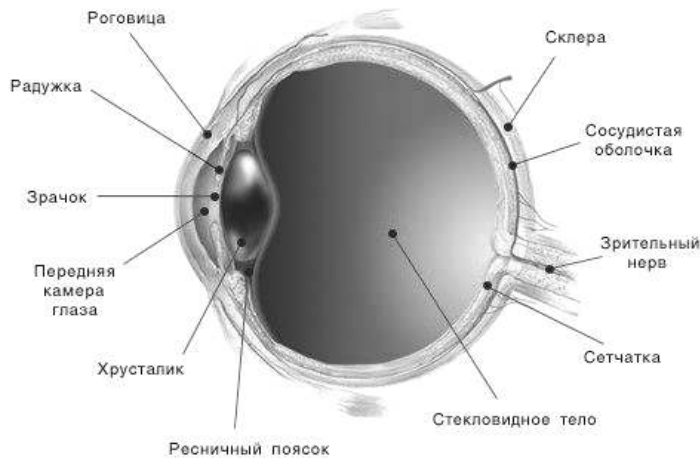


Глаз

Условие



Задание 3. Глаз

Глаз человека представляет собой уникальный оптический прибор, посредством которого мозг получает зрительную информацию. Согласно усредненным данным глазное яблоко можно считать шаром диаметра $D = 24$ мм, который заполнен стекловидным телом 2. Основным оптическим элементом глаза является хрусталик 3, который можно считать тонкой линзой с переменным фокусным расстоянием. Процесс изменения фокусного расстояния (оптической силы) глаза называется аккомодацией. В процессе аккомодации человек

может с сохранением резкости достаточно быстро переводить взгляд с более удаленных предметов на менее удаленные (или наоборот).

Описание оптических свойств глаза чрезвычайно сложно, поэтому мы рассмотрим предельно упрощенную оптическую схему глаза, состоящую из линзы переменного фокусного расстояния (моделирующую хрусталик) находящуюся в воздухе, и плоского экрана (моделирующего сетчатку), расположенного на расстоянии от линзы равном диаметру глазного яблока D и перпендикулярного главной оптической оси линзы. Диаметр линзы примем равным диаметру хрусталика $d = 4,0$ мм.

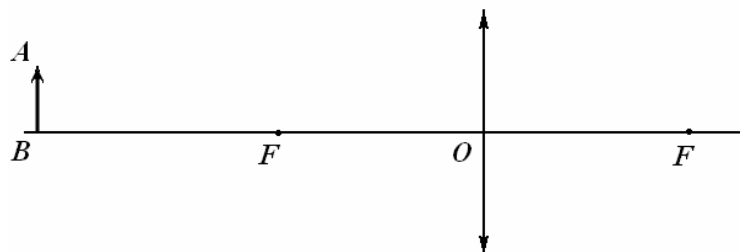


Часть 1. Введение.

Предмет AB находится на расстоянии a от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F .

1.1 Постройте изображение предмета в линзе.

1.2 Используя сделанное построение, покажите, что расстояние от предмета до



линзы a , расстояние от линзы до изображения b и фокусное расстояние линзы F связаны соотношением (которое называется формулой линзы¹)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

1.3 Пусть предмет находится на расстоянии a от тонкой линзы с фокусным расстоянием F ($a > F$). На какое расстояние Δb и в какую сторону переместится изображение предмета, если расстояние a увеличится на малую величину Δa .

Подсказка. Рекомендуем использовать приближенную формулу, справедливую при малых Δa :

¹ Если Вам не удалось доказать справедливость формулы тонкой линзы, то используйте ее как «очевидный» факт при выполнении последующих пунктов задачи.

$$\frac{1}{a + \Delta a} = \frac{1}{a \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)} \approx \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\Delta a}{a}\right) \quad (2)$$

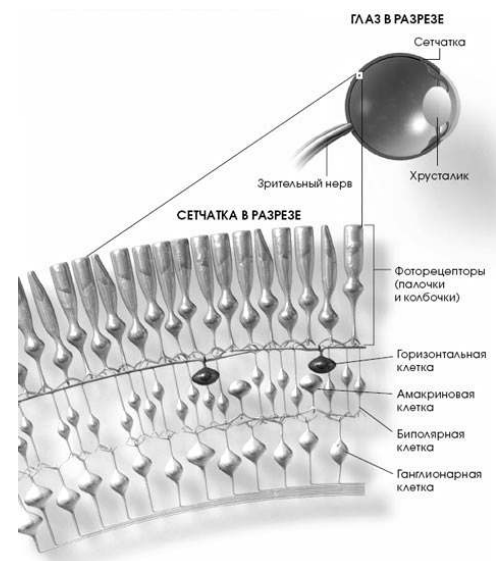
Часть 2. Изменение фокусного расстояния глаза.

Согласно физиологическим исследованиям, благодаря процессу аккомодации глаза здоровый человек может с незначительной временной задержкой переводить взгляд с предметов, расположенных «на бесконечности» $a_1 = \infty$ на предметы, расположенные на расстоянии $a_0 = 25$ см, при котором можно наиболее отчетливо рассмотреть мелкие детали предмета без перенапряжения мышц хрусталика.

2.1 Вычислите пределы ($F_{\min}$ и $F_{\max}$) изменения фокусного расстояния хрусталика глаза при этом.

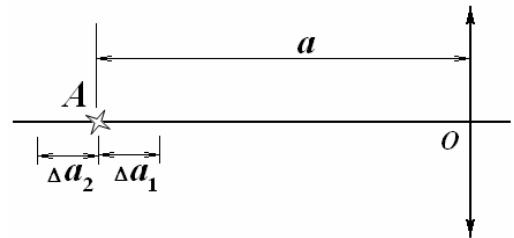
Часть 3. Глубина резкости.

Сетчатка глаза человека содержит светочувствительные клетки (фоторецепторы) двух типов: колбочки (для восприятия цветного изображения) и палочки (для восприятия черно-белого (сумеречного) изображения). Среднее количество колбочек в сетчатке глаза $N_1 = 6,0 \cdot 10^6$, палочек $N_2 = 1,2 \cdot 10^8$. В центральной ямке (желтом пятне) глазного яблока концентрация колбочек на единицу площади максимальна, а палочек там практически нет. Примем, что все колбочки расположены в пределах желтого пятна, радиус которого $r = 2,5$ мм. Палочки расположены пределами желтого пятна на задней полусфере глазного яблока. Каждый фоторецептор создает изображение независимо от других фоторецепторов.



Будем считать, что точка видна резко, если она проецируется на одну колбочку в желтом пятне.

Пусть точка A находится на главной оптической оси на расстоянии $a_0 = 25$ см от глаза.



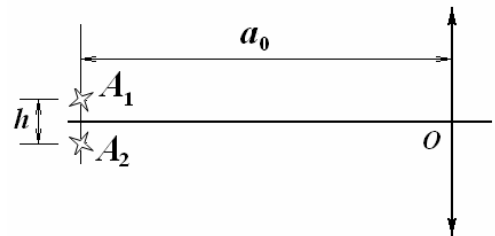
3.1 На какое расстояние Δa_1 ее можно приблизить к глазу, чтобы изображение осталось резким?

3.2 На какое расстояние Δa_2 ее можно удалить от глаза (без изменения фокусного расстояния хрусталика), чтобы изображение осталось резким?

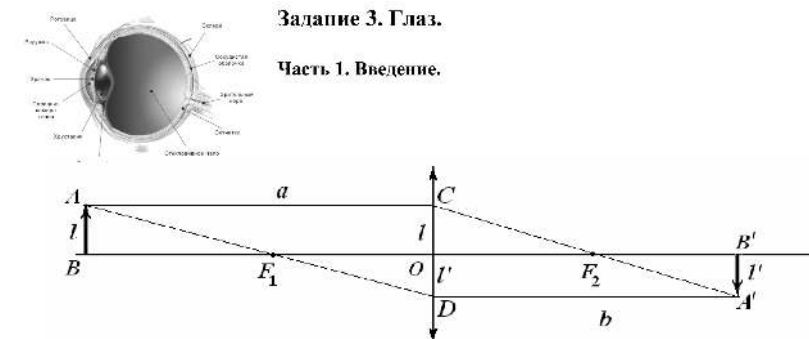
Часть 4. Разрешающая способность.

Две точки находятся на расстоянии $a_0 = 25$ см от хрусталика глаза на малом расстоянии h друг от друга.

4.1 При каком расстоянии минимальном расстоянии h эти точки будут видны раздельно?



Решение



1.1 Построение изображения проводится традиционно:

Задание 3. Глаз.

Часть 1. Введение.

1.1 Построение изображения проводится традиционно: - от точки A проводим луч AC , параллельный главной оптической оси, после преломления луч пройдет через точку заднего

фокуса CF_2 ; - от точки A проводим луч, проходящий через точку переднего фокуса F_1 до пересечения с плоскостью линзы AF_1D , после преломления этот луч пойдет параллельно главной оптической оси; продлеваем его до пересечения с лучом CF_2 - точки A' , которая и является изображением точки A .

1.2 Обозначим размер предмета AB - l , а размер изображения $A'B'$ - l' . Из подобия треугольников ACD и F_1OD следует

$$\frac{l + l'}{a} = \frac{l'}{F}. \quad (1)$$

Аналогично, из подобия треугольников $A'CD$ и F_2OC следует

$$\frac{l + l'}{b} = \frac{l}{F}. \quad (2)$$

Складывая эти уравнения, получим требуемое соотношение

$$\frac{l + l'}{a} + \frac{l + l'}{b} = \frac{l + l'}{F} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (3)$$

1.3 Прежде всего, с помощью формулы линзы найдем расстояние от линзы до изображения предмета

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Leftrightarrow b = \frac{aF}{a - F}. \quad (4)$$

Теперь подставим в полученную формулу линзы (3), измененные расстояния от линзы до предмета и до изображения

$$\frac{1}{a + \Delta a} + \frac{1}{b + \Delta b} = \frac{1}{F}$$

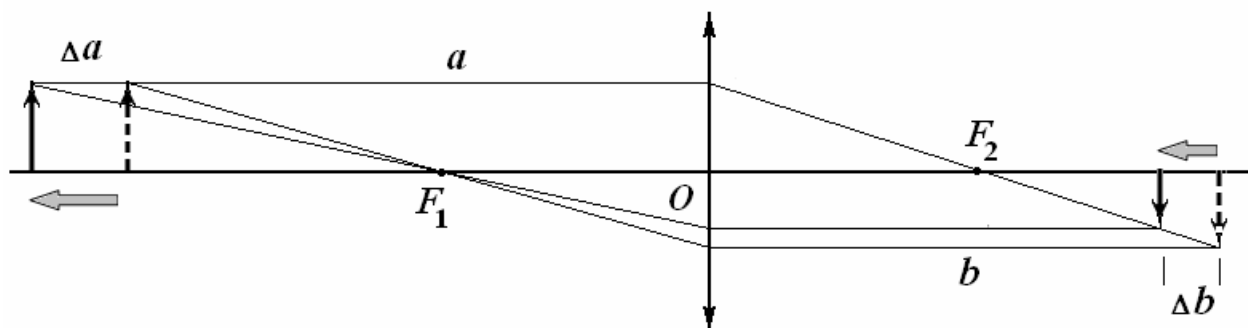
и воспользуемся приведенной в условии приближенной формулой для обоих слагаемых:

$$\frac{1}{a} - \frac{\Delta a}{a^2} + \frac{1}{b} - \frac{\Delta b}{b^2} = \frac{1}{F}.$$

Из этого соотношения (с учетом связи между исходными расстояниями) получим требуемый результат:

$$\frac{\Delta b}{b^2} = -\frac{\Delta a}{a^2} \Rightarrow \Delta b = -\Delta a \left(\frac{b}{a} \right)^2 = -\Delta a \left(\frac{F}{a - F} \right)^2. \quad (5)$$

Знак минус указывает, что при удалении предмета от линзы его изображение приближается к ней. Рисунок иллюстрирует полученный алгебраический результат.



Часть 2. Изменение фокусного расстояния глаза.

Наиболее отчетливое изображение получается в том случае, когда изображение предмета оказывается на экране (сетчатке), то есть когда расстояние от линзы до изображения равно диаметру глазного яблока

$$b = D. \quad (6)$$

2.1 Фокусные расстояния можно вычислить с помощью формулы линзы. В первом случае, когда $a_1 \rightarrow \infty$, фокусное расстояние зрачка равно диаметру глазного яблока $F_1 = D = 24$ мм. Когда расстояние до рассматриваемого предмета равно a_0 , фокусное расстояние оказывается равным

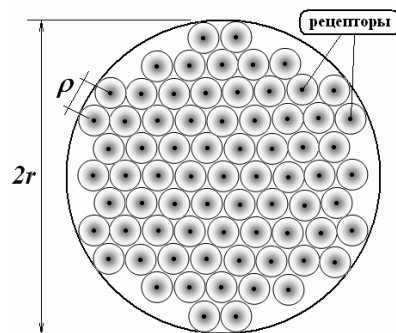
$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{D} = \frac{1}{F} \Rightarrow F_0 = \frac{a_0 D}{a_0 + D} = \frac{250 \cdot 24}{250 + 24} \approx 21,9 \text{ мм.}$$

Таким образом, фокусное расстояние зрачка изменяется в пределах

$$F_{\min} = 22 \text{ мм}, \quad F_{\max} = 24 \text{ мм.} \quad (7)$$

Часть 3. Глубина резкости.

В данной части задачи следует принять во внимание дискретную структуру рецепторов сетчатки. Поэтому сначала вычислим среднее расстояние ρ между отдельными рецепторами (колбочками). Можно считать, что рецепторы расположены по желтому пятну равномерно. Пусть на каждый рецептор приходится площадь $s = \frac{1}{4}\pi\rho^2$, а N_2 рецепторов покрывают всю площадь желтого пятна $S = \pi r^2$. Тогда расстояние радиус кружка, приходящегося на один рецептор, оценивается следующим образом



$$N_2 \frac{1}{4}\pi\rho^2 = \pi r^2 \Rightarrow \rho = \frac{2r}{\sqrt{N_2}} \approx \frac{2 \cdot 2,5}{\sqrt{6,0 \cdot 10^6}} \approx 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ мм.} \quad (8)$$

Интересно отметить, что расстояние между рецепторами не намного превышает длину световой волны видимого диапазона.

3.1 Если размер пятна на сетчатке меньше, чем среднее расстояние между рецепторами, глаз (точнее мозг) будет воспринимать это пятно как точку, то есть четкое изображение.

Следовательно, положение изображения, формируемого зрачком, может не попадать точно на сетчатку, а отстоять от нее на некотором расстоянии Δb , таком, чтобы размер пятна на экране не превышал ρ . Рисунок иллюстрирует ход лучей в такой ситуации (масштаб смещения сильно преувеличен). Диаметр зрачка обозначен $d = 4,0$ мм.

Из рисунка следует, что предельное смещение изображения должно удовлетворять соотношению

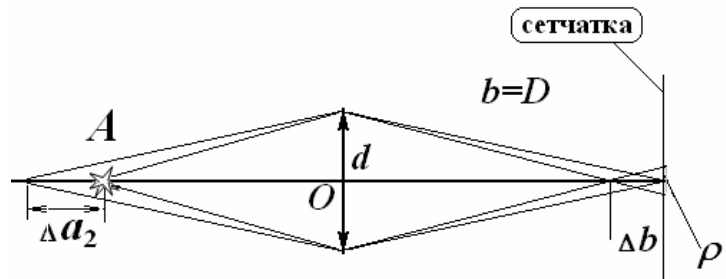
$$\frac{\rho}{\Delta b} = \frac{d}{D + \Delta b}.$$

Учитывая, что $\Delta b \ll D$, получим

$$\Delta b = \frac{D\rho}{d}. \quad (9)$$

Теперь можно воспользоваться соотношением (5) для определения возможного смещения рассматриваемого предмета

$$\frac{\Delta b}{b^2} = -\frac{\Delta a}{a^2} \Rightarrow \Delta a_1 = -\Delta b \left(\frac{a}{b}\right)^2 = -\rho \frac{D}{d} \left(\frac{a_0}{D}\right)^2 = -2,0 \cdot 10^{-3} \frac{24}{4,0} \left(\frac{250}{24}\right)^2 \approx -1,3 \text{ мм}. \quad (10)$$

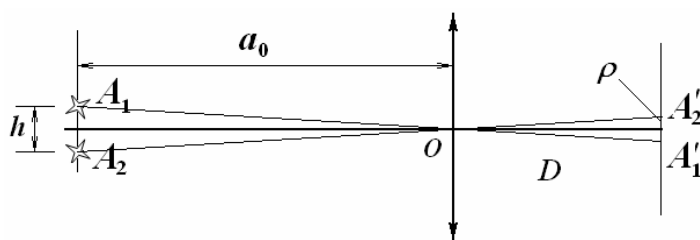


3.2 В этом случае решение полностью аналогично, что подтверждается рисунком хода лучей при удалении предмета. Поэтому

$$\Delta a_2 \approx 1,3 \text{ мм}. \quad (11)$$

Часть 4. Разрешающая способность.

В этом случае расстояние между изображениями $A'_1 A'_2 \leq \rho$ двух точек должно быть больше, чем среднее расстояние между рецепторами ρ . Положения изображений A'_1 и A'_2 проще всего найти, проведя лучи через оптический центр зрачка O . Из подобия треугольников находим минимальное расстояние



$$\frac{h}{a_0} = \frac{\rho}{D} \Rightarrow h = \rho \frac{a_0}{D} = 2,0 \cdot 10^{-3} \frac{250}{24} \approx 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ мм.} \quad (11)$$

¹, «» Если Вам не удалось доказать справедливость формулы тонкой линзы, то используйте ее как очевидный факт при выполнении последующих пунктов задачи.