \quad (21).$$

Тогда искомый промежуток времени равен:

$$t = \frac{T_0}{2} n = \frac{T_0^2}{4 \Delta t} \quad (22).$$



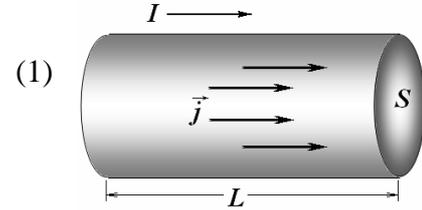
Задание 3. Полупроводник.

1.1 По закону Ома для участка цепи сила тока равна

$$I = \frac{U}{R}.$$

Подставляя известные формулы:

- сопротивления проводника $R = \rho \frac{L}{S}$;
- связи напряжения и напряженности $U = EL$;
- связи силы и плотности тока $I = jS$

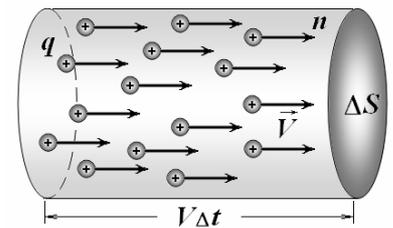


в уравнение (1), получим $jS = \frac{EL}{\rho \frac{L}{S}}$, откуда следует, что $j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$. Очевидно, что

направление движения заряженных частиц совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля, поэтому

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2)$$

1.2 За время Δt площадку площадью ΔS , расположенную перпендикулярно векторам скоростей частиц, пересекут частицы, находящиеся от площадки на расстоянии $v\Delta t$. Объем области, опирающейся на выделенную площадку, частицы в котором пересекут площадку равен $\Delta V = v\Delta t \cdot \Delta S$, число частиц в нем $N = n\Delta V = nv\Delta t \cdot \Delta S$, они переносят заряд $\Delta Q = qN = qnv\Delta t \cdot \Delta S$. По определению плотности тока, получим



$$j = \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S} = qnv. \quad (3)$$

1.3 Приравнявая выражения для плотности тока (2) и (3), получим

$$env = \sigma E. \quad (4)$$

Из этой формулы выразим среднюю скорость движения частиц $v = \frac{\sigma}{en} E$. Сравнивая это выражение с определением подвижности $\langle v \rangle = \mu E$, находим, что проводимость металла находится по формуле

$$\sigma = en\mu. \quad (5)$$

2.1 Для вычисления удельной проводимости полупроводника необходимо учесть, что ток обусловлен движением как свободных электронов, так и дырок. Не смотря на то, что электроны и дырки движутся в противоположных направлениях, электрические токи, обусловленные их движением, направлены в одну сторону (в сторону движения положительно заряженных дырок). С помощью формулы (5) находим

$$\sigma_0 = e(n_i \mu_n + p_i \mu_p) = e\bar{n}(\mu_n + \mu_p). \quad (6)$$

При подстановке численных значений из Таблицы справочных материалов их необходимо перевести в единицы системы СИ:

$$\sigma_0 = e\bar{n}(\mu_n + \mu_p) = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1,0 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3} (1,4 \cdot 10^3 + 0,45 \cdot 10^3) \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} \approx$$

$$\approx 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \quad (7)$$

2.2 Из приведенной в условии формулы

$$\sigma = \sigma_0(1 + \gamma \Delta T)$$

Следует, что температурный коэффициент равен

$$\gamma = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta T},$$

При малых изменениях температуры отношение приращений следует заменить соответствующей производной¹ $\gamma = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta T} = \frac{\sigma'}{\sigma_0}$.

При повышении температуры увеличивается концентрация носителей тока, что и приводит к увеличению проводимости. Так проводимость пропорциональна концентрации носителей, то

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta T} = \frac{\sigma'}{\sigma_0} = \frac{1}{\bar{n}} \frac{\Delta \bar{n}}{\Delta T} = \frac{\bar{n}'}{\bar{n}}. \quad (8)$$

Выражение для равновесной концентрации приведено в условии задачи. Указанное отношение проще вычислить с помощью известного математического приема (хотя можно пользоваться и простыми правилами вычисления производных):

$$\bar{n} = AT^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right) \Rightarrow \ln \bar{n} = \ln A + \frac{3}{2} \ln T - \frac{E_g}{kT} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{n}'}{\bar{n}} = \frac{3}{2} \frac{1}{T} + \frac{E_g}{kT^2} = \frac{1}{T} \left(\frac{3}{2} + \frac{E_g}{kT} \right). \quad (9)$$

При расчетах необходимо правильно перевести электрон-вольты в джоули с помощью соотношения $E_g [\text{Дж}] = eE_g [\text{эВ}]$:

$$\gamma = \frac{1}{T} \left(\frac{3}{2} + \frac{E_g}{kT} \right) = \frac{1}{300 \text{ К}} \left(\frac{3}{2} + \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,12}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \right) \approx 0,15 \text{ К}^{-1}. \quad (10)$$

3.1.1 Красной границе фотоэффекта соответствуют фотоны, энергия которых равна ширине энергетической зоны

$$h\nu_{\text{кр.}} = E_g. \quad (11)$$

Расчет длины волны не представляет труда

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{кр.}}} = E_g \Rightarrow \lambda_{\text{кр.}} = \frac{hc}{E_g} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1,12 \text{ эВ}} \approx 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1,0 \text{ мкм} \quad (12)$$

3.1.2 Преобразуем выражение для коэффициента поглощения к виду, удобному для дальнейших расчетов:

¹ Для тех, кто не знаком с производными: можно также воспользоваться приближенными формулами для расчета изменения функций.

$$\alpha = B(h\nu - E_g)^2 = BE_g^2 \left(\frac{hc}{E_g \lambda} - 1 \right)^2 = b \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2, \quad (13)$$

Здесь $b = BE_g^2 = 3,9 \cdot 10^3 \frac{сМ^{-1}}{эВ^2} (1,12эВ)^2 = 4,9 \cdot 10^5 м^{-1}$ - постоянная величина; $\lambda_{кр.} = 1,0 мкм$ - длина волны красной границы фотоэффекта.

3.1.3 В единицу времени на пластинку падает $\frac{I_0}{h\nu} S$ фотонов (S - площадь поверхности), из них

$\frac{I_0}{h\nu} S \cdot \alpha h$ поглощается, что приводит к появлению $\frac{I_0}{h\nu} S \cdot \alpha h \cdot \eta$ электронно-дырочных пар.

Следовательно, в единице объема в единицу времени появляется $G_r = \frac{1}{V} \left(\frac{I_0}{h\nu} S h \alpha \eta \right) = \frac{I_0 \lambda}{hc} \alpha \eta$ пар электронов (это есть скорость генерации).

3.2.1 Концентрация электронов в проводнике изменяется в ходе генерации и регенерации, поэтому уравнение изменения концентрации может быть записано в виде

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = G_T + G_r - R \quad (14)$$

3.2.2 При отсутствии освещения скорость изменения концентрации носителей тока можно представить в форме уравнения

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = G_T - R, \quad (15)$$

Представим концентрации носителей тока в виде $n = \bar{n} + n_1$. Скорость рекомбинации пропорциональна квадрату концентрации свободных электронов, поэтому запишем $R = rn^2 = r(\bar{n} + n_1)^2$, где r - некоторый коэффициент пропорциональности. Теперь уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\Delta(\bar{n} + n_1)}{\Delta t} = G_T - r(\bar{n} + n_1)^2 = G_T - r\bar{n}^2 - 2r\bar{n} \cdot n_1 - rn_1^2. \quad (16)$$

При $\bar{n} \gg n_1$ можно пренебречь слагаемым пропорциональным n_1^2 . Кроме того, равновесная концентрация носителей удовлетворяет условию $G_T = r\bar{n}^2$. Таким образом, уравнение (12) приобретает требуемый вид

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta t} = -2r\bar{n} \cdot n_1. \quad (17)$$

Введенный коэффициент рекомбинации выражается через время жизни электронно-дырочной пары

$$2r\bar{n} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow r = \frac{1}{2\bar{n}\tau}. \quad (18)$$

Таким образом, скорость тепловой генерации выражается формулой

$$G_T = r\bar{n}^2 = \frac{1}{2\tau} \bar{n}, \quad (19)$$

а скорость рекомбинации

$$R = rn^2 = \frac{n^2}{2\bar{n}\tau}. \quad (20)$$

3.2.4 В стационарном режиме концентрация свободных электронов не изменяется, следовательно, в этом случае выполняется соотношение

$$G_T + G_r - R = 0. \quad (21)$$

Подставим в это уравнение полученные ранее выражения для скоростей потоков и коэффициента поглощения

$$\frac{1}{2\tau} \bar{n} + \frac{I_0 \lambda}{hc} \alpha \eta - \frac{n^2}{2\bar{n} \tau} = 0.$$

Из этого уравнения получаем

$$\frac{n^2}{\bar{n}^2} = 1 + 2 \frac{I_0 \lambda}{hc \bar{n}} \alpha \eta \tau = 1 + 2 \frac{I_0 \lambda}{hc \bar{n}} \eta \tau b \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2.$$

Для упрощения расчетов перепишем данное выражение в виде

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{\bar{n}^2} &= 1 + 2 \frac{I_0 \lambda}{hc \bar{n}} \eta \tau b \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2 = \\ &= 1 + 2 \frac{I_{00} \lambda_{кр.}}{hc \bar{n}} \eta \tau b \frac{I_0}{I_{00}} \frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2 = 1 + W \frac{I_0}{I_{00}} \frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

где в одном безразмерном коэффициенте объединились все параметры кремния

$$W = 2 \frac{I_{00} \lambda_{кр.}}{hc \bar{n}} \eta \tau b = 2 \frac{10^4 \frac{Bm}{m^2} \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} m}{6,63 \cdot 10^{-34} Дж \cdot c \cdot 3,0 \cdot 10^8 \frac{M}{c} \cdot 1,0 \cdot 10^{16} m^{-3}} \cdot 0,1 \cdot 3,0 \cdot 10^{-3} c \cdot 4,9 \cdot 10^5 m^{-1} =$$

$$= 1,5 \cdot 10^9$$

(здесь $I_{00} = 1 \frac{Bm}{cm^2} = 10^4 \frac{Bm}{m^2}$ - единица измерения интенсивности).

Окончательно получаем искомую формулу

$$\frac{n}{\bar{n}} = \sqrt{1 + W \frac{I_0}{I_{00}} \frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2}. \quad (23)$$

3.3.1 Сила тока через фоторезистор при постоянном напряжении на нем пропорциональна проводимости фоторезистора, которая в свою очередь пропорциональна концентрации носителей тока. Следовательно, формула (19) также описывает изменение силы тока

$$\frac{i}{i_0} = \sqrt{1 + W \frac{I_0}{I_{00}} \frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2}. \quad (24)$$

3.3.2 Подставляя значение длины волны в выражение (20), вычислим значение коэффициента при интенсивности

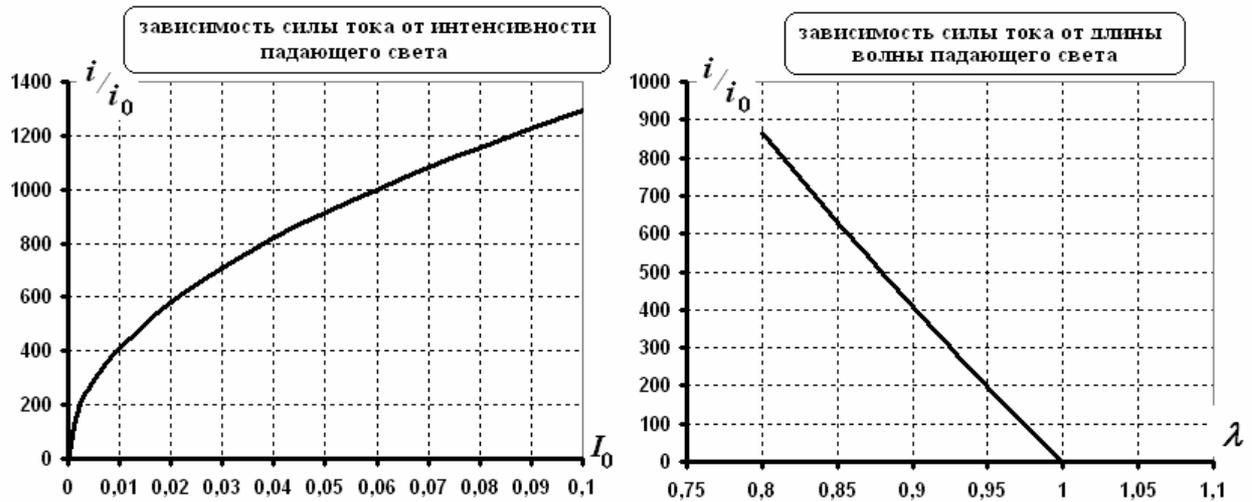
$$W \frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2 = 1,5 \cdot 10^9 \cdot 0,9 \cdot \left(\frac{1}{0,9} - 1 \right)^2 \approx 1,67 \cdot 10^7.$$

Такое большое значение этого коэффициента позволяет пренебречь 1 под корнем, то есть сила тока пропорциональна корню квадратному из интенсивности падающего света. График этой зависимости показан на рисунке.

3.3.3 В данном случае требуется построить график функции

$$\frac{i}{i_0} = \sqrt{1 + 1,5 \cdot 10^7 \frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2}. \quad (25)$$

При построении следует учесть, что при $\lambda > \lambda_{кр.}$ фотоэффект отсутствует, поэтому в этой



области $i = i_0$. При $\lambda < \lambda_{кр.}$ искомая зависимость практически линейна (см. рисунок).